

Théorèmes généraux et analyse des circuits

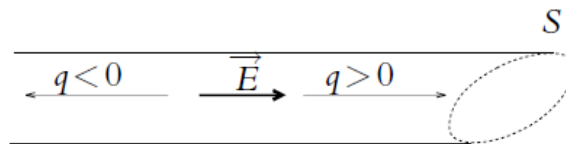
L'électrocinétique concerne l'étude du mouvement de particules chargées dans la matière sous l'action d'un champ électrique. Dans ce chapitre, on définit les notions fondamentales comme le courant et la tension et on précise les lois générales de l'électricité dans le cadre de l'approximation des régimes continus.

I- Courant continu

I.1 - Courant électrique continu

Le courant continu est un déplacement permanent des charges électrique.

Soit un fil de section S quelconque. On soumet ce fil à l'action d'un champ électrique extérieur orienté le long de ce fil. On admet arbitrairement que l'orientation du champ électrique oriente le fil :

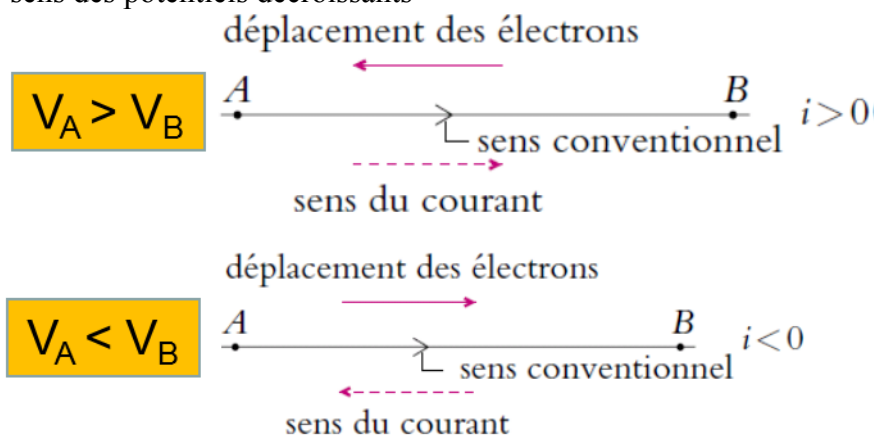


Sous l'action du champ électrique extérieur, les porteurs de charges sont soumis à la force $\vec{f} = q\vec{E}$ et sont donc animés d'un mouvement d'ensemble tel que :

- les charges positives se déplacent dans le sens du champ,
- les charges négatives dans le sens contraire.

I.2 - Sens conventionnel du courant

Par convention le sens du courant est le sens suivant lequel se déplacent les charges positives, c'est à dire le sens des potentiels décroissants



I.3 - Intensité du courant

On appelle intensité du courant électrique et on note i la quantité de charges δq traversant S par unité de temps δt . Cela se traduit mathématiquement par : $i = \delta q / \delta t$

I.4 - Unité du courant

L'unité de l'intensité est l'ampère et son symbole est A. L'ampère est une des unités de base du Système International. Cela correspond à des $C.s^{-1}$.

On notera que l'intensité i est une grandeur algébrique pouvant être positive ou négative. Si elle est constante au cours du temps, on dira que le courant est continu.

I.5 - Quelques ordres de grandeur d'intensité

Pour avoir une idée des ordres de grandeur d'intensités utilisées par les appareils domestiques, le lecteur pourra consulter les étiquettes de fusibles d'une installation électrique. Par exemple :

- Un four utilise un courant de l'ordre de 32 A
- Un chauffage de 1000 W consomme environ 5 A
- Un T.G.V. consomme un courant de plusieurs centaines d'ampères 500 A
- L'intensité dans les lignes de distribution électrique hautes tensions est de l'ordre de 1000 A.

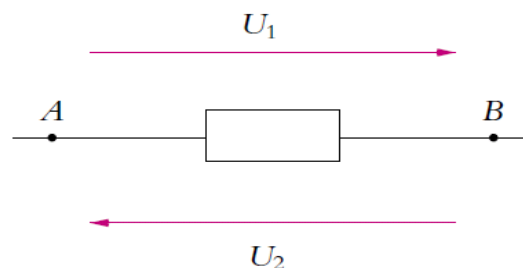
II- Tension et potentiel

III-1 Tension

On appelle tension ou différence de potentiel la grandeur mesurée par un voltmètre entre deux points A et B. Elle s'exprime en volt, de symbole V, en hommage au physicien Volta (1745 - 1827).

On notera les tensions avec la lettre U et les potentiels avec la lettre V. Ainsi la tension U_{AB} entre deux points A et B d'un conducteur est égale à la différence de potentiel entre ces deux points A et B : $U_{AB} = V_A - V_B$.

Aux bornes d'un élément de circuit, qu'on représente par un rectangle on mesure une tension U. On indique cette tension sur le schéma par une flèche dont **le sens est très important**. En effet, il s'agit du choix de l'orientation de la tension soit $U_1 = V_B - V_A$ soit $U_2 = V_A - V_B$.



III-2 Masse ou référence de potentiel

La tension qu'on peut mesurer expérimentalement est une différence de potentiel entre deux points. Pour fixer cette constante, on choisit arbitrairement une référence de potentiel nul, qu'on appelle la masse. Son symbole : (à voir au TP)

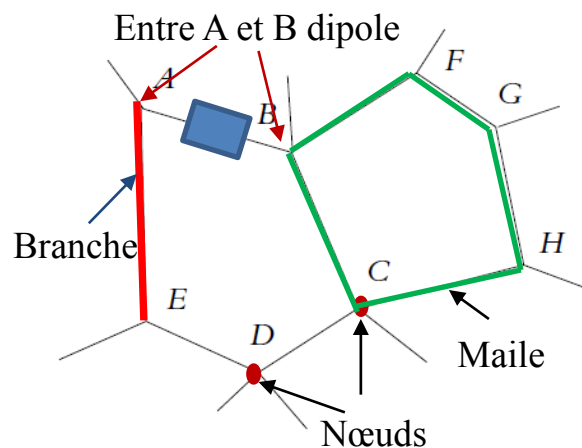


III- Circuits électriques

V-11 Terminologie des circuits

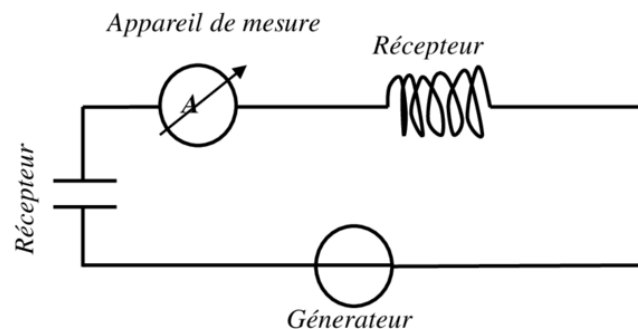
Avant d'étudier les circuits électriques, on a besoin de définir quelques termes relatifs à leur constitution.

- Un dipôle est un élément de circuit relié au reste du circuit par deux bornes entre A et B, B et C, C et H.
- Une branche est un ensemble de dipôles reliés par des fils de connexion et disposés en série c'est-à-dire que chaque borne d'un dipôle n'est reliée qu'à un seul autre dipôle. AB, BC, CD, DE, EA, BF, FG, GH et HC
- Un nœud est un point où se rejoignent au moins deux branches A, B, C, D, E, F, G et H.
- Une maille est un ensemble de branches se refermant sur elles-mêmes ABCDEA, BFGHCB et ABFGHCDEA.



Le circuit électrique peut contenir un certain nombre d'appareils aux propriétés différentes :

- **Générateurs** : batteries, générateurs de tension, piles. . .
- **Récepteurs** : résistances, bobines, condensateurs. . .
- **Appareils de mesure** : voltmètres, ampèremètres, oscilloscopes. . .
- **Appareils de sécurité** : disjoncteurs, fusibles. . .
- **Appareils de manoeuvre** : inverseurs



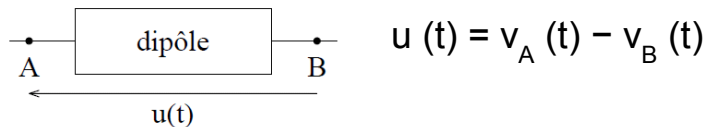
Appareils polarisés : Ils ont une borne (souvent rouge) et une borne (souvent bleue ou verte) de polarités indépendantes du sens du courant. Exemple : piles et accumulateurs. L'intensité qui les traverse peut être positive ou négative. Ainsi, ils fonctionnent en électromoteurs si le sens conventionnel du courant sort par la borne, et en contre-électromoteur si le sens conventionnel du courant sort par la borne.

Appareils non polarisés : En l'absence de courant, ils sont aussi appelés récepteurs véritables. Exemples : moteurs, électrolyseurs. Ils se polarisent si un courant les traverse, et ne fonctionnent qu'en électromoteurs.

V-12 Dipôle électrocinétique

On appelle dipôle électrocinétique tout système relié à l'extérieur par deux conducteurs uniquement. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par deux grandeurs électriques duales : la tension et le courant.

La tension aux bornes d'un dipôle représente la différence de potentiel $u(t)$ entre les deux bornes du dipôle. La tension s'exprime en Volt (V).

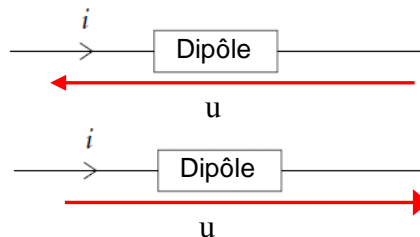


V-13 Notion de générateur et de récepteur

Il existe deux possibilités d'orientations relatives de la tension et de l'intensité : de même sens ou de sens opposé.

Ces deux orientations relatives conduisent à deux conventions possibles :

- la convention récepteur où l'intensité i et la tension u sont choisies de sens opposé
- la convention générateur où l'intensité i et la tension u sont choisies de même sens.



En régime stationnaire, indépendant du temps, il existe une relation entre l'intensité i traversant le dipôle et la tension u entre ses bornes. Cette relation peut se mettre sous la forme $i = i(u)$ ou $u = u(i)$. Les graphes obtenus sont appelés caractéristiques statiques :

- $i = i(u)$: caractéristique statique courant-tension du dipôle
- $u = u(i)$: caractéristique statique tension-courant du dipôle

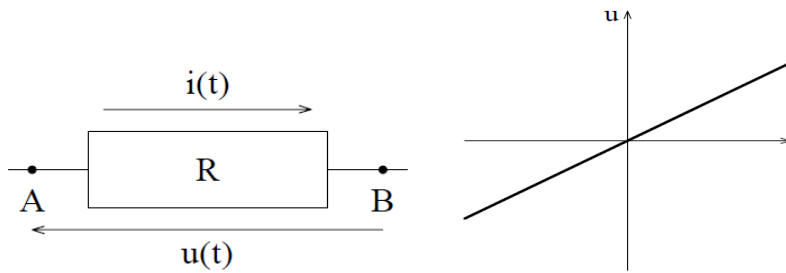
Un dipôle est passif si son intensité de court-circuit et sa tension en circuit ouvert sont nulles : ses caractéristiques statiques passent par l'origine. Il est dit actif dans le cas contraire.

V-14 Loi d'Ohm

La tension aux bornes d'une résistance est donnée par la loi d'Ohm :

$u(t) = R i(t)$ (en convention récepteur)

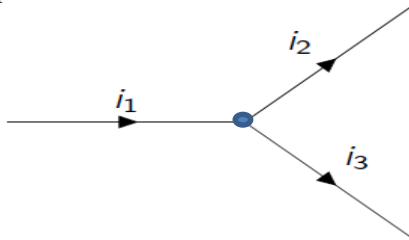
La résistance s'exprime en Ohm (Ω).



V-15 Lois de Kirchhoff

A - Loi des nœuds

La somme algébrique des courants entrant dans un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui en sortent. Cette loi exprime la conservation de la charge dans un circuit électrique.



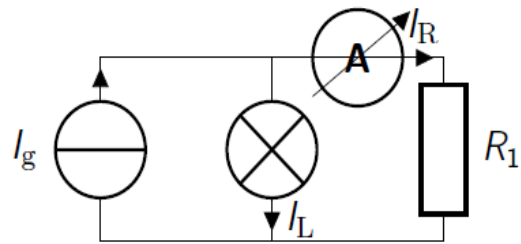
$$i_1 = i_2 + i_3$$

Loi des nœuds : exemple d'application

Calculer I_L ?

Avec : $I_g = 0,5$ et $I_R = 0,3$ A

Réponse $I_L = 0,2$ A



B - Loi des mailles

On choisit un sens positif représenté par la flèche en pointillés. Sachant que la différence de potentiel entre le point A et lui-même est nulle, on peut écrire en introduisant les potentiels des autres points de la maille :

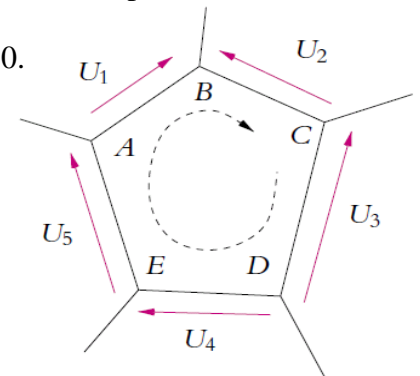
$$V_A - V_A = 0, V_A - V_E + V_E - V_D + V_D - V_C + V_C - V_B + V_B - V_A = 0.$$

Si on remplace les différences de potentiel par les tensions, avec :

$$U_1 = V_B - V_A, U_2 = V_B - V_C, U_3 = V_C - V_D, U_4 = V_E - V_D \text{ et}$$

$$U_5 = V_A - V_E$$

on obtient la loi suivante : $U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 = 0$



Cette loi, qui porte le nom de **loi des mailles**, se généralise à **n tensions (n branches sur une**

maille) : $\sum_{k=1}^n \epsilon_k U_k = 0$

avec $\epsilon_k = 1$ si la tension U_k est dans le sens positif choisi et $\epsilon_k = -1$ si la tension U_k est dans le sens opposé au sens positif choisi.

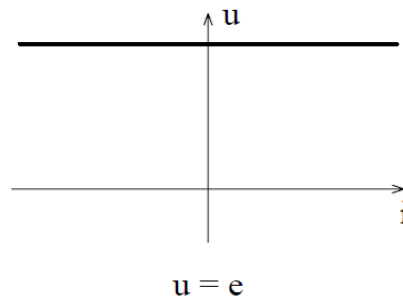
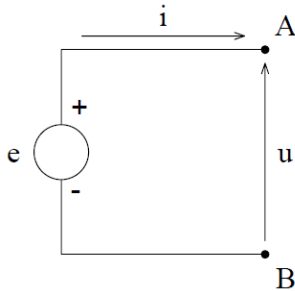
IV- Sources de tension et de courant

IV-1 Sources de tension idéales et réelles

Un générateur de tension idéal délivre une tension indépendante du courant débité :

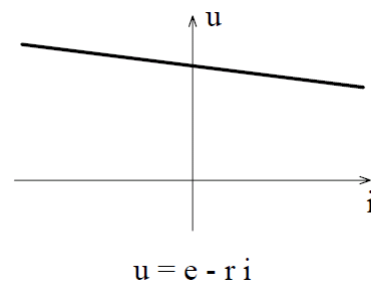
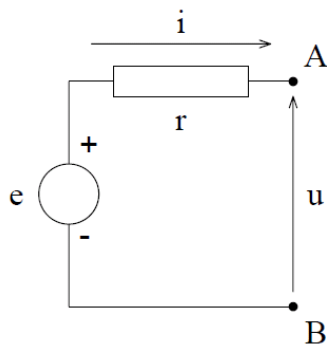
$$V_A - V_B = e = \text{cste} \quad \forall i$$

Cette tension est la force électromotrice (f.e.m.) du générateur.



La résistance interne d'un générateur de tension idéal est nulle, ce qui n'est généralement pas le cas pour un générateur réel. Un générateur réel est modélisé par un générateur idéal en série avec sa résistance interne. En convention générateur, la caractéristique statique tension courant du générateur de tension réel devient :

$u = e - r i$. La résistance interne induit une chute de tension.

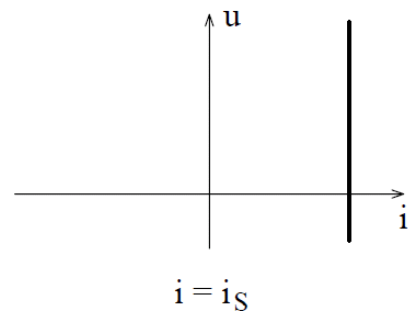
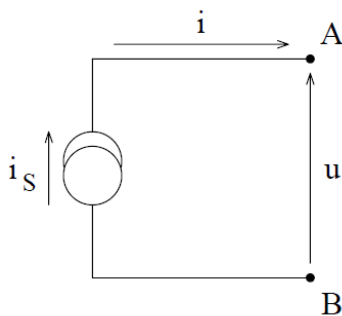


IV-2 Sources de courant idéales et réelles

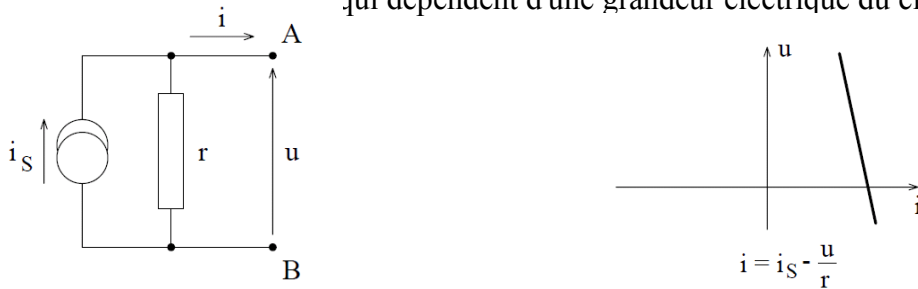
Un générateur de courant idéal débite un courant dont l'intensité est indépendante de la tension aux bornes du générateur : $i = i_s = \text{cste} \quad \forall u$

La figure 13 montre le symbole d'une source de courant idéale et sa caractéristique courant-tension. La résistance interne d'une source de courant idéale est infinie. Pour un générateur réel on tient compte de sa résistance interne, en le modélisant par une source idéale de courant en parallèle avec sa résistance interne r . En convention générateur, la caractéristique statique courant-tension du générateur de courant réel est donc :

$$i = i_s - \frac{u}{r}$$

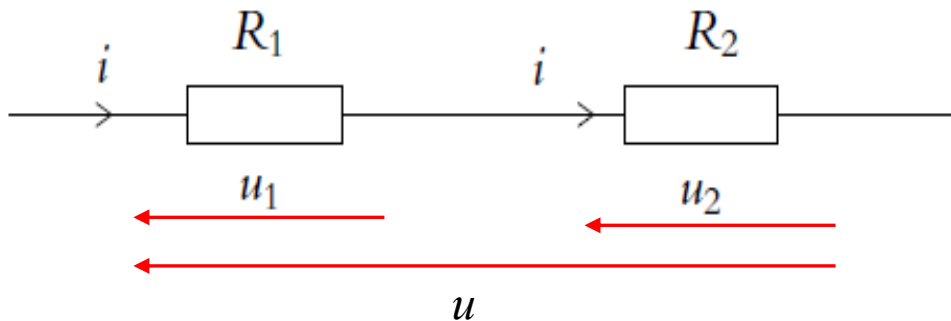


Comme pour les sources de tension on distingue les sources de courant indépendantes et les sources qui dépendent d'une grandeur électrique du circuit.



IV-3 Association en série, résistance équivalente

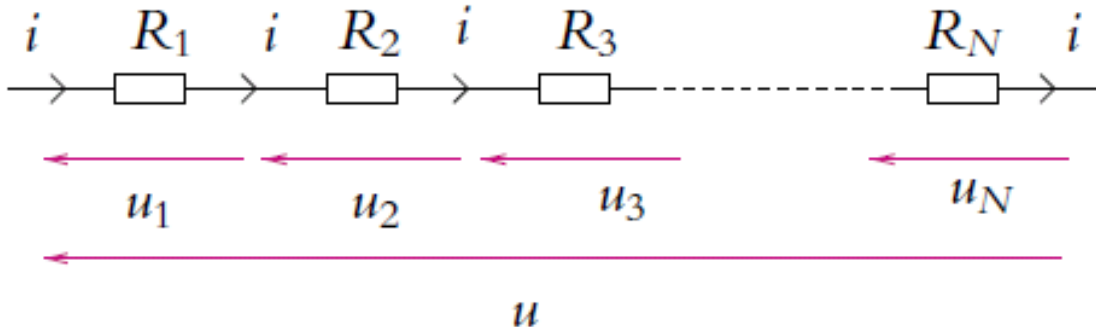
Lorsque plusieurs composants sont placés sur une même branche du circuit, on dit qu'ils sont placés **en série et que ils sont traversés par une même intensité de courant**. Dans ce circuit par exemple, les deux résistances sont placées en série :



On en déduit que la tension aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle :

$$u = u_1 + u_2$$

On peut généraliser ce résultat au cas de N dipôles :



Les N dipôles sont en série si une même intensité traverse tous les dipôles :

$$i_1 = i_2 = \dots = i_N = i$$

La tension aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle :

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_N$$

Dans le cas où les dipôles sont des résistors de résistance R_1, R_2, \dots, R_N :

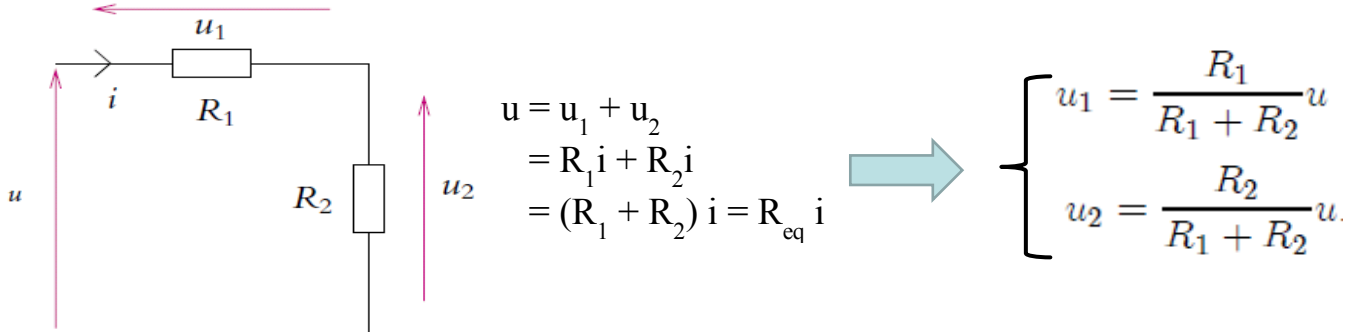
$$u = R_1 i + R_2 i + \dots + R_N i = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) i$$

L'association en série de résistors de résistance R_1, R_2, \dots, R_N est donc un résistor de résistance

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

IV-4 Association en série, pont diviseur de tension

Plusieurs résistances associées en série constituent ce qu'on appelle un pont diviseur de



Les tensions u_1 et u_2 sont des fractions de la tension totale u , ce qui explique la dénomination « **diviseur de tension** » donnée à ce circuit. Le rapport de la tension aux bornes d'une résistance à la tension totale est égal au rapport de la résistance considérée à la résistance totale.

➤ Deux remarques importantes :

- Il faut faire attention à appliquer correctement la formule du diviseur de tension notamment quand on a des associations de résistances en parallèle dans le circuit.
- Il faut également faire attention aux sens des orientations des tensions.

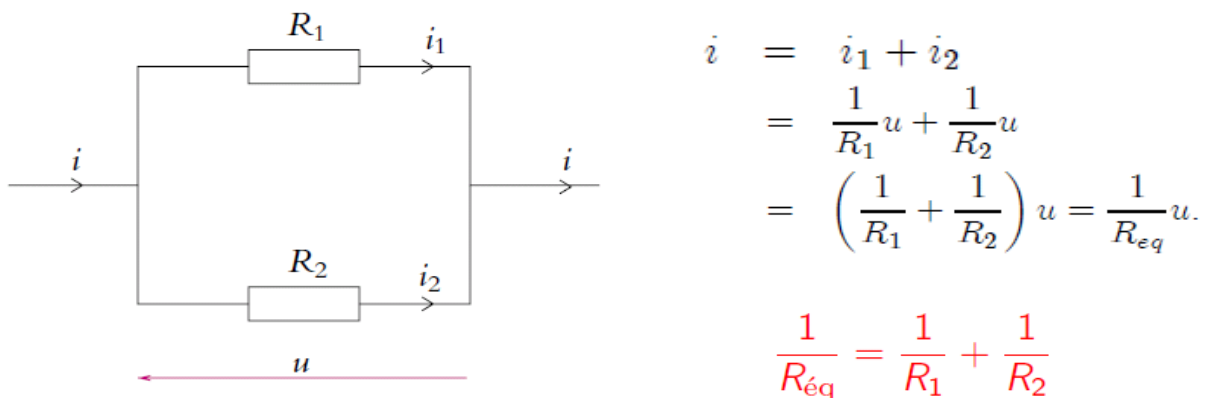
Ce résultat se généralise pour l'association de N résistances placées en série :

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} u$$

IV-3 Association en parallèle, résistance équivalente

Deux dipôles sont dits en parallèle (ou en dérivation) s'ils sont reliés aux deux mêmes noeuds, donc soumis à la même tension. Ici, deux résistances placées en parallèle :

On peut représenter ces deux résistances comme une seule résistance équivalente.

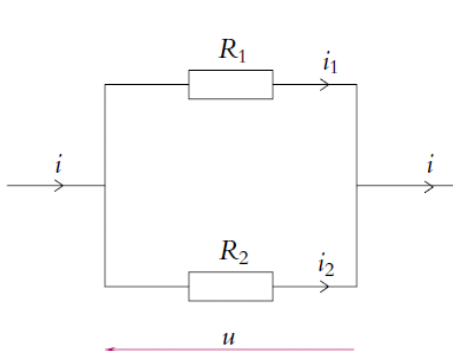


Ce résultat se généralise pour l'association de N résistances placées en série :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

IV-4 Association en parallèle, pont diviseur de courant

Plusieurs résistances associées en parallèle constituent ce qu'on appelle un pont diviseur de courant.



$$\text{On a } I_1 + I_2 = I \quad i_1 = \frac{1}{R_1} u \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{1}{R_2} u;$$

$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u$$

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i.$$

Ce résultat se généralise pour N résistances placées en parallèle :

$$i_k = \frac{1/R_k}{1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_N}$$

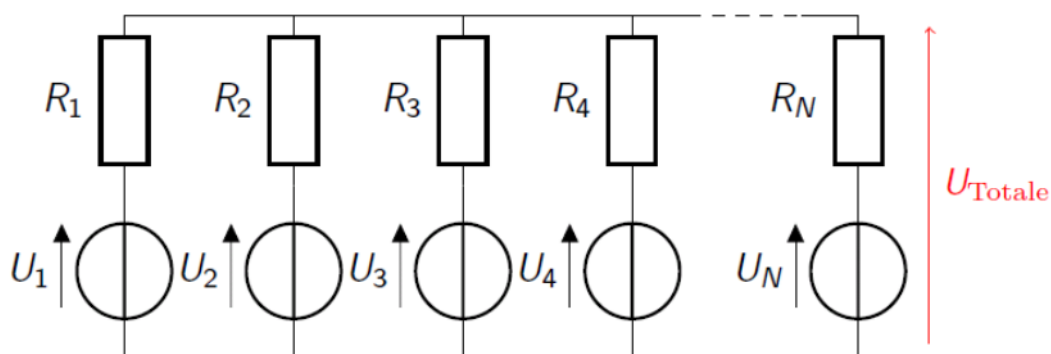
➤ Deux remarques importantes :

- Il faut faire attention à appliquer correctement la formule du diviseur de courant notamment quand on a des associations de résistances en série dans le circuit.
- Il faut également faire attention à l'orientation des intensités.

V- Théorèmes généraux

V-1 : Théorème de Millman

Considérons N branches parallèles, comprenant chacune un générateur de tension parfait en série avec une résistance :



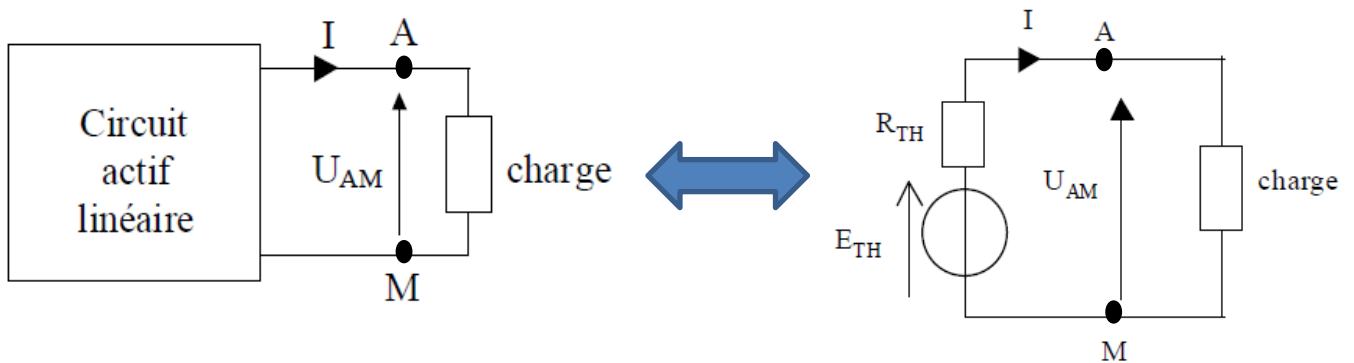
La tension aux bornes des branches vaut alors :

$$U_{\text{Totale}} = \frac{\sum_{n=1}^N (U_n/R_n)}{\sum_{n=1}^N (1/R_n)}$$

V-2 : Théorème de Thévenin

Tout circuit actif linéaire peut être modélisé entre A et M par un générateur de tension caractérisé par :

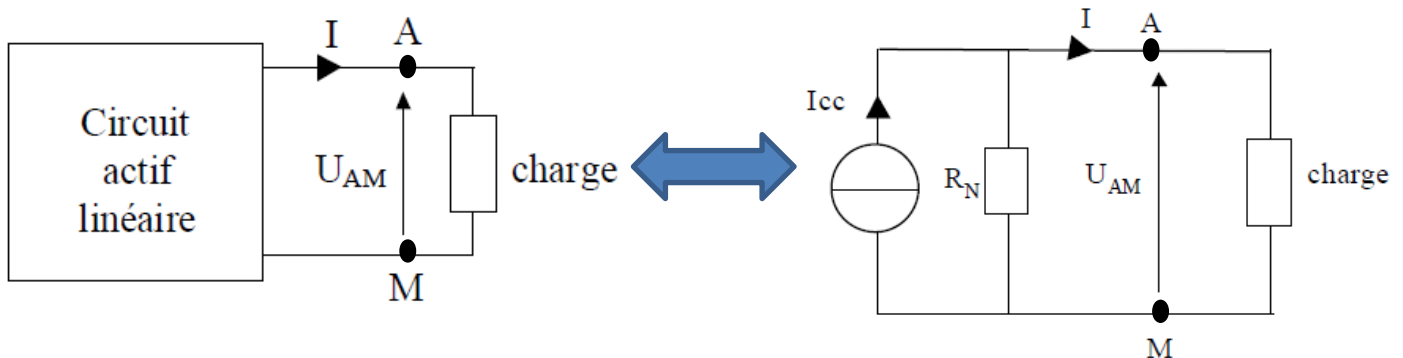
- une f.é.m. à vide (générateur de Thévenin) E_{TH} égale à la tension (entre A et M) en circuit ouvert ($I = 0$)
- une résistance interne (résistance de Thévenin) R_{TH} égale à la résistance équivalente entre A et M du circuit actif linéaire rendu passif (les sources étant remplacées par leurs résistance interne).



V-3 : Théorème de Norton

Tout circuit actif linéaire peut être modélisé entre A et M par un générateur de courant caractérisé par :

- un courant de court-circuit I_{cc} égal au courant circulant entre A et M lorsqu'ils sont reliés ($U_{\text{AM}} = 0 \text{ V}$)
- une résistance interne (résistance de Norton) R_N égale à la résistance équivalente entre A et M du réseau dipolaire rendu passif (les sources étant remplacées par leurs résistance interne).



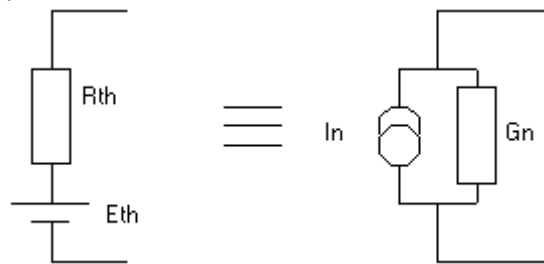
V-4 : Théorème de Superposition

Pour tout circuits actifs linéaires qui comportent plusieurs générateurs (de tension ou de courant), le courant qui traverse une branche quelconque du circuit est la somme des courants que fournirait chaque générateur agissant seul, les autres étant remplacés par leurs résistances internes.

Voir exemple en TD.

V-6 : équivalence Norton-Thévenin

Dans bien des cas, le générateur de Norton est plus complexe à déterminer que le générateur de Thevenin, c'est pourquoi il est bien souvent préférable de calculer le générateur de thevenin et de le transposer en générateur de Norton. Pour cela on applique la méthode de la transposition des sources :



Si on connaît la résistance de Thevenin R_{th} , on en déduit la résistance de Thevenin G_n par la relation suivante :

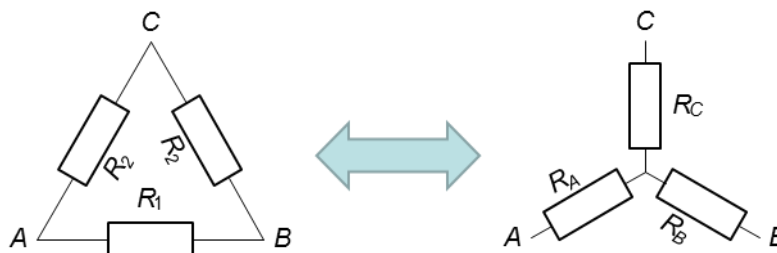
$$G_n = 1/R_{th}$$

De même, si on connaît le générateur de Thevenin E_{th} on en déduit le générateur de Norton I_n :

$$I_n = E_{th}/R_{th}$$

V-5 : Théorème de Kennelly ou transformation triangle-étoile

Le théorème de Kennelly permet d'établir une équivalence entre des résistances placées en triangle et des résistances placées en étoiles.



La résistance d'une branche de l'étoile équivalente est égale au produit des résistances adjacentes divisé par la somme totale des résistances :

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

La résistance d'une branche du triangle équivalent est égale à la somme des produits des résistances, divisée par la résistance de la branche opposée :

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C}, R_2 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_A}, R_3 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_B}$$