

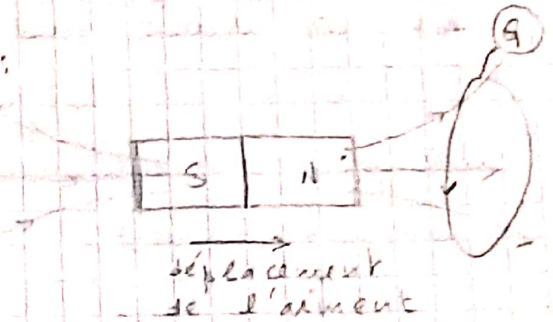
CH V : INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

1. Etude expérimentale :

1. Expériences fondamentales :

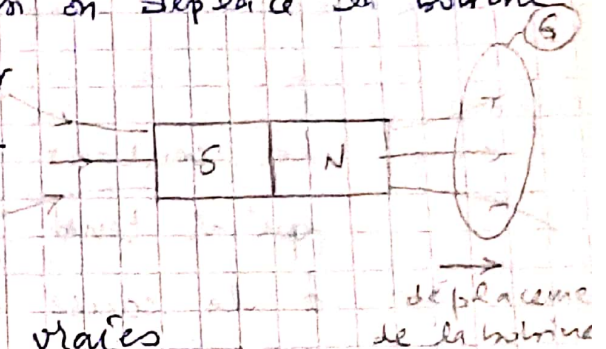
Expérience 1 : une bobine reliée à un galvanomètre.

On approche l'un des pôles de l'aimant à l'une des faces de la bobine $\rightarrow$ apparition d'un courant alors qu'il n'y a pas de générateur.



Expérience 2 :

Ce phénomène s'observe aussi si on déplace la bobine dans le champ magnétique indépendant du temps induit par l'aimant maintenue fixe.



Les expériences (1) et (2) restent vraies si on (déplace) remplace l'aimant par un solénoïde.

2. Interprétation :

Les expériences précédentes indiquent un pt commun le flux d'induction magnétique traversant la bobine varie au cours du temps (au flux initial s'ajoute un flux induit d'où la variation).

La bobine + Galvanomètre est un circuit fermé traversé par un courant induit.

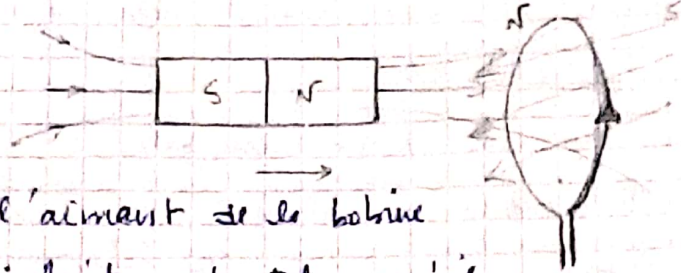
De la bobine, naissance d'une force électromotrice électromagnétique induite (f.e.m.)

L'apparition d'un ^{courant} circuit induit (ou d'une f.e.m. induite) constitue le phénomène électromagnétique (e.m.)

le courant traversant la bobine est le courant induit, la bobine est le circuit induit, et l'aimant (ou le solénoïde) est le circuit inducteur.

3 - Loi de LENZ

Elle précise le sens du courant induit

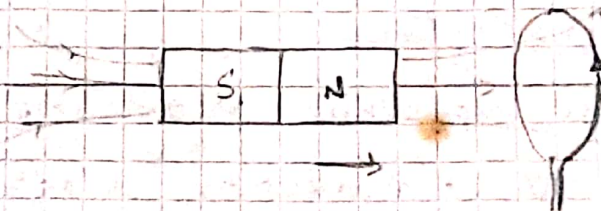


On appelle approche l'aimant de la bobine le sens du courant induit est tel qu'il fait apparaître face au pôle Nord de l'aimant une face Nord de la bobine, le courant induit crée alors un chp magt induit $\vec{B}_i$

Énoncé de la loi de LENZ :

Le courant induit est de sens tel qu'il tend par ses effets à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance

soit l'expérience précédente :



• On approche l'aimant

→ la bobine fait apparaître une face Nord qui s'oppose au pôle Nord de l'aimant.

• Si on retire l'aimant,

← le courant induit fait apparaître face au pôle Nord une face sud de la bobine s'opposant ainsi au retrait de l'aimant

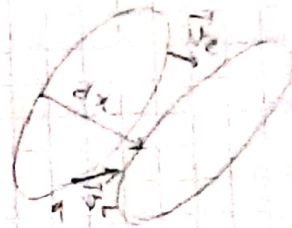
II. Étude Théorique

1. Circuit mobile de un chp magn indépendant du temps.

Champ électromoteur :

Soit un circuit filiforme (C)

placé dans un chp magn
indépendant du temps



Soit une charge q du circuit
d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un repère galiléen.

Elle est soumise à une force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{or} \quad \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$\vec{v}_r$: vitesse par rapport à un repère lié au circuit

$\vec{v}_e$: vitesse d'entraînement (déplacement du circuit)

On pose $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = (\vec{v}_e + \vec{v}_r) \wedge \vec{B}$: chp électromoteur

la relation s'écrit : $\vec{F} = q \vec{E}_m$

La circulation le long du circuit (C) s'écrit

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{v}_r \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} + \oint_C (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{or } d\vec{\ell} = \vec{v}_r dt \Rightarrow \oint_C (\vec{v}_r \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{v}_e \wedge d\vec{\ell}) \cdot \vec{B}$$

$$\vec{v}_e \wedge d\vec{\ell} = \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge d\vec{\ell} = \frac{1}{dt} (d\vec{x} \wedge d\vec{\ell}) = \frac{d^2\vec{s}}{dt}$$

$$\text{donc : } \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = - \oint_C \frac{d^2\vec{s}}{dt} \cdot \vec{B} = - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot d^2\vec{s}$$

en effet, le flux coupé :

$$d^2\phi_c = \vec{B} \cdot d^2\vec{s} \Rightarrow d\phi_c = \oint_C \vec{B} \cdot d^2\vec{s}$$

En définitif :

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\phi_c}{dt}$$

Par définition,

on appelle force électromotrice d'induction :

$$e = - \frac{d\phi_c}{dt}$$

$\vec{B}$ étant à flux conservatif, donc $d\phi_c$ est la variation du flux à travers le circuit (C) lors de son mouvement.

On écrit donc, d'une façon générale

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{car } d\phi = d\phi_c) \text{ conservatif}$$

2) Lois de FARADAY :

Un circuit fermé traversé par un flux magnétique variable est le siège d'une f.e.m. d'induction.

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Le signe (-) traduit la loi de LENZ.

3. Chp électromoteur :

Equation de Maxwell-Faraday :

$$\text{Faraday} \rightarrow e = - \frac{d\phi}{dt} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$- \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \qquad \iint_S \text{rot } \vec{E}_m \cdot d\vec{S}$$

S surface s'appuyant sur C

+ Si le circuit est mobile, $\vec{B}$ ne dépend pas du temps :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

+ Si le circuit est fixe, $\vec{B}$ dépend du temps :

$$- \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{E}_m \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Leibnitz} \rightarrow - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{E}_m \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned}
 - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E}_m \cdot d\vec{S} \\
 \Rightarrow - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \vec{E}_m \\
 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}_m &= - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}) = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left(- \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\
 \Rightarrow \text{D'où} \quad \boxed{\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}
 \end{aligned}$$

* Si les 2 phénomènes coexistent : circuit mobile dans un chp magnétique dépendant du temps, le chp électromoteur sera évidemment :

$$\vec{E}_m = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\substack{\text{du au mot} \\ \text{du circuit}}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{du à } \vec{B} \text{ variable}$$

* Si en plus de ces deux phénomènes, règne dans la région de l'espace considéré un chp électrostatique $\vec{E}_s$ dérivant d'un potentiel v : $\vec{E}_s = - \text{grad } v$

une charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ / repère galiléen sera soumise à une force totale :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= q (\vec{E}_s + \vec{E}_m) \\
 \text{soit} \quad \vec{F} &= q \left(\underbrace{- \text{grad } v}_{\vec{E}_s} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}}_{\vec{E}_m} \right)
 \end{aligned}$$

c'est la force de Lorentz s'exerçant sur une charge q placée dans un chp électrostatique $\vec{E}$ et un chp magnétique $\vec{B}$ et animée d'une vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec $\vec{E} = - \text{grad } v - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$: chp électrostatique total

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (- \text{grad } v) + \vec{\nabla} \times \left(- \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\
 &= \underbrace{- \vec{\nabla} \times (\text{grad } v)}_0 - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

finalement :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Relation de
Maxwell-Faraday

4) Quantité d'électricité induite :

soit un circuit (c) de résistance R ,

soit i le courant induit à un instant t

loi d'Ohm : $i = \frac{e}{R}$ ^{f.e.m} $= - \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$

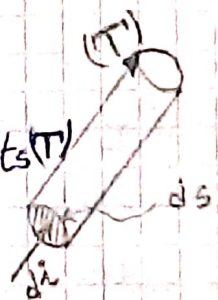
la quantité induite entre deux instants t_1 et t_2
est :

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = - \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\phi = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R}$$

3) ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE DANS LE CIRCUITS NON FILIFORMES :

Considérons maintenant le cas de courants volumiques. On décompose ceux-ci en tubes de courants (T) parcourus par des intensités di et traversés par des flux ϕ .



L'énergie e-m emmagasinée ds le tube s'écrit :

$$dw = \frac{1}{2} \phi di$$

soit $w = \frac{1}{2} \iint \phi di$ (pour une distribution continue de courants)

or $di = \vec{j} \cdot \vec{ds}$ et $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \oint_{\pi} \vec{A} \cdot \vec{dl}$

$\rightarrow \phi di = \frac{1}{2} \oint_{\pi} \vec{A} \cdot \vec{dl} \cdot (\vec{j} \cdot \vec{ds})$; $\vec{dl}$ et $\vec{j}$ colinéaires

$$\rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{j} \left(\underbrace{\vec{j}_E \cdot \vec{j}_S}_{d\sigma} \right)$$

soit :

$$w = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{j} d\sigma$$

l'intégrale étant étendue au volume total V parcouru par les courants.

4) DENSITÉ VOLUMIQUE D'ÉNERGIE E-M :

Forme locale du th d'Ampère (ou th Maxwell-ampère)

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{donc } w = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \frac{\vec{\text{rot}} \vec{B}}{\mu_0} d\sigma$$

$$\text{or } \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V (\vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} - \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B})) d\sigma$$

$$\text{soit } w = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V (\vec{B}^2 - \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B})) d\sigma$$

Considérons une sphère (Σ) contenant en son intérieur tous les circuits, on a :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \vec{B}^2 d\sigma - \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) d\sigma \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \vec{B}^2 d\sigma - \frac{1}{2\mu_0} \int_{S(\Sigma)} \vec{A} \wedge \vec{B} dS_{\Sigma} \end{aligned}$$

↓ Green-Ostrogradski

S_{Σ} étant la surface de la sphère.

on fait tendre le rayon de la surface de la sphère vers l'infini :

$$A \rightarrow 0 \quad (\text{en } \frac{1}{r})$$

$$B \rightarrow 0 \quad (\text{en } \frac{1}{r^2})$$

$$dS_{\Sigma} \rightarrow \infty \quad (\text{en } r^2)$$

la densité volumique de l'énergie e-m sera donc :

$$\frac{dw}{d\sigma} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\mu_0} \int_{S_{\Sigma}} \underbrace{\vec{A} \wedge \vec{B}}_{\text{en } \frac{1}{r^3}} dS_{\Sigma} \rightarrow 0$$

A la limite, on a :

$$w = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace}} B^2 d\sigma$$

ONDES ELECTROMAGNETIQUES

DANS LE VIDE .

EQUATIONS DE MAXWELL .

1. EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE :

C'est l'ensemble des quatre relations :

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} , \\ (2) \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0 , \\ (3) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \\ (4) \quad \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) . \end{aligned}$$

(1) traduit localement le th. de GAUSS .

(2) traduit la conservation du flux magn.

(3) traduit les phénomènes d'induction e-m. Elle est dite relation de Maxwell-Faraday .

a) Le th d'Ampère, écrit sous la forme (E) est la relation de Maxwell-Ampère , (généralisation de $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$)

ρ : étant la densité volumique totale de ttes les charges , et $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant total pour tous les courants . (autres que les courants de déplacement)
 $\vec{E} = \vec{V} \wedge \vec{B} - \vec{j} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{V} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Si on se place dans le cas où il n'y a ni charges ni courants les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

II. EQUATIONS DE PROPAGATION : *milieu homogène et isotrope*

1. Eq DE PROPAGATION POUR LE CHAMP ELECTRIQUE :

On montre que : $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} = \text{grad div} - \Delta$

$$\text{Donc : } \vec{\text{rot}} \underbrace{\vec{\text{rot}} \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} = \text{grad div} \underbrace{\vec{E}}_0 - \Delta \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E}$$

$$\vec{\text{rot}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\vec{\text{rot}} \vec{B}}_{\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \right) = -\Delta \vec{E} \Rightarrow -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{E}$$

ou encore $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

2. Eq DE PROPAGATION DU CHAMP MAGNETIQUE :

par un calcul analogue, on montre que :

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \vec{\text{rot}} \underbrace{\vec{\text{rot}} \vec{B}}_{\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = \text{grad div} \underbrace{\vec{B}}_0 - \Delta \vec{B}$$

3. INVARIANCE DE JAUGE :

la relation $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ admet une infinité de solutions

de la forme $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$ *puisque* $\vec{\text{rot}} \text{grad} = 0$

puisque $\vec{\text{rot}} \text{grad} = 0$, φ étant f^{te} scalaire et $\vec{A}$ une solⁿ particulière.

Par ailleurs, changer $\vec{A}$ en $\vec{A}'$ suppose de changer V en V' de façon que la relation :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{soit vérifiée par les couples } (\vec{A}, V) \text{ et } (\vec{A}', V') :$$

$$\begin{aligned} -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\text{grad } V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ &= -\text{grad } V' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$$

Donc si on change $\vec{A}$ en $\vec{A}'$, il faut changer

V en $V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ = Invariance de Jauge.

On montre que :

$$\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

4. Eqs DE PROPAGATION POUR LES POTENTIELS : PARTICULES

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\text{or } \text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \left(\text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

et, compte tenu de la jauge de Lorentz :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\text{div} \vec{A}}{\epsilon_0 \mu_0} \quad : \text{ jauge de Lorentz}$$

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \left(\text{grad} \left(-\frac{\text{div} \vec{A}}{\epsilon_0 \mu_0} \right) + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\text{soit : } \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

finalement

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

de même ,

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

On aboutit donc à des eqs de m type $\mu \vec{E}, \vec{B}, \vec{A}$ et V
 Ces eqs montrent que $\epsilon_0 \mu_0$ a les dimensions d'une
 vitesse au carré :

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

De sorte que les eqs de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ \Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{array} \right. , \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

On appelle l'Alembertien l'opérateur :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \square \vec{E} = 0, \square \vec{B} = 0, \square \vec{A} = 0 \text{ et } \square V = 0$$

l'ensemble des vecteurs $(\vec{E}, \vec{B})$ est dit : Onde électromagnétique

III. ONDE PLANE

L'onde électromagnétique est dite plane si $\vec{E}$ (et $\vec{B}$) ne dépend que d'une seule coord., = par ex. z .
L'éq de propagation s'écrit ds ce cas :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

La solⁿ la plus générale de cette équation est de la forme

$$\vec{E} = \vec{a} \left(t - \frac{z}{c} \right) + \vec{b} \left(t + \frac{z}{c} \right)$$

où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vect. (fct de $t - \frac{z}{c}$ et $t + \frac{z}{c}$)

onde se propageant
ds le sens des z ↑
onde progressive

onde se propageant
ds le sens des z ↓
onde réfléchie

pour les ondes lumineuses, $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s

ds S.I : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$

IV. ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE

Soit l'onde progressive $\vec{a} \left(t - \frac{z}{c} \right)$. Elle est dite monochromatique si $\vec{a}$ peut s'écrire :

$$\vec{a} \left(t - \frac{z}{c} \right) = \vec{E}_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

En négligeant l'onde réfléchie.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z}$ (en effet $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$: indép^{de} de x, y)
 $\text{curl } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = 0$ (de nulle par convention)

On montre de la même manière que : $B_z = 0$

$\Rightarrow \vec{E}$ et $\vec{B}$ situés ds un plan $\perp$ à l'axe Oz

$\Rightarrow$ plan d'onde. ($\vec{E} \perp \vec{B}$)

Or que $E_z = B_z = 0$, la relation $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

implique :

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\vec{E}_x, E_y e^{-i\frac{\omega}{c}z} \dots \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_x e^{i\omega t} \\ \vec{E}_y e^{i\omega t} \end{cases} \quad \text{indépend de } z$$

En utilisant la notation complexe ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant les amplitudes complexes) :

$$\begin{cases} -j \frac{\omega}{c} \vec{E}_y = -j \omega \vec{B}_x \\ -j \frac{\omega}{c} \vec{E}_x = -j \omega \vec{B}_y \end{cases} \quad \text{soit} \quad \frac{\vec{E}_y}{\vec{E}_x} = - \frac{\vec{B}_x}{\vec{B}_y}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_x \vec{B}_x + \vec{E}_y \vec{B}_y \stackrel{(*)}{=} 0 : \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont } \perp$$

soit en module $\vec{E}_x \vec{B}_x + \vec{E}_y \vec{B}_y = 0 \Rightarrow$ à t instant et en t pt
(produit $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$)

V. ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE POLARISEE ;

RECTILIGNEMENT :

Il s'agit d'une onde plane monochromatique tq $\vec{E}$ et $\vec{B}$ gardent la m direction à t instant en t pt
Supposons que $\vec{E}$ soit tj $\parallel$ à Ox

$$\rightarrow \vec{E}_y = 0 \quad \text{et donc} \quad \vec{B}_x = 0 \quad (\text{car } *)$$

$$\text{la relation : } -j \frac{\omega}{c} \vec{E}_x = -j \omega \vec{B}_y$$

$$\vec{E}_x = c \vec{B}_y$$

$\Rightarrow \vec{E}_x$ et $\vec{B}_y$ sont en phase et que

leurs modules sont tq : $\vec{E}_x = c \vec{B}_y$

$$\vec{E} = \vec{E}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_y \quad \vec{E} \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{B} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{e}_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

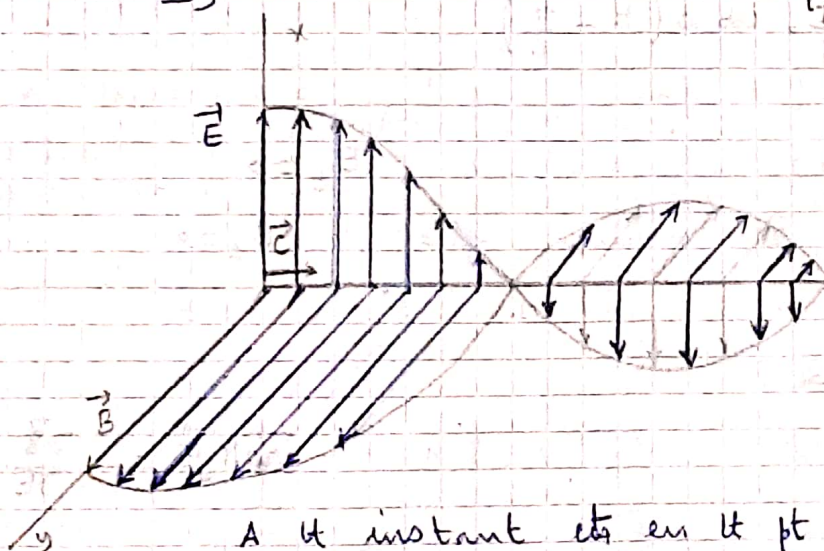
$\Rightarrow \vec{E}$ et $\vec{B}$ vibrent en phase, $E = cB$

de ce qui précède :

$$\vec{E} \wedge \vec{B} = cB^2 \vec{e}_z$$

$\vec{e}_z$: direct- de propagation

on pose : $c\vec{e}_z = \vec{c}$



A t instant et en t pt de Oz , $\vec{E}$ et $\vec{B}$ on
ette allure. $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{c})$ est un trièdre direct.

la direction du clip $\vec{E}$ est dite direction de polarisation (i.e.)

ici Ox : c'est la direction de polarisation ds ce cas

le plan $\perp$ à $\vec{E}$ est dit plan de polarisation (ici oyz)
 $\vec{E}$: direct. de polarisat., $\vec{B}, \vec{C}$: plan de polarisat.

VI. PROPAGATION DE L'ENERGIE :

On appelle vecteur de POYNTING le vecteur :

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) : \text{vecteur de POYNTING.}$$

Le vecteur est colinéaire à la direction de propagation oz et a le sens de celle-ci :

$$\|\vec{P}\| = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} = \epsilon_0 c E^2 \quad (*)$$

$$E = cB \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \frac{cB^2}{\mu_0} = \epsilon_0 c^3 B^2. \quad E = cB, \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

L'énergie potentiel électrostat. d'une distribution volumique de charges est donnée par :

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho v dv \quad \uparrow \text{potentiel.}$$

$$E_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot v dv$$

$$\operatorname{div}(v \vec{E}) - \vec{E} \cdot \operatorname{grad} v$$

$$\text{soit } E_e = \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\iiint_V \operatorname{div}(v \vec{E}) dv}_{\iint_S v \cdot \vec{E} dS} + \iiint_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv$$

on fait tendre le rayon de S vers l' ∞

$$\Rightarrow E_e = \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv$$

$$\text{ou encore } \frac{dE_e}{dv} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

la densité volumique d'énergie élect. est :

$$\boxed{w_e = \frac{dw}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$$

de $\hat{m}$, la densité volumique d'énergie mag :

$$W_m = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Na que $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ ($E = cB = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow E^2 = \frac{B^2}{\epsilon_0 \mu_0}$)

la densité totale d'énergie e-m est :

$$W_t = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2$$

D'où $\vec{P} = c W_t \hat{z}$ d'après (*)

soit encore : $\vec{P} = W_t \cdot \vec{c}$

l'énergie (unitaire) électromagnétique se propage de la vide avec la même vitesse que les ondes.

Soit ϕ le flux de $\vec{P}$ à travers une surface S (base d'un cylindre d'axe oz et de hgt c)

est : $\phi = \vec{P} \cdot \vec{S} = P \cdot S$ soit $\phi = W_t c S = W$

soit W : Energie contenue ds le vide cylindre.

le flux du vecteur de Poynting à travers une surface (S) $\perp$ à la direction de propagation est égale à l'énergie contenue ds un cylindre de surface de base (S) de hauteur c (ie aussi la puissance rayonnée par l'onde)

VII - ONDE PLANE MONOCHROMATIQUE POLARISEE

ELLIPTIQUEMENT :

une onde plane monochromatique est dite polarisée elliptiquement si :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \\ E_y = E_{0y} \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \varphi \right\} \end{cases}$$

on élimine t entre E_x et E_y :

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2 \sin^2 \varphi} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2 \sin^2 \varphi} - \frac{2 E_x E_y \cos \varphi}{E_{0x} E_{0y} \sin^2 \varphi} = 1$$

$\vec{E}$ décrit une ellipse inscrite ds un rectangle de cotés $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$.

• Si $0 < \varphi < \pi$ l'ellipse est droite (sens + trigo)
 $\pi < \varphi < 2\pi$ " " gauche (sens trigo inverse)

• Si $\varphi = 0$, $\frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{0x}}{E_{0y}}$
 $\vec{E}$ garde une direct. cste : l'onde est alors polarisée rectilignement. Il en est de m[^] si $\varphi = \pi$

• Si $E_{0x} = E_{0y}$ et $\varphi = \pm \pi/2$
 $E_x^2 + E_y^2 = E_{0x}^2$ donc $\|\vec{E}\| = \text{cste}$

$\Rightarrow \vec{E}$ décrit donc un cercle.

L'onde est dite polarisée circulairement (droite ou gauche selon $\pm \pi/2$)

Finalement, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant $\perp$ à tt instant et en tt pt il le qui a été dit pour $\vec{E}$ est valable pour $\vec{B}$

VIII- LONGUEUR D'ONDE, VECTEUR D'ONDE :

Soit x l'une des composantes de $\vec{E}$, $\vec{B}$ ou $\vec{A}$
 onde plane monochromatique. Elle peut se mettre sous la forme : $x = x_0 \cos \omega (t - \frac{z}{c})$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$; T étant la période.

$$x = x_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{cT} \right) = x_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z \right)$$

ayant posé : $\lambda_0 = cT$: longueur d'onde ds le vide.

$\vec{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{z}$ est dit vecteur d'onde ds le vide
 $\vec{z}$ étant la direction de propagation.

la composante x s'écrit alors : $\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{z}$ direct. prop.

$x = x_0 \cos (\omega t - k_0 z)$
 $\downarrow k_0 z = \vec{k}_0 \cdot \vec{r}, \vec{r} = \vec{OM}$
 d'où : $x = x_0 \cos (\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})$

Enfin, $\vec{k}_0 = \frac{2\pi}{cT} \vec{u}$ or $\frac{2\pi}{T} = \omega$ pulsation de l'onde
 donc : $\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ direct. prop.

ONDES E-M DANS LES MILIEUX LINEAIRES

I- DEFINITIONS :

On appelle milieu linéaire, homogène, isotrope un milieu ne possédant pas de direction privilégiée pour ses propriétés.

Dans un tel milieu, une onde e-m est caractérisée par les vecteurs : $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$
vecteur induct élect. vect. excitation magn.

• $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; ϵ : permittivité absolue du milieu (F/m)
La permittivité relative étant $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ (ϵ_0 du vide)
 D s'exprime en C/m²

• $\vec{B} = \mu \vec{H}$; μ : permittivité magn absolue (H/m)
On déf. la perméabilité relative (vide) : $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$
 H s'exprime en A/m.

• $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ exprime la loi d'Ohm
conductivité.

REMARQUES :

* ϵ , μ et γ ne sont constants que si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ le sont.

* A part pr les mil. ferromagn, $\mu_r = 1$
 $\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

* Dans les diélectriques parfaits, $\gamma = 0 \Rightarrow \vec{j} = 0$

II- EQUATIONS DE MAXWELL :

Elles ont la même forme que ds le vide
(on change ϵ_0 en ϵ et μ_0 en μ).

$$\cdot \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \operatorname{div} \epsilon \vec{E} = \rho$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

$$\cdot \boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

$$\cdot \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

III - EQUATIONS DE PROPAGATION :

On considère un milieu sans charges volumiques ni courants de conduction : $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ eqs de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ m eqs que ds le vide (avec $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ et $\mu_0 \rightarrow \mu$)

De la m manière que ds le vide, on établit :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad v^2 = 1/\epsilon\mu : \text{ célérité de l'onde ds le milieu.}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Les sol^s de ces eqs sont similaires à celles trouvées pour le vide : $\vec{a}(t - \frac{z}{v}) + \vec{b}(t + \frac{z}{v})$.

Considérons l'onde progressive : $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \frac{z}{v})$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont $\perp$ entre eux et à la directⁿ de propaga.

Si l'onde est plane monochromatique polarisée rectilignement

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ en phase (} \vec{v} \text{ vitesse de phase) } \\ (\vec{E}, \vec{B}, \vec{v}) \text{ direct } \\ E = vB \end{cases}$$

les densités volumiques d'énergie élect et magn sont égales :

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2} \Rightarrow W_e = 2W$$

soit le vecteur de Poynting $\vec{P} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \wedge \vec{H}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = W_e \cdot \vec{v}}$$

IV- INDICE DE REFRACTION :

l'indice de refraction d'un milieu et par déf :

$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$

or $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ et $v = (\epsilon \mu)^{-1/2}$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

si le milieu est non ferromagnétique, $\mu_r \approx 1$

$$\Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\epsilon_r}}$$

La longueur d'onde est donnée par :

$$\lambda = vT = \frac{v}{c} \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{n}$$

le vecteur d'onde étant :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} = \frac{\omega}{v} \vec{u} = n \vec{k}_0$$

direct de propagat. vect. d'onde ds le vide

CONDITIONS DE PASSAGE A LA TRAVERSEE

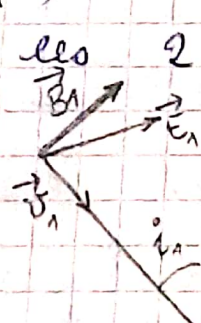
DE DEUX MILIEUX ISOLANTS : (non chargés)

et deux milieux diélectriques ($\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$)

fermés par (ϵ_1, μ_1) et (ϵ_2, μ_2) .

onde e-m se propage ds les 2 milieux

les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.



considérons le cylindre (C) de section ds et

le flux sortant de (C) est :

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 ds_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 ds_2 = 0 + B_{1t} ds_{lat1} + B_{2t} ds_{lat2}$$

On projette sur la normale à la surface de séparation ds : (de son sens que $\vec{n}_1$)

$$(B_{n1} - B_{n2}) ds = 0, \text{ soit :}$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

De $\vec{n}$, $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow$

$$D_{n1} = D_{n2}$$

En effet :

flux de $\vec{B}$ à travers la surface fermée du cylindre :

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Cylindre}} \vec{B} \cdot \vec{n} ds &= D_{n1} ds_1 - D_{n2} ds_2 + D_{t1} ds_{e1} + D_{t2} ds_{e2} \\ &\approx D_{n1} ds_1 - D_{n2} ds_2 \quad \text{ayant supposé } ds_e \ll ds \text{ (} h \ll \text{)} \\ &= (D_{n1} - D_{n2}) ds \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\iint_{\text{Cylindre}} \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \iiint_{\text{Cylindre}} \text{div } \vec{B} dV = 0$

d'où :

$$D_{n1} = D_{n2}$$

Les composantes normales de $\vec{B}$ et $\vec{D}$ sont continues à la traversée de la surface de séparation.

Remarque :

$$* D_{n1} = D_{n2} \not\Rightarrow E_{n1} = E_{n2}$$

$$\text{donc } * B_{n1} = B_{n2} \not\Rightarrow H_{n1} = H_{n2}$$

Car Pour les milieux diélectriques linéaires non homogènes isotropes ϵ est une matrice

En général, considérons un rectangle ^{contour}ulaire ACDF tel que :

AC et DF sont // à la surface de séparation et tq :

$$AF = CD = dx^2 \ll dl$$

La circulation de $\vec{E}$ sur ACDF est :

$$\oint_{ACDF} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_{t1} \cdot dl - \vec{E}_{t2} \cdot dl$$

on pose $d\vec{l} = \vec{e} \cdot dl$

$$[(\vec{E}_1 \cdot \vec{e}) - (\vec{E}_2 \cdot \vec{e})] dl \quad (\Rightarrow) \quad E_{t1} -$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_{t1} - E_{t2}) dl$$

$$\oint \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint B_{\perp} dl \right) \approx 0$$

soit

$$E_{t1} = E_{t2}$$

de la même manière on établit que :

$$H_{t1} = H_{t2}$$

En résumé : si $\vec{n}$ est le vecteur normale orienté de (2) vers (1), les conditions de passage à travers des deux milieux isolants sont :

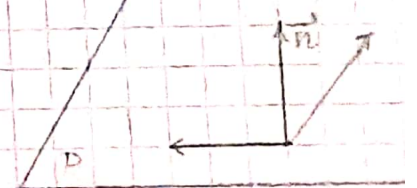


Induction	$\begin{cases} \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \end{cases}$
champs	$\begin{cases} \vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0} \\ \vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{0} \end{cases}$

VI. REFRACTION ET REFLEXION :

La réflexion et la réfraction peuvent être normales et obliques (/ à la surface de séparation) : / par rapport.

Soit P une surface plane séparant deux isolants isolant 1 (milieu diélectrique)



$$\boxed{\begin{aligned} E_{o2} &= \frac{2}{N_{21} + 1} E_{o1} \\ E_{o1}^r &= -\frac{N_{21} - 1}{N_{21} + 1} E_{o1} \end{aligned}}$$

si $N_{21} > 1$, alors E_{o1} et E_{o1}^r ont des signes contraires
 $\Rightarrow$ le champ élect. change de sens lors de la réflexion
 On appelle facteur de réflexion pour incidence normale :

$$R = \left(\frac{E_{o1}^r}{E_{o1}} \right)^2 = \left(\frac{N_{21} - 1}{N_{21} + 1} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

* INCIDENCE OBLIQUE :

A l'onde incidente du vecteur d'onde : $\vec{k}_1 = k_1 (\sin i_1 \vec{e}_x - \cos i_1 \vec{e}_y)$

correspond une onde réfléchie réfractée de vecteur d'onde :

$$\vec{k}_2 = k_2 (\sin i_2 \vec{e}_x - \cos i_2 \vec{e}_y)$$

et une onde réfléchie de vecteur

$$\text{d'onde : } \vec{k}_1^r = k_1^r (\sin i_1^r \vec{e}_x + \cos i_1^r \vec{e}_y)$$

Pour que la continuité des composantes

soit satisfaite, il faut que les champs aient la même phase à la surface de séparation ($y=0$).

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$$

$$r_s \in P \Rightarrow \vec{r}_s = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_s = \vec{k}_1^r \cdot \vec{r}_s = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_s$$

$$\Rightarrow k_1 \sin i_1 x = k_1^r \sin i_1^r x = k_2 \sin i_2 x$$

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_1^r = \frac{\omega}{v_1} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_1^r}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$



$$\boxed{i_1 = i_1^r}$$

loi de Descartes