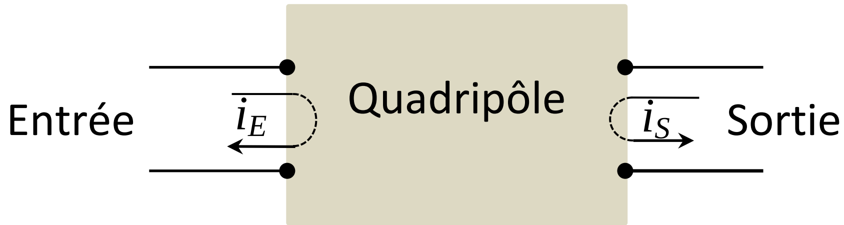
Quadripôles électriques

Objectifs

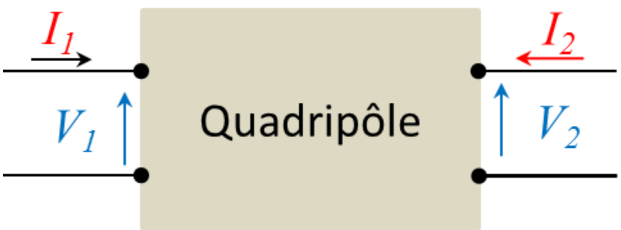
- Dans ce chapitre la définition des quadripôles, leurs différents types ainsi que leurs paramètres sont étudiés.

I. Définition des quadripôles

Un quadripôle est une partie du réseau qui communique avec l'extérieur par deux paires de bornes. De nombreux circuits peuvent être représentés par une « boîte » munie de deux bornes d'entrée et de deux bornes de sortie.



- Le courant qui rentre à chacun des dipoles doit etre égal à celui qui en sort.
- Quatre grandeurs électriques caractérisent un quadripôle : le courant I_1 et la tension V_1 d'entrée, le courant I_2 et la tension V_2 de sortie. Par convention, on donne le sens positif aux courants qui pénètrent dans le quadripôle.

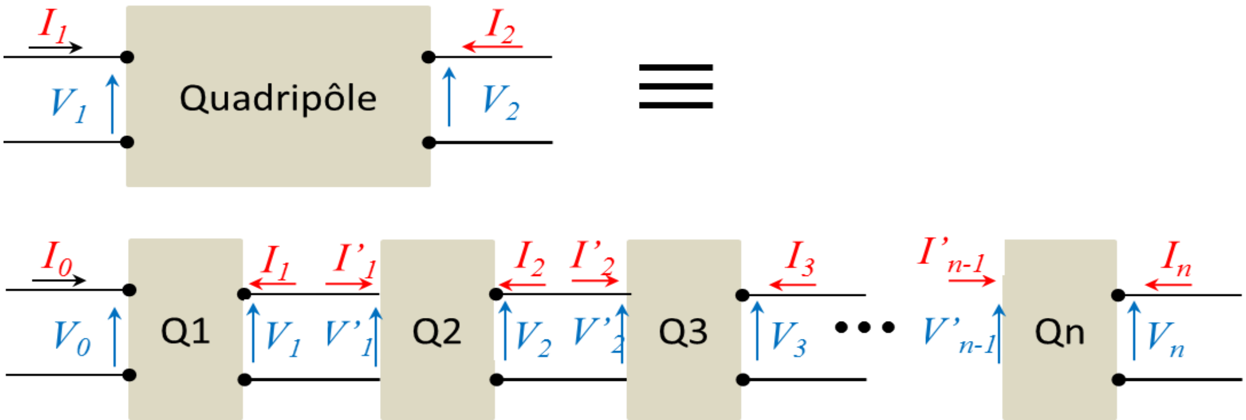


II. Différents types de quadripôles

Les quadripôles sont classés en deux types : actif et passif.

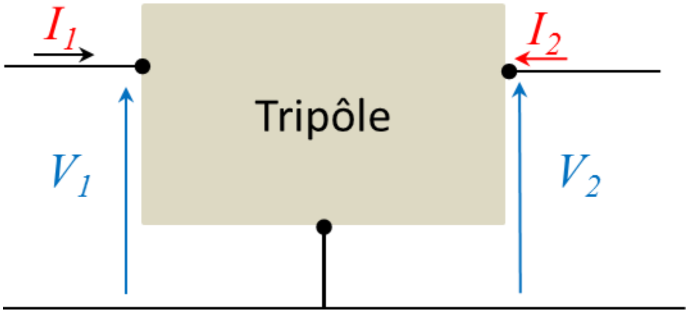
- Quadripôle actif : C'est un quadripôle qui contient des sources (de tension ou de courant) liées à des grandeurs électriques internes.
- Quadripôles passif : Il ne contient aucune source de tension ou de courant dépendante.

Il est souvent possible de décomposer un dispositif électrique ou électronique complexe en un ensemble de modules fonctionnels qui sont des quadripôles. Ces modules sont ensuite associés en cascade : les grandeurs de sortie de l'un constituent les grandeurs d'entrée du suivant.



L'étude des quadripôles linéaires est facilitée par l'usage du calcul matriciel.

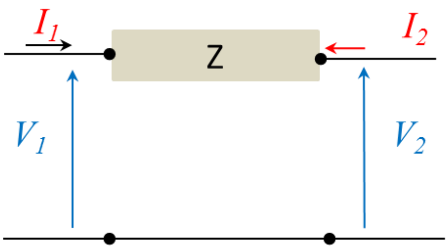
CAS PARTICULIER : **Le tripôle**
Une borne d'entrée est alors commune avec une borne de sortie. Les transistors sont modélisables par des tripôles.



III. Exemples de quadripôles

III-1 Quadripôle série

Il contient une seule impédance. La loi des mailles donne :
$V_2 = V_1 - Z.I_1$ et $I_2 = -I_1$

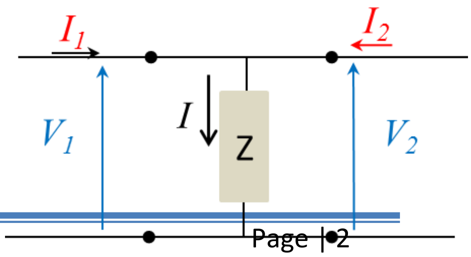


Soit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} V_2 = V_1 - Z.I_1 \\ I_2 = 0.\,V_1 - I_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \text{ Soit } \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \text{ avec } \det(M) = 1$$

On peut noter que pour ce quadripôle, le déterminant de la matrice liant les grandeurs d'entrée aux grandeurs de sortie est égal à 1.

III-2 Quadripôle parallèle



La loi des mailles donne : $V_2 = V_1 = Z.I$ donc $I = V_1/Z$

La loi des nœuds donne : $I = I_1 + I_2$ d'où $I_2 = V_1/Z - I_1$

Soit sous forme matricielle :

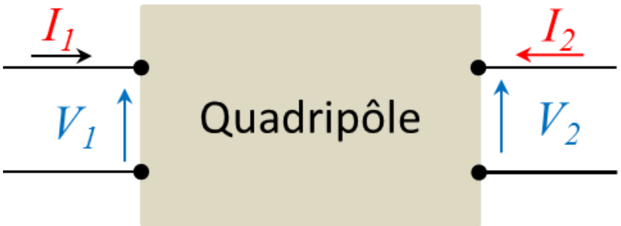
$$\begin{cases} V_2 = V_1 - 0.I_1 \\ I_2 = V_1/Z - I_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

Ici encore, le déterminant de la matrice est égal à 1.

N.B : Les quadripôle en électronique ne sont pas les quadrupôles de l'électrostatique.

IV. Matrices représentatives des quadripôles

Pour les quadripôles ne contenant que des dipôles linéaires les 4 grandeurs fondamentales V_1, V_2, I_1 et I_2 sont liées par des équations linéaires. Plusieurs représentations matricielles sont possibles et le choix de l'une de celles-ci sera fait en fonction du problème étudié.



IV-1 Matrice impédance

On exprime les tensions en fonction des courants.
Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances (i.e., les Z_{ij} sont des impédances).

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

IV-2 Matrice admittance

On exprime les courants en fonction des tensions.
Les éléments de la matrice ont la dimension d'admittances (i.e., les Y_{ij} sont des admittances).

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

IV-3 Matrice de transfert

On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée. T_{11} est un nombre, T_{12} est une impédance, T_{21} une admittance et T_{22} un nombre.
Bien noter dans cette représentation le ***signe moins*** affecté à I_1

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

La matrice inverse de la matrice de transfert donne les paramètres d'entrée en fonction des paramètres de sortie.

IV-4 Matrice hybrides

Ils permettent d'exprimer la tension d'entrée et le courant de sortie en fonction du courant d'entrée et de la tension de sortie.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

h_{11} est une impédance, h_{22} une admittance, h_{12} et h_{21} sont des nombres.

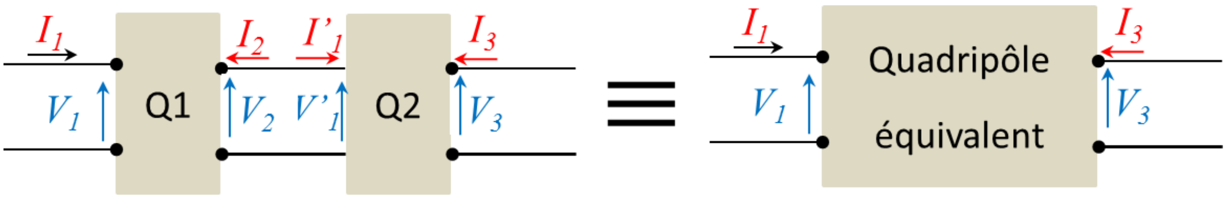
IV-5 Lien entre tous les paramètres

	T	Z	Y	h
T	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11}/Z_{21} & -\Delta Z/Z_{21} \\ 1/Z_{21} & -Z_{22}/Z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Y_{22}/Y_{21} & 1/Y_{21} \\ -\Delta Y/Y_{21} & Y_{11}/Y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\Delta h/h_{21} & -h_{11}/h_{21} \\ -h_{22}/h_{21} & -1/h_{21} \end{bmatrix}$
Z	$\begin{bmatrix} T_{11}/T_{21} & \Delta T/T_{21} \\ 1/T_{21} & T_{22}/T_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{22}/\Delta Y & -Y_{12}/\Delta Y \\ -Y_{21}/\Delta Y & Y_{11}/\Delta Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta h/h_{22} & h_{12}/h_{22} \\ -h_{21}/h_{22} & 1/h_{22} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} T_{22}/T_{12} & -\Delta T/T_{12} \\ -1/T_{12} & T_{11}/T_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{22}/\Delta Z & -Z_{12}/\Delta Z \\ -Z_{21}/\Delta Z & Z_{11}/\Delta Z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/h_{11} & -h_{12}/h_{11} \\ h_{21}/h_{11} & \Delta h/h_{11} \end{bmatrix}$
h	$\begin{bmatrix} T_{12}/T_{22} & \Delta T/T_{22} \\ -1/T_{22} & T_{21}/T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta Z/Z_{22} & Z_{12}/Z_{22} \\ -Z_{21}/Z_{22} & 1/Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/Y_{11} & -Y_{12}/Y_{11} \\ Y_{21}/Y_{11} & \Delta Y/Y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

V. Associations de quadripôles

V-1 Association en cascade

Les deux sorties du premier sont reliées aux deux entrées du second. On utilise les matrices de transfert $[T_1]$ et $[T_2]$ des deux quadripôles associés.



La matrice de transfert de quadripôle 1 : $\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$

La matrice de transfert de quadripôle 2 : $\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^{(2)} & T_{12}^{(2)} \\ T_{21}^{(2)} & T_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} = [T_2] \begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix}$

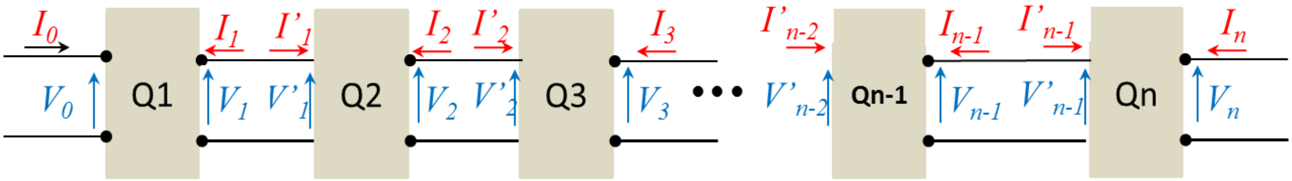
On a : $V_2 = V'_2$ et $I_2 = -I'_2$. On les remplace dans la matrice de transfert de quadripôle 2 :

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = [T_2] \begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} = [T_2] \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Et en remplaçant V_2 et I_2 de la matrice de transfert de quadripôle 1, on exprime les grandeurs de sortie V_3 et
I_3 en fonction de celles d'entrée V_1 et I_1 du quadripôle équivalent : $\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = [T_2] \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T_2][T_1] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$

La matrice de transfert du quadripôle équivalent est donc égale au produit de la seconde matrice de transfert par la première. Attention car ce produit n'est pas commutatif !!!

En généralise pour le cas de n quadripôles en cascade :



$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = [T_n][T_{n-1}][T_{n-2}]..............[T_3][T_2][T_1]\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

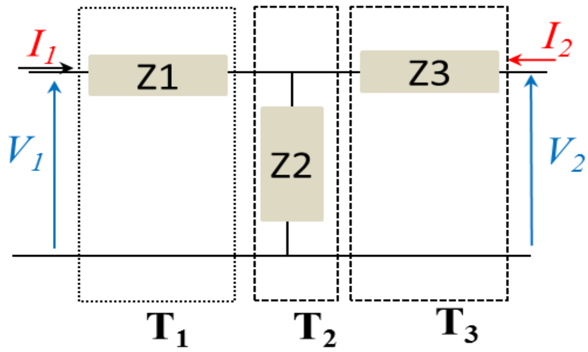
APPLICATIONS :

- Quadripôle en T

On considère l'association de trois quadripôles en cascade et on recherche la matrice de transfert équivalente.

$[Teq] = [T_3].[T_2].[T_1]$ (Attention à l'ordre !)

Avec :



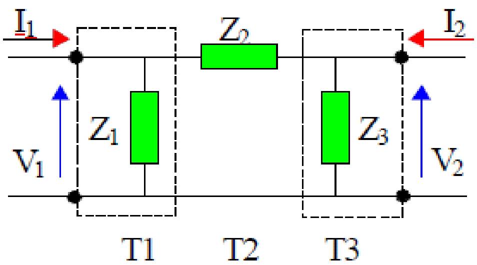
$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'ou

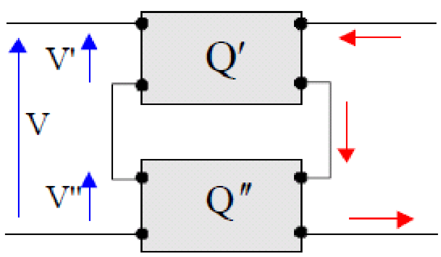
$$[Teq] = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{Z_3}{Z_2} & Z_1 + Z_3 + \dfrac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ \dfrac{1}{Z_2} & 1+\dfrac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix}$$

- Quadripôle en Π



Voir TD

V-1 Association en série



Dans ce cas, il y a additivité des tensions aux bornes des quadripôles ; les courants sont identiques.
On en déduit simplement la matrice impédance équivalente.

On a : $[V'] = [Z'].[I']$

$[V''] = [Z''].[I'']$

$[V] = [V'] + [V'']$

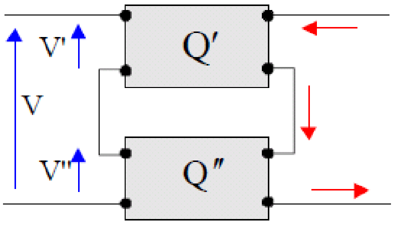
$[I] = [I'] = [I'']$

d'où : $[Z] = [Z'] + [Z'']$

V-1 Association en parallèle

Il y a additivité des courants et identité des tensions : la matrice admittance du quadripôle équivalent est la somme des matrices admittance des 2 quadripôles :

$[Y] = [Y'] + [Y'']$



VI. Grandeurs fondamentales des quadripôles

Il est possible de définir pour un quadripôle des grandeurs caractéristiques comme les impédances d'entrée et de sortie, et les gains en tension, courant et puissance.

VI-1 Impédance d'entrée

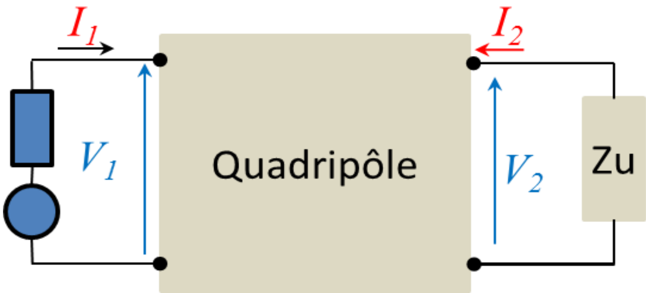
C'est l'impédance $Z_E = V_1 / I_1$ vue à l'entrée quand la sortie est chargée par une impédance Z_U. On utilise la matrice impédance du quadripôle.

$V_1 = Z_{11}.I_1 + Z_{12}.I_2$

$V_2 = Z_{21}.I_1 + Z_{22}.I_2 = - Z_U.I_2$

$I_2(Z_U + Z_{22}) = - Z_{21}.I_1$

$I_2 = - Z_{21}.I_1/(Z_{22} + Z_U)$



$\mathbf{V_1 = I_1.\{Z_{11} - Z_{12}.Z_{21}/(Z_{22} + Z_U)\}}$

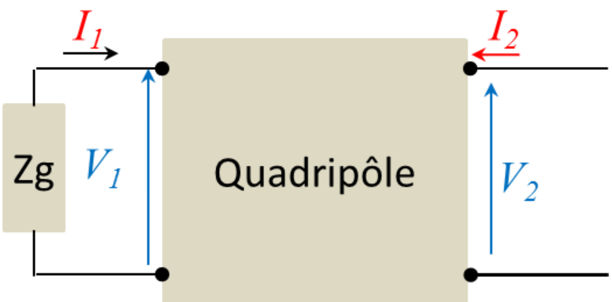
D'où :

$$Z_E = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{12} + Z_u}$$

VI-2 Impédance de sortie

C'est l'impédance $Z_S = V_2 / I_2$ vue à la sortie quand l'entrée est fermée par une impédance Z_g qui est l'impédance du générateur.

Un calcul analogue au précédent donne :



$$Z_S = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_g}$$

VI-3 Gain en tension

C'est le quotient de la tension de sortie par la tension d'entrée : $G_V = V_2 / V_1$

VI-4 Gain en courant

C'est le quotient de courant de sortie par le courant d'entrée : $G_i = I_2 / I_1$

VI-4 Gain composite en tension

C'est le quotient de la tension de sortie par la source alimentée l'entrée.

VI-4 Gain composite en courant

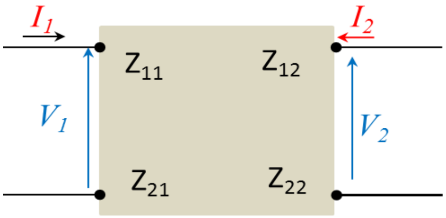
C'est le quotient du courant de sortie par le courant alimenté l'entrée :
Ce gain n'a de sens que si la charge est présente : $I_2 \neq 0$

VII. Schémas électriques équivalents d'un quadripôle

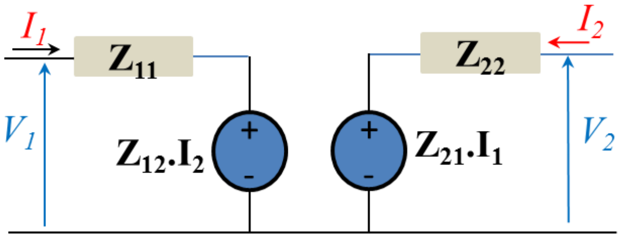
Il est parfois commode de remplacer le quadripôle par son schéma équivalent donné par la matrice du quadripôle.
Plusieurs schémas de quadripôles équivalents sont utilisés :

VII-1 Schéma électrique équivalent représenté par les paramètres impédances

$V_1 = Z_{11}.I_1 + Z_{12}.I_2$
$V_2 = Z_{21}.I_1 + Z_{22}.I_2$



D'ou le schéma électrique équivalent :



VII-1 Schéma électrique équivalent représenté par les paramètres admittances

$I_1 = Y_{11}.V_1 + Y_{12}.V_2$
$I_2 = Y_{21}.V_1 + Y_{22}.V_2$