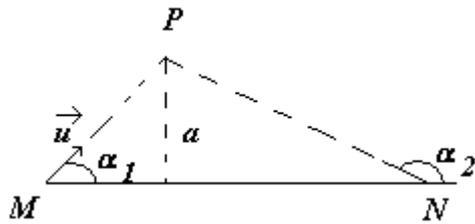


Calcul du champ magnétique

Exercice 1

Soit un conducteur filiforme rectiligne MN parcouru par un courant d'intensité I .

- 1) Calculer le champ d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$ créé par un élément $d\vec{l}$ en un point P situé à une distance a du fil.
- 2) En déduire le champ magnétique total \vec{B} créé par le tronçon MN .
- 3) Etudier le cas où MN est infini. Préciser les lignes du champ magnétique.

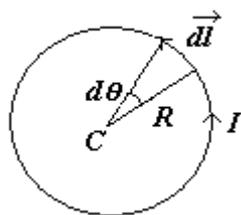


Exercice 2

On considère une spire circulaire, parcourue par un courant d'intensité I .

Etablir l'expression du champ d'induction magnétique créée :

- 1) au centre C de la spire.
- 2) en un point P situé sur l'axe Cz de la spire.



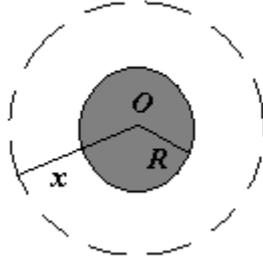
Exercice 3

Un cylindre rectiligne indéfini, de rayon R est parcouru par un courant d'intensité I .

La densité de courant \vec{j} est uniforme.

Etablir l'expression du champ d'induction en fonction de la distance x à l'axe du cylindre

($x \leq R$ et $x \geq R$).

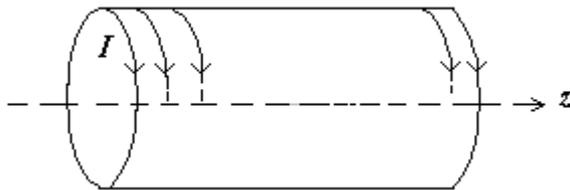


Exercice 4

On considère un solénoïde infiniment long (C) contenant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I .

- 1) Etablir l'expression du champ magnétique à l'intérieur de ce solénoïde.
- 2) Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(r)$ en tout point M situé à la distance r de l'axe du solénoïde.

Tracer les graphes de $B(r)$ et de $A(r)$.

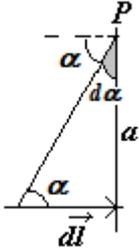


Correction

Exercice1.

- 1) Un élément de courant \vec{dl} du segment MN crée au point P un champ d'induction élémentaire :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\alpha$$



Tous les \vec{dB} créés par les éléments de MN ont même sens et même direction perpendiculaire au plan (\vec{dl}, \vec{r}) (i. e. suivant \vec{e}_θ) :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\theta$$

- 2) Le champ magnétique total créé par le tronçon MN est :

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\alpha,$$

On a d'autre part : $\sin\alpha = \frac{a}{r}$, d'où :

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\cos\alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

soit : $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$. Finalement : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \vec{e}_\theta$.

- 3) Dans le cas où le segment MN est de longueur infinie, on a :

$$\alpha_1 \rightarrow 0 \text{ et } \alpha_2 \rightarrow \pi \Rightarrow B \rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.$$

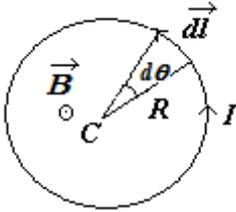
Soit : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{e}_\theta$.

Remarque : ce résultat peut être obtenu par le théorème d'Ampère.

Exercice2.

1) Un élément de courant \vec{dl} de la spire MN crée au centre C un champ d'induction élémentaire :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta.$$



Tous les \vec{dB} créés par les éléments de la spire ont même sens et même direction perpendiculaire au plan de la spire (*i.e.* suivant \vec{e}_z). Le champ magnétique total créé en C est :

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta \vec{e}_z, \text{ ou encore : } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z.$$

2) Considérons maintenant un point P situé sur l'axe Cz de la spire.

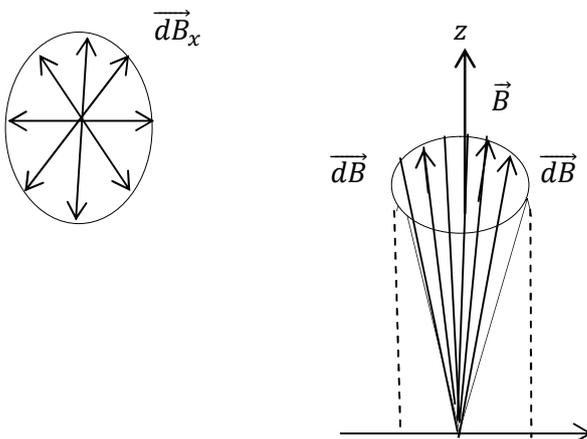
Par raison de symétrie, le champ magnétique total créé par la spire est porté par l'axe Cz .

En effet un élément de courant \vec{dl} de la spire crée au point P un champ d'induction élémentaire \vec{dB} : perpendiculaire à \vec{r} et à \vec{dl} , donc situé dans le plan (OCP) (Fig1).

On pose : $\vec{OP} = \vec{r}$ et $\varphi = (\vec{CP}, \vec{PO})$.

La loi de Biot et Savard s'écrit $\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$, soit en module : $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$, puisque $(\vec{dl}, \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$.

Les composantes de \vec{dB} sur le plan horizontal s'annulent à deux à deux :



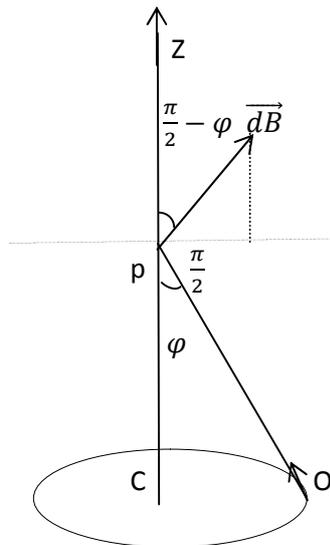
La contribution des composantes verticales dB_z au champ total est :

$$dB_z = dB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = dB \sin\varphi.$$

$$\text{Finalement, } B = \oint dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\varphi \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\varphi (2\pi R) = \frac{\mu_0 I}{2r^2} R \sin\varphi.$$

$$\text{Or : } r = \frac{R}{\sin\varphi} \Rightarrow r = \frac{R}{\sin\varphi} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\varphi \text{ ou encore :}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\varphi \vec{e}_z.$$



Exercice3.

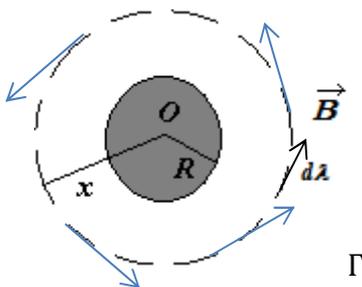
1) Le système possède une symétrie de révolution : toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de la distance à l'axe Oz. On distingue deux cas :

1^{er} cas :

Soit (Γ) un contour fermé, de rayon $x > R$, entourant le cylindre. Le théorème d'Ampère appliqué à (Γ) donne :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\lambda} = \mu_0 I.$$

$$\text{Or } \vec{B} // \vec{d\lambda} \text{ et de même sens, donc : } \oint \vec{B} \cdot \vec{d\lambda} = \oint B \cdot d\lambda.$$



Par ailleurs, B est uniforme sur, d'où

$$\oint B \cdot d\lambda = \oint B \cdot d\lambda = B \cdot 2\pi x \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

Ce champ étant orthoradial, il s'en suit : $\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} \vec{e}_\theta$.

(Fonction hyperbolique de la distance à l'axe).

Remarque : On retrouve la même expression du champ que celui créé par un fil.

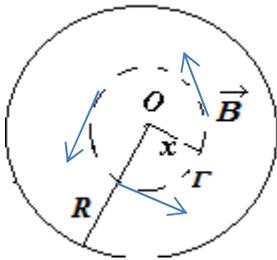
2^{ème} cas :

(Γ) est maintenant un contour fermé à l'intérieur du cylindre (rayon $x < R$) ; on a comme précédemment : $\oint B \cdot d\lambda = B \cdot 2\pi x$.

Soit maintenant I' le courant traversant (Γ) . L'intensité traversant toute la section droite du cylindre s'écrit :

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{n} dS, \text{ et } \vec{j} // \vec{n} \text{ et de même sens, d'où : } I = \iint j dS \text{ et } j \text{ est uniforme, donc}$$

$$I = j \iint dS = j\pi R^2,$$



$$\text{de même } I' = j\pi x^2 \Rightarrow I' = I \frac{x^2}{R^2}, \text{ d'où : } B \cdot 2\pi x = \mu_0 I' = \mu_0 I \frac{x^2}{R^2},$$

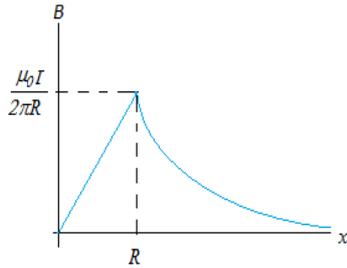
$$\text{soit : } \vec{B} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta.$$

(Fonction linéaire de la distance à l'axe).

Graphes :

B est une fonction continue de x , en $x=R$:

$$x \rightarrow R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (x < R \text{ et } x > R).$$



Exercice4. Solénoïde infini

1) A l'intérieur : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$.

A l'extérieur : $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

2) Calculons le potentiel vecteur $\vec{A}(r)$ en tout point M situé à la distance r de l'axe du solénoïde.

Le potentiel vecteur s'écrit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \vec{dl}}{r},$$

\vec{dl} étant orthoradial $\Rightarrow \vec{A}$ est aussi orthoradial.

Par ailleurs, la symétrie de révolution du système $\Rightarrow \vec{A}$ ne dépend que de r (distance à l'axe).

De plus, puisque $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, on a : $\iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \oint \vec{A} \cdot \vec{d\lambda}$ (Théorème de Stokes).

A l'extérieur du solénoïde : $r > R$

$\iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \oint \vec{A} \cdot \vec{d\lambda} = \iint B dS$ puisque $\vec{B} // \vec{n}$ et de même sens, et comme B est uniforme, on obtient :

$$\iint B dS = B \iint dS = B \pi R^2.$$

D'autre part, pour des raisons analogues, on a : $\oint \vec{A} \cdot \vec{d\lambda} = A \oint d\lambda = A(2\pi r)$,

$$\Rightarrow A(r) = \frac{BR^2}{2r}$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{ext}(r) = \frac{\mu_0 n R^2}{2r} \vec{e}_\theta$$

A l'intérieur du solénoïde : $r < R$

Un calcul similaire donne dans ce cas : $B\pi r^2 = A(2\pi r) \Rightarrow \vec{A}_{int}(r) = \frac{\mu_0 n r}{2} \vec{e}_\theta$.

Traçons les graphes de $B(r)$ et $A(r)$:

