Université Moulay Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2019/2020
LST Maths Appl
Module M147

Travaux dirigés : Séries Entières
Série 2

Exercice 1

1. Etudier la convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\ln(n)} x^n \qquad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} x^n$$

2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{\sqrt{n^2+7n}} x^{7n} \qquad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{E(n\pi)} x^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\beta)}{n} x^n \qquad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}} x^n$$

Exercice 2
En utilisant les séries entières, calculer la somme de la série numérique suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}$$

Exercice 3
Soit $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n dt$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$
4. Montrer que

$$\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2} dt, \quad \forall x \in]-1,1[$$

Exercice 4

On considère la série complexe de rayon de convergence R et de somme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

où les a_n sont définis par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \text{ et } \forall n \geq 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que R est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$
2. Montrer que pour tout $z \in D(0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n

Exercice 5

On se propose dans cet exercice de calculer $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}.$$

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
2. Donner le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j2x}$.
3. En déduire $S(x)$
4. Puis la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.