Université Moulay Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2019/2020
LST Maths Appl
Module M147

Travaux dirigés : Séries de Fourier
Série 3

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, paire et vérifiant

$$f(x) = x \text{ sur } [0, \pi]$$

1. Calculer la série de Fourier de f.
2. Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f.
3. Déterminer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$
4. En déduire
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{1=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ sur }]0, \pi]$$

1. Préciser la convergence de la série de Fourier de f. La convergence est-elle uniforme ?
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. En déduire la convergence et la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$
4. Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3

Soit f une fonction réelle développable en série de Fourier. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f, ceux des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x)\cos(x) \text{ et } h(x) = f(x)\sin(x)$$

Exercice 4

Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = cos(\alpha t) \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

1. Montrer que f admet une série de Fourier convergente sur $\mathbb{R}$. Préciser le type de convergence.
2. Expliciter les coefficients de Fourier de f.
3. Pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$, montrer l'égalité

$$\text{cotan} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - (n\pi)^2}$$

Exercice (Facultatif)

Déterminer les fonctions 2π-périodiques solutions de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \beta y = f$$

où f est une fonction 2π-périodique (dérivable) et $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Application $f(x) = cos(4x) + sin(3x)$ et $\beta = 3$.