جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم والتقنيات
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Parcours MIP_S4 / P146

Année universitaire 2019_20

TD 2 : Magnétostatique, Inductance.

Exercice 1

On considère un solénoïde infiniment long *(C)* contenant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I. Le champ magnétique à l'intérieur est axial, uniforme et vaut $B_0 = \mu_0 nI$.

1) En utilisant le théorème d'Ampère calculer le champ d'induction crée par ce solénoïde à l'intérieur et à l'extérieur.

2) Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(r)$ en tout point M situé à la distance r de l'axe du solénoïde.

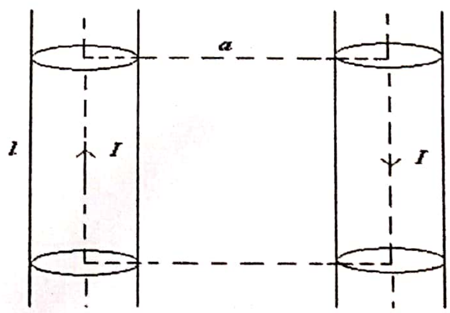
Tracer les graphes de $B(r)$ et de $A(r)$.

Exercice 2

Un circuit fermé est constitué de deux conducteurs cylindriques identiques de rayon R, parallèles, de longueur infinie et dont les axes sont à la distance a l'un de l'autre. On considère une portion de ce circuit limitée par le rectangle de longueur a et de largeur l (*figure*).

1) Calculer le flux magnétique total $\vec{B}$ à travers ce rectangle.

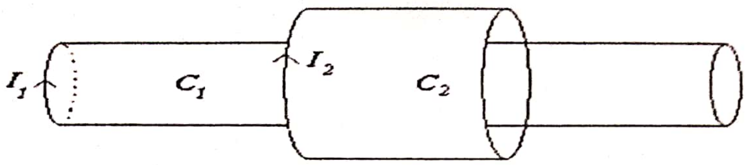
2) En déduire le coefficient d'auto-induction L.



Exercice 3

Un grand solénoïde (C_1) de section S_1 et contenant n_1 spires par unité de longueur est parcouru par un courant d'intensité I_1. Ce solénoïde est en présence d'une bobine coaxiale (C_2) comprenant N_2 spires, de section S_2 et parcourue par un courant d'intensité I_2.

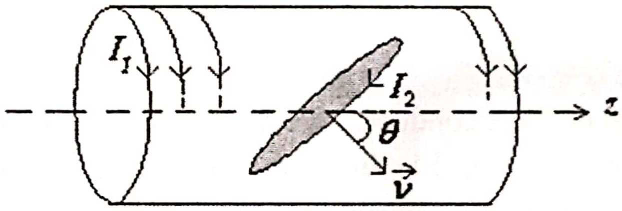
Calculer le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines et préciser son signe.

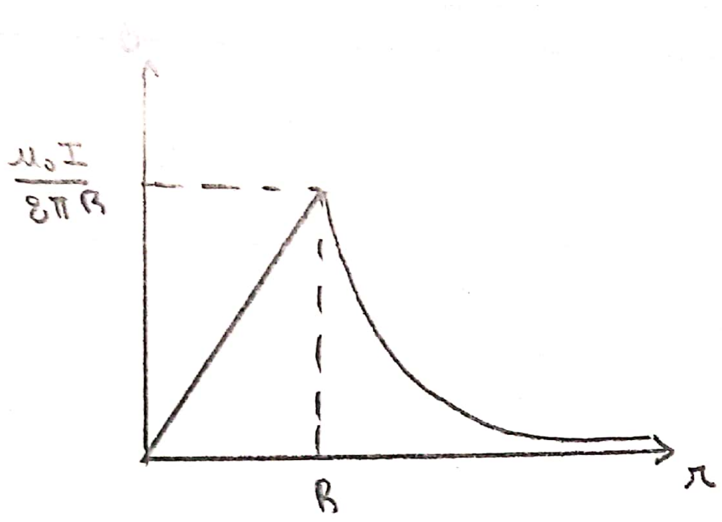


Exercice 4

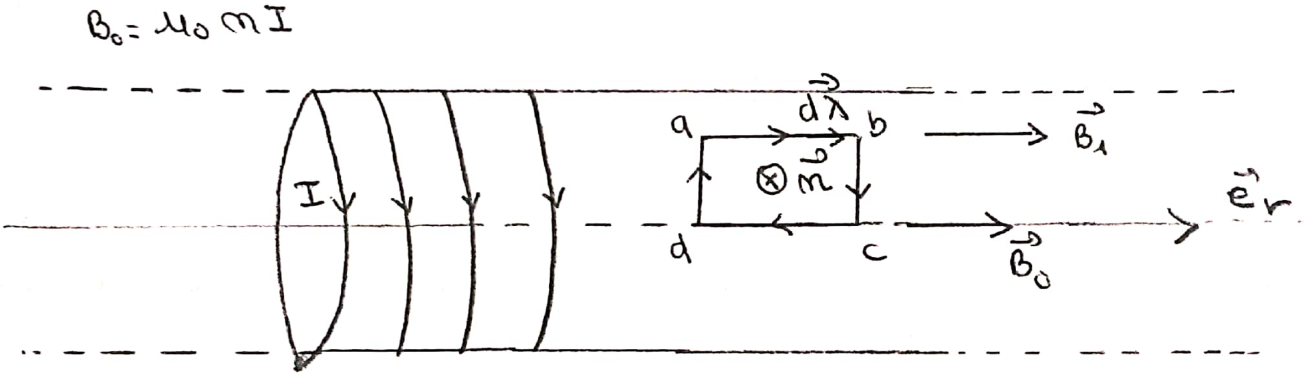
Un grand solénoïde (C_1) de section S_1 et contenant n_1 spires par unité de longueur est parcouru par un courant d'intensité I_1 . Ce solénoïde est en présence d'une spire (C_2), de section S_2 et parcourue par un courant d'intensité I_2 . L'axe de la spire porté par un vecteur $\vec{\nu}$ fait un angle θ avec l'axe de (C_1) (*figure*).

Calculer le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines et préciser son signe.





<u>Exercice 1</u> (Solénoïde infini)



1) En utilisant les éléments de symétrie du système, calculons le champ d'induction créé par ce solénoïde à l'intérieur et à l'extérieur

- <u>A l'intérieur</u>

D'après le théorème d'Ampère

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\vec{\lambda} = \mu_0 \sum I$$

Soit le contour rectangulaire abcd placé à l'intérieur du solénoïde (contour fictif : contour d'Ampère)

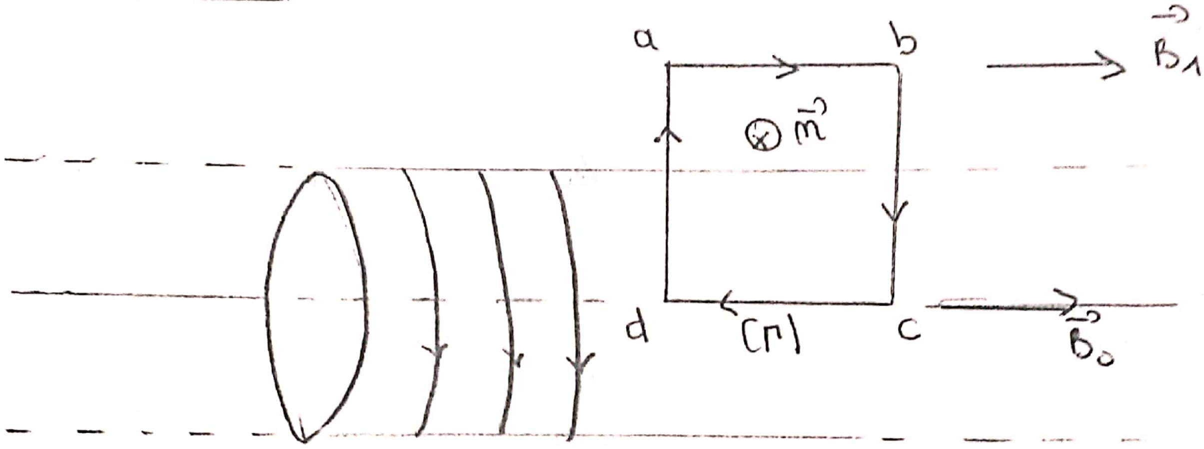
$$\int_{ab} \vec{B}.d\vec{\lambda} + \int_{bc} \vec{B}.d\vec{\lambda} + \int_{cd} \vec{B}.d\vec{\lambda} + \int_{da} \vec{B}.d\vec{\lambda} = \mu_0 \sum I$$

$$B_1\, ab + 0 - B_0\, cd + 0 = 0$$

car B dépend de la distance à l'axe
sur ab B est constante. Pareil pour dc
et on a ab = dc.

Donc $\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_r}$

• A l'extérieur



Montrons maintenant que le champ créé à l'extérieur du solénoïde est nul.
Soit abcd un contour fermé.
le même calcul que précédemment donne pour le 1er membre

$$B_1 ab - B_0 cd = \mu_0 \Sigma I$$

le nombre de spires traversant abcd est :

$$N = n \cdot l = n(ab)$$

ie: abcd est traversé par $-n(ab)I$
(le signe - : car les courant sont de sens opposé à $\vec{n}$)

$\Rightarrow B_1 ab - B_0 cd = -\mu_0 n(ab) I$

$\Rightarrow B_1 - \mu_0 n I = -\mu_0 n I$

$\Rightarrow B_1 = 0$

Soit : $\boxed{\vec{B}_1 = \vec{0}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

Scanned by CamScanner

Déterminer le potentiel vecteur A(r) en tout point situé à la distance r de l'axe du solénoïde

Le potentiel vecteur s'écrit :

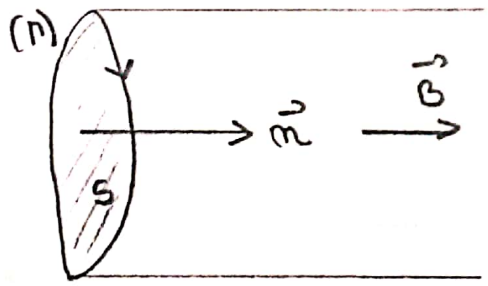
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(\Gamma)} I \cdot \frac{\vec{dl}}{r}$$

$\vec{dl}$ étant orthoradial, on a $\vec{A}$ aussi qui est orthoradial

Par ailleurs, la symétrie de révolution implique que $\vec{A}$ ne dépend que de r (distance à l'axe).

De plus on a :

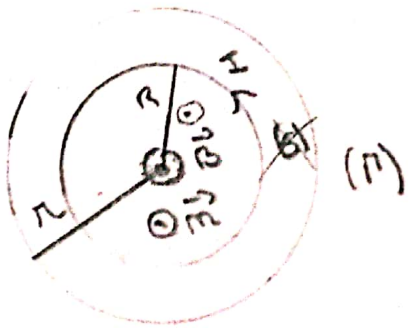
$$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{(\Gamma)} \vec{A}\, \vec{dl} \quad \text{car} \quad \vec{B} = \vec{rot}\, \vec{A}$$



A l'extérieur du solénoïde : $r > R$

$$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{(\Gamma)} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint_{(S)} B\, dS$$

or : $\vec{B} \parallel \vec{n}$ et de même sens



B est uniforme

$$\iint_{(S)} B\, dS = B \iint dS = B\pi R^2 = A\, 2\pi r \Rightarrow A(r) = \frac{BR^2}{2r}$$

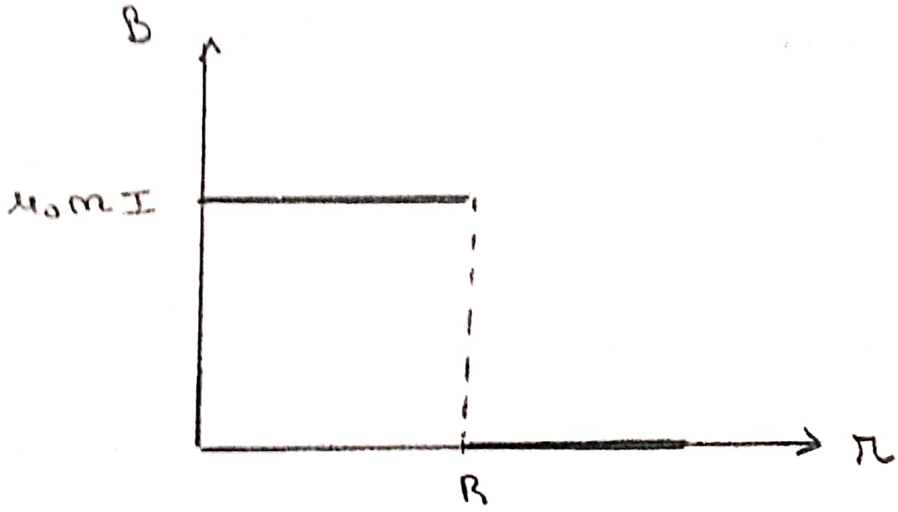
$$\boxed{\vec{A}_{ext}(r) = \frac{\mu_0 n I}{2r} R^2 \vec{e}_\theta}$$

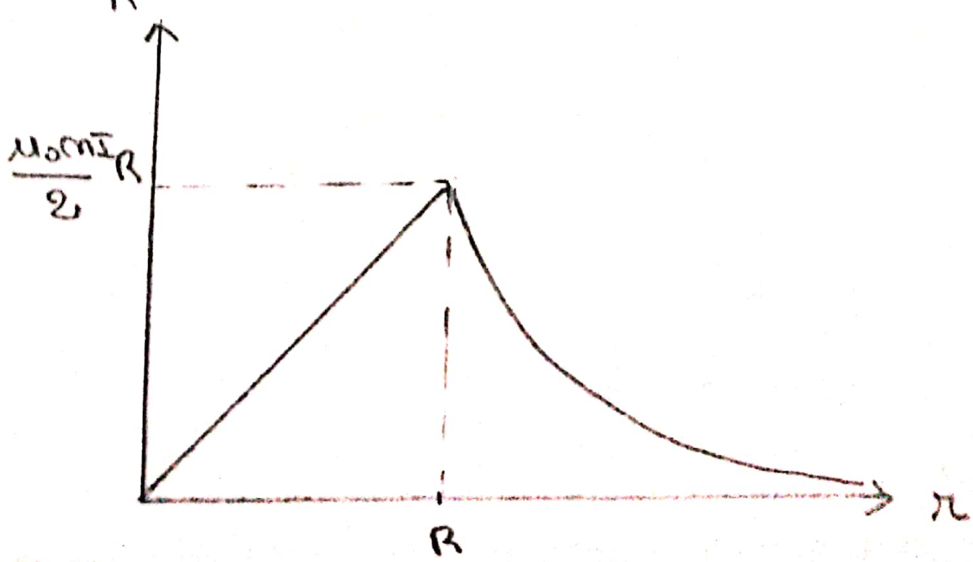
Pour $r < R$, le même calcul donne

$$B \pi r^2 = A \, 2\pi r$$

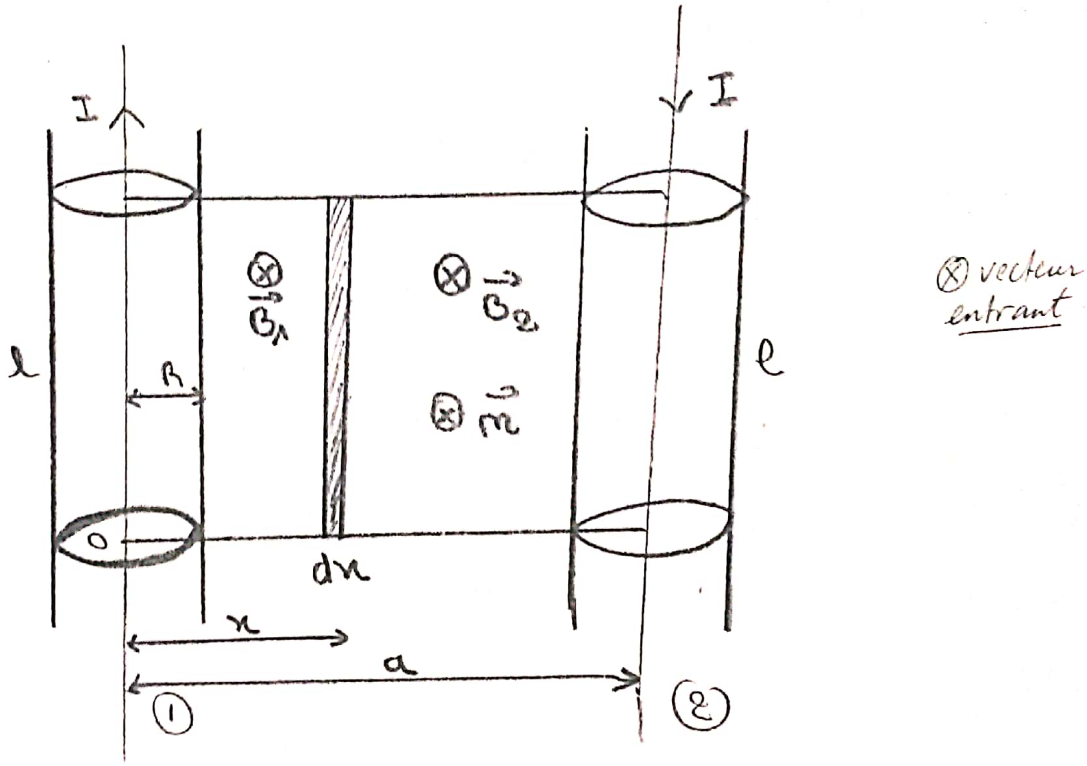
$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(r) = \frac{\mu_0 n I}{2} r \, \vec{e}_\theta}$$

Traçons les graphes de $B(r)$ et de $A(r)$.





Exercice 1



On a $\vec{n}$ ⊥ au plan, mais son sens est arbitraire (selon l'exercice)

le champ total en n'importe quel point du circuit ne varie pas.

Mais B_1 et B_2 varient

On a $B = B_1 + B_2$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}$$

les courants étant de sens inverse, les champs magnétiques créés ont dans la région du circuit le même sens et la même direction. Par raison de symétrie, le flux total Φ_{tot} est égal à 2 fois l'un des deux flux (ϕ_1 ou ϕ_2)

Calcul de Φ_1

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{B_1} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \text{(par def. du flux magnétique)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_1 = \iint_{(S)} B_1 \, dS$$

Soit une tranche dx du circuit, situé à la distance x de l'axe de (1)

$$\Phi_1 = \iint_S B_1 \, dS = \int_0^a B_1 \, l \, dx$$

car $dS = dx\,dy$ et $\int dy = l$

On distingue deux regions d'intégration $0 \leq x \leq R$ et $R \leq x \leq a$

- Pour $0 \leq x \leq R$ $\qquad B_1 = \dfrac{\mu_0 I x}{2\pi R^2}$

$$\Phi_{1 0R} = \int_0^R \frac{\mu_0 I x}{2\pi R^2} \, l \, dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \, l \cdot \frac{R^2}{2}$$

$$\boxed{\Phi_{1 0R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \, l}$$

- Pour $R \leq x \leq a$ $\qquad B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

$$\Phi_{1Ra} = \int_R^a \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \, l \, dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \, l \ln\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$\Phi_{1Ra} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{R}\right)$$

finalement

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} l + \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{a}{R}\right)\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\boxed{\phi_{tot} = \frac{\mu_0 I}{\pi} l \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{a}{R}\right)\right)}$$

2) Déduisons-en le coefficient d'auto-induction L.

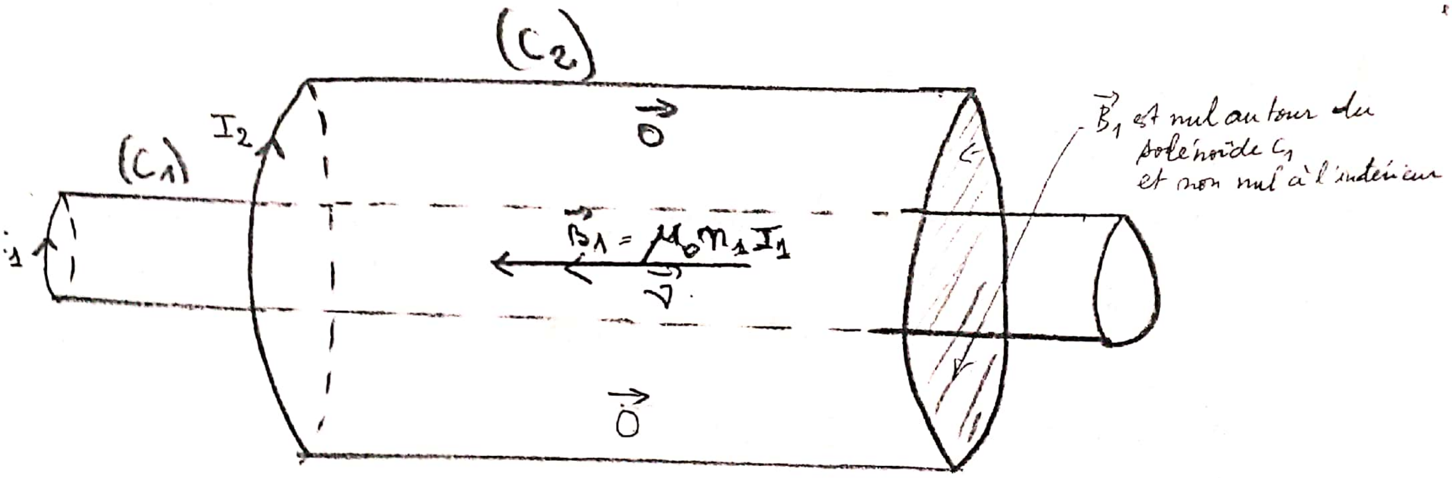
$$\phi = LI \Rightarrow L = \frac{\phi}{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{a}{R}\right)\right)}$$

L est aussi appelé inductance propre ; dépend des caractéristiques géom. du circuit ainsi que du milieu. tjrs > 0, s'exprime en Henry.

Exercice 3.

• Calculons le coefficient d'induction mutuelle. M



$B_1 = \mu_0 n_1 I_1$ (grand solénoïde)

$\vec{B}_1$ (champ uniforme)

$$B_2 = \frac{\mu_0 n_2 I_2}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \quad ???$$

ϕ_{12} est le flux praticable ?? car B_1 est uniforme

$$\phi_{12} = N_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1 \vec{\nu}\, dS \qquad N_2 \overset{?}{=} n_2$$

Pour calculer M, on calcule ϕ_{12} ou ϕ_{21}.

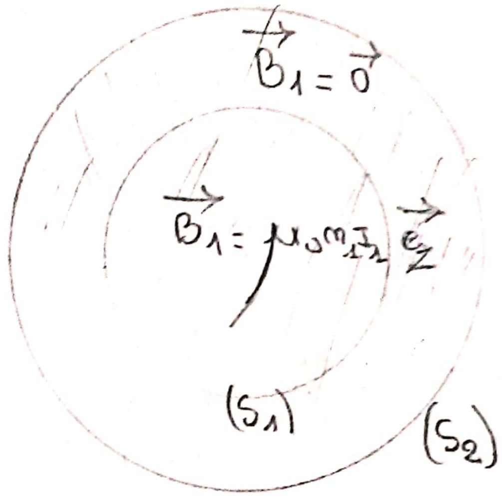
On appelle flux praticable, le flux

$$\phi_{12} = N_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1 . \vec{\nu}\, dS$$

le choix de la normale $\vec{\nu}$ est donné par la règle du tire-bouchon (on suit la direction de I pour le sens)

On a : $\Phi_{12} = N_2 \iint_{S_2} \vec{B_1} \cdot \vec{\nu} \, dS = N_2 \iint_{S_2} B_1 dS = N_2 B_1 S_2$

Car B_1 est uniforme



⚠ Mais le champ B_1 est nul dans la partie annulaire. (?)

la partie utile ici étant S_1 d'où : (on élimine la surface de l'anneau où $B_1 = 0$)

$$\Phi_{12} = N_2 B_1 S_1 = N_2 \mu_0 m_1 I_1 S_1.$$

$$\boxed{\Phi_{12} = N_2 \mu_0 m_1 I_1 S_1}$$

le coefficient d'induction mutuelle

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = N_2 \mu_0 m_1 S_1$$

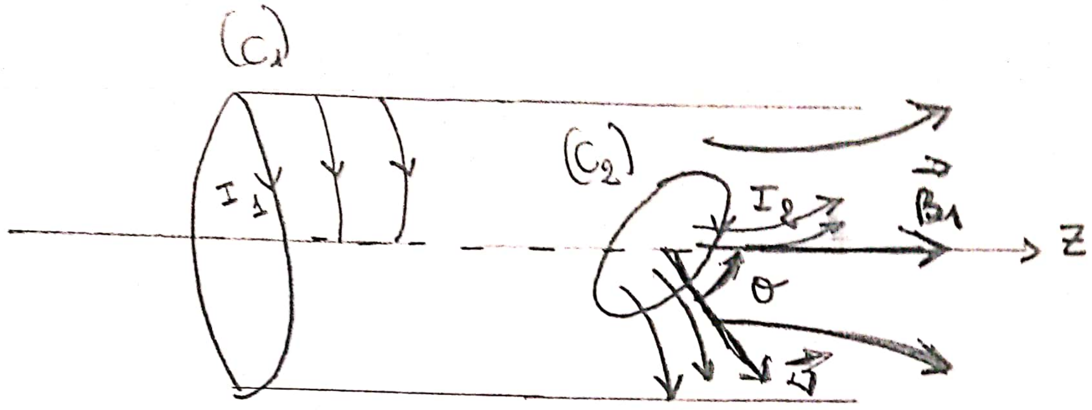
par déf

$$\boxed{M = N_2 \mu_0 m_1 S_1} \geq 0$$

les lignes de champ $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ s'ajoutent.
Donc M est strictement positif.

Scanned by CamScanner

Exercice 4



C_1 grand solénoïde : I_1 crée l'induction B_1 qui est uniforme et portée par l'axe (Z)

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

Seul Φ_{12} est praticable :

$$\Phi_{12} = 1 \iint_{S_2} \vec{B_1} \cdot \vec{\nu} \, dS \qquad N_2 = 1$$

$$(\widehat{\vec{B_1}, \vec{\nu}}) = \theta$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{12} = 1 \times \iint_{S_2} B_1 \cos\theta \, dS \qquad (1 : \text{car une spire})$$

$$= B_1 \cos\theta \iint_{S_2} dS$$

$$= B_1 \cos\theta \, S_2$$

Soit $\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 \cos\theta \, S_2$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 n_1 S_2 \cos\theta}$$

les lignes de champ de $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ s'ajoutent

d'où $M > 0$

جامعة مولاي إسماعيل
كلية العلوم والتقنيات
الرشيدية

MIP / S4
Année universitaire_17/18

Electromagnétisme
TD3.

Exercice 1

Une onde plane, monochromatique, polarisée rectilignement selon Oy se propage dans le vide dans la direction Ox. Le module du champ électrique est : $E_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$.

1) Ecrire l'expression du vecteur d'onde ainsi que le champ électrique incident $\vec{E}_i$.
2) Vérifier que le champ électrique obéit à l'équation d'Alembert.
3) Déduire l'expression du champ magnétique

Exercice 2

On considère l'espace vide (sans charges ni courants) rapporté à un trièdre direct $Oxyz$.. Une onde électromagnétique, plane, monochromatique et polarisée rectilignement suivant l'axe des z se propage dans la direction $\vec{Ou}$ du plan Oxy faisant un angle θ avec l'axe des x.

1) Ecrire le vecteur d'onde incidente $\vec{k}_i$.
2) Vérifier que cette onde est bien plane.
3) Ecrire le champ électrique incident $\vec{E}_i$. Déduire le champ magnétique incident $\vec{B}_i$.
4) Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique totale dW/dv.
5) Exprimer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{P}(M,t)$.

Exercice 3

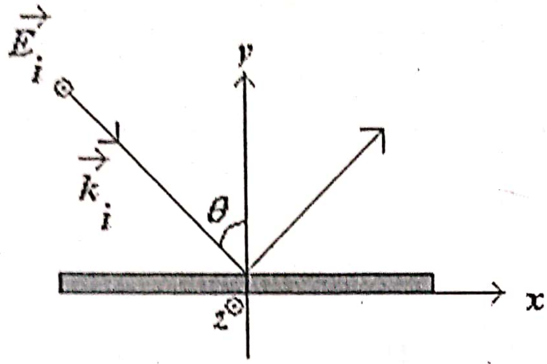
Une onde monochromatique polarisée rectilignement suivant l'axe des z se propage dans le vide dans la direction $\vec{k}_i$ faisant un angle θ avec l'axe des y. Cette onde tombe sur la surface d'un conducteur parfait et donne naissance à une onde réfléchie.

1) Ecrire les vecteurs d'onde des champs incident $\vec{k}_i$ et réfléchi $\vec{k}_r$.
2) Ecrire le champ électrique incident $\vec{E}_i$. Déduire le champ magnétique incident $\vec{B}_i$.
3) Ecrire le champ électrique réfléchi $\vec{E}_r$. Déduire le champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$.
4) Ecrire les conditions de continuité à la surface du conducteur parfait.

Déduire l'amplitude du champ électrique réfléchi E_{0r}.

5) Calculer la densité de charge s à la surface du conducteur.
6) Calculer le champ magnétique total tangentiel à la surface du conducteur.

Déduire la densité de courant $\vec{j}_s$.



Exercice 4

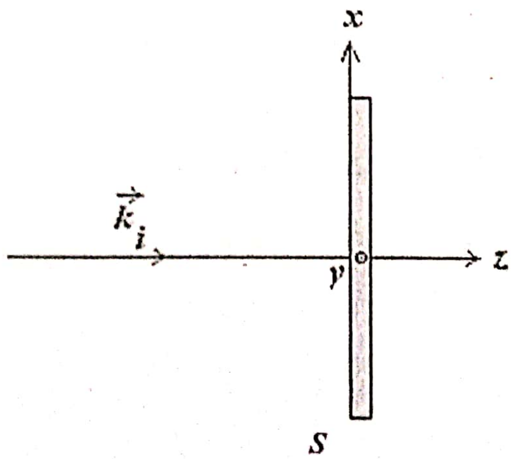
Une onde monochromatique polarisée rectilignement se propage dans le vide dans le demi-plan $z < 0$ et tombe axialement sur une surface parfaitement conductrice (S). En $z = 0$, cette onde arrive sur (S) et donne naissance à une onde réfléchie . Le vecteur champ magnétique incident s'écrit :

$$\vec{B}_i = B_0 \exp j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\,\vec{e}_y .$$

1) Ecrire le champ électrique incident. Donner la direction de polarisation de cette onde.
2) Ecrire la condition aux limites que satisfait le champ électrique total à la surface (S).
Déduire les champs électrique et magnétique réfléchis

3) Calculer la densité de charge surfacique σ et la densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ qui peuvent se trouver à la surface du miroir.

4) Calculer les vecteurs de Poynting $\vec{P}_i$ et $\vec{P}_r$ associés respectivement à l'onde incidente et à l'onde réfléchie.



Exercice 1

$\vec{Oy}$: direction de Polarisation.
$\vec{Ox}$: direction de propagation

1) Ecrivons l'expression de $\vec{k}$ et de $\vec{E_i}$.

$$\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_x}$$

$$\vec{E_i} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\vec{e}_y$$

$$\vec{k}.\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c}x$$

$$\boxed{\vec{E_i} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\vec{e}_y}$$

2) vérifions que le champ électrique ~~vérifie~~ obéit à l'équation d'Alembert.

$$\vec{E} = E_i\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ E_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Delta E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow \Delta E_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta E_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}}_{=0} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$

Car E_i ne dépend pas de y ni de z.

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-E_0\left(-\frac{\omega}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right)$$

$$= -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = -\frac{\omega^2}{c^2} E_i$$

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)\right)$$

$$= -\omega^2 E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = -\omega^2 E_i$$

d'où $\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_i}{\partial t^2} = 0$

L'équation d'Alembert est vérifiée.

3) Déduisons-en l'expression du champ magnétiq

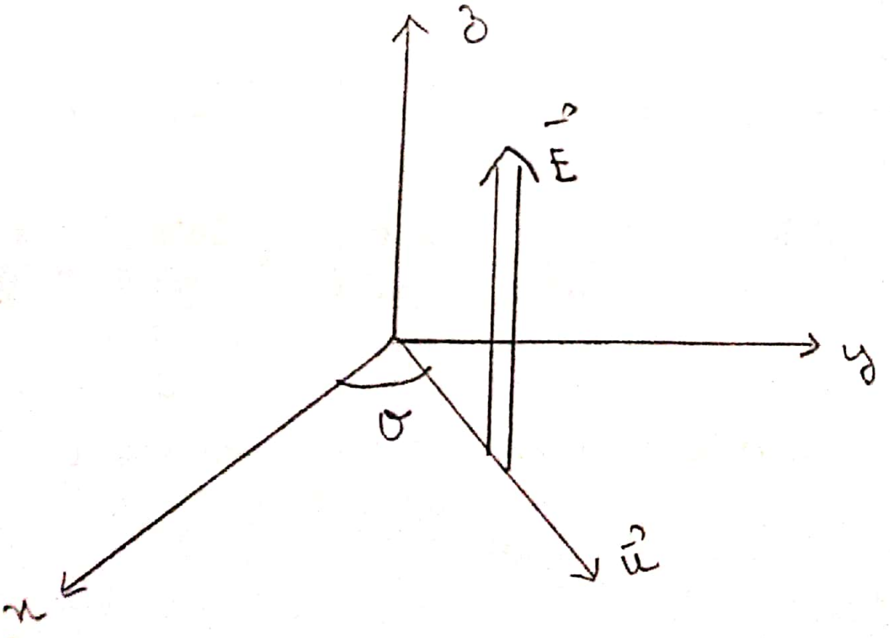
On a: $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$

$\vec{u}$: vecteur unitaire de la direction de propagati

Dans notre cas: $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \vec{e}_z}$$

Exercice 2



Direction de polarisation : $\vec{e}_z$
direction de propagation $\vec{ou}$: $\vec{u}$
. $(\widehat{\vec{n}, \vec{u}}) = \theta$

1) Ecrivons le vecteur d'onde incidente $\vec{K}_i$

On a: $\vec{K}_i = \frac{\omega}{c}\vec{ou} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$

d'autre part on a: $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$

Donc $\boxed{\vec{K}_i = \frac{\omega}{c}(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)}$

2) vérifions que cette onde est bien plane

le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\,\vec{e}_z$$

et $\vec{k}.\vec{r} = \frac{\omega}{c}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{\omega}{c}(x\cos\theta + y\sin\theta)$

mais comme $y = x\,tg\,\theta$, cette expression devien

$$\vec{k}.\vec{r} = \frac{\omega x}{c}(\cos\theta + tg\theta\sin\theta)$$

$$= \frac{\omega x}{c}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\omega x}{c.\cos\theta}$$

finalement

$$\vec{E}_i = E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c\cos\theta}\right)\vec{e}_z$$

$\vec{E}$ ne dépend, donc que de x : C'est une onde plane.

3) Ecrivons $\vec{E}_i$ et déduisons-en $\vec{B}_i$

$$\boxed{\vec{E}_i = E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c\cos\theta}\right)\vec{e}_z}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{(\cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_y) \wedge E\vec{e}_z}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_i = -\frac{E_0}{c} \cos\theta \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c\cos\theta}\right) \vec{e}_y + \frac{E_0}{c} \sin\theta \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c\cos\theta}\right)$$

Posons $\vec{E}_i = E\,\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{B}_i = -\frac{E}{c} \cos\theta\, \vec{e}_y + \frac{E}{c} \sin\theta\, \vec{e}_x$$

$E = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c\cos\theta}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_i = \frac{E}{c}(\sin\theta\, \vec{e}_x - \cos\theta\, \vec{e}_y)}$$

4) Calculons $\frac{dW}{dV}$ (densité volumique d'énergie électromagnétique totale)

$$\frac{dW}{dV} = \frac{dW_{el}}{dV} + \frac{dW_{mag}}{dV}$$

$$\frac{dW}{dV} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}}_{\text{égaux}} = \varepsilon_0 E^2$$

or $\begin{cases} \frac{dW_{el}}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \end{cases}$

$$\boxed{\frac{dW}{dV} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\frac{x}{\cos\theta}\right)}$$

or dans le vide $E = cB \Rightarrow$
$E^2 = c^2B^2$ mais $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$
$\Rightarrow E^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}B^2 \Rightarrow \varepsilon_0 E^2 =$

5) Exprimons les composantes du vecteur de Poynting $\vec{P}(M,t)$

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$\vec{E} = E\vec{e}_z$
$\vec{B} = \frac{E}{c}(\sin\theta\, \vec{e}_x - \cos\theta\, \vec{e}_y)$
et $E = E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c\cos\theta}\right)$

$$\vec{P} = \frac{E}{\mu_0}\vec{e}_z \wedge B(\sin\theta\, \vec{e}_x - \cos\theta\, \vec{e}_y)$$

$$= \frac{EB}{\mu_0}(\sin\theta\, \vec{e}_y + \cos\theta\, \vec{e}_x)$$

or $\vec{u} = \cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_y$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{E \cdot B}{\mu_0}\vec{u}$$

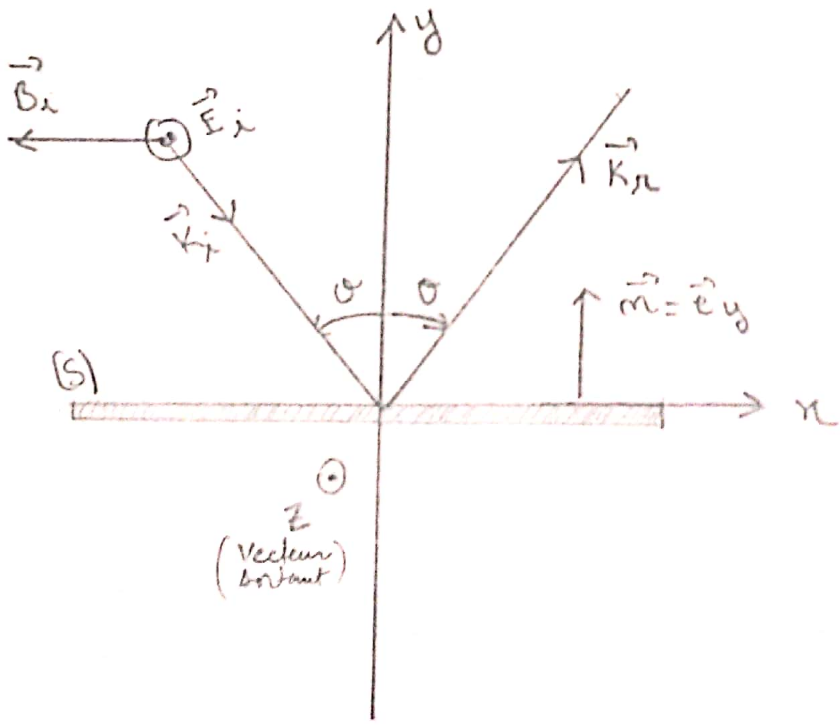
$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\frac{x}{\cos\theta}\right)\vec{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\frac{x}{\cos\theta}\right)\vec{u}}$$

⚠ Toujours $\vec{P}$ est Porté par la direction de propagation.

Exercice 3

- Direction de polarisation : $\vec{e}_z$
- Direction de propagation : $\vec{K}_i$



1) Ecrivons $\vec{K}_i$ et $\vec{K}_r$ i = incident, r = réfléchi

car sens opposé ($\vec{K}_i$ et $\vec{y}$) $\vec{K}_i = \frac{\omega}{c}\vec{u}_i$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{K}_i &= \frac{\omega}{c}(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y)\\ \vec{K}_r &= \frac{\omega}{c}(\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y).\end{aligned}}$$

2) Ecrivons $\vec{E}_i$ et déduisons-en $\vec{B}_i$

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})\,\vec{e}_z$$

$$\vec{k}_i : \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c}\sin\theta \\ -\frac{\omega}{c}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c} x \sin\theta - \frac{\omega}{c} y \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_i = E_0 \cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta - y\cos\theta)\right]\vec{e}_z$$

or il s'agit d'une onde plane. Donc ne dépend que d'une seule coordonnée.

L'équation de la surface (S) est : $(y=0)$

Exprimons donc E_i en fonction de y.

or $x : y \operatorname{tg}\theta$

$$\Rightarrow \vec{E}_i = E_0 \cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c} y\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_i = E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} y \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)\vec{e}_z}$$

Déduisons en $\vec{B}_i$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{c}$$

$$\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E\cos\theta \\ -E\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_i = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c} y \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)\left(-\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y\right)}$$

3) Ecrivons $\vec{E}_r$ et déduisons en $\vec{B}_r$

$$\vec{E}_r = E_{0r}\cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})\vec{e}_z$$

$$= E_{0r}\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta + y \cdot \cos\theta)\right]\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_r = E_{0r}\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}\frac{y}{\cos\theta}\right]\vec{e}_z}$$

$x = y\operatorname{tg}\theta = y\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Scanned by CamScanner

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}_r}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_r = \frac{E_{0r}}{c} \cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}\frac{y}{\cos\theta}\right] \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}}$$

4). Ecrivons les conditions de continuité à la surface du conducteur parfait. (cours)

(i) $\vec{E}_{tot,t}\Big|_{y=0} = \vec{0}$ (ii) $\vec{E}_{tot,n}\Big|_{y=0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_y$??

(iii) $\vec{B}_{tot,t}\Big|_{y=0} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_y$ iv) $\vec{B}_{tot,n}\Big|_{y=0} = \vec{0}$

- Déduisons-en E_{0r}

$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$

(i) $\Rightarrow \vec{E}_i(y=0) + \vec{E}_r(y=0) = \vec{0}$

$\Rightarrow (E_0 \cos\omega t + E_{0r} \cos\omega t)\vec{e}_z = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{E_{0r} = -E_0}$

5) Calculons la densité de charge S à la surface du conducteur.

Le champ électrique étant purement tangentiel $(\vec{E} \parallel (S))$

$\Rightarrow$ la composante normale $\vec{E}_{tot,n} = \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

$\Rightarrow$ $\sigma = 0$: il n'y a pas de charges surfaciques.

$\boxed{\sigma = 0}$

6) Pour la densité de courants surfaciques

$\vec{B}_{tot}\Big|_{y=0} = \vec{B}_i + \vec{B}_r$

$$= \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}\, y\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\,\frac{y}{\cos\theta}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La composante tangentielle de $\vec{B}_{tot}$, calculée à la surface $(y=0)$ du conducteur parfait.

$$\vec{B}_{tot,t}\Big|_{y=0} = \left(-\frac{E_0}{c}\cos\omega t\,.\cos\theta - \frac{E_0}{c}\cos\omega t \times \cos\theta\right)\vec{e}_x$$

$$\boxed{\vec{B}_{tot,t}\Big|_{y=0} = -\frac{2E_0}{c}\cos\omega t\,.\cos\theta\;\vec{e}_x}$$

Déduisons-en la densité de courant $\vec{J}_s$.

Par ailleurs $\vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_y$

$$\vec{B}\wedge\vec{e}_y = \mu_0(\vec{J}_s\wedge\vec{e}_y)\wedge\vec{e}_y$$

$$= \mu_0\left[(\vec{J}_s\cdot\vec{e}_y)\vec{e}_y - \vec{J}_s(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y)\right]$$

$\vec{J}_s\cdot\vec{e}_y = 0$ car $\vec{J}_s$ est surfacique $\perp$ à $\vec{e}_y$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}\wedge\vec{e}_y = -\mu_0\vec{J}_s$$

On en déduit $\vec{J}_s = \dfrac{\vec{e}_y\wedge\vec{B}_{tot,t}\big|_{y=0}}{\mu_0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{J}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos\omega t\,.\cos\theta\;\vec{e}_z}$$

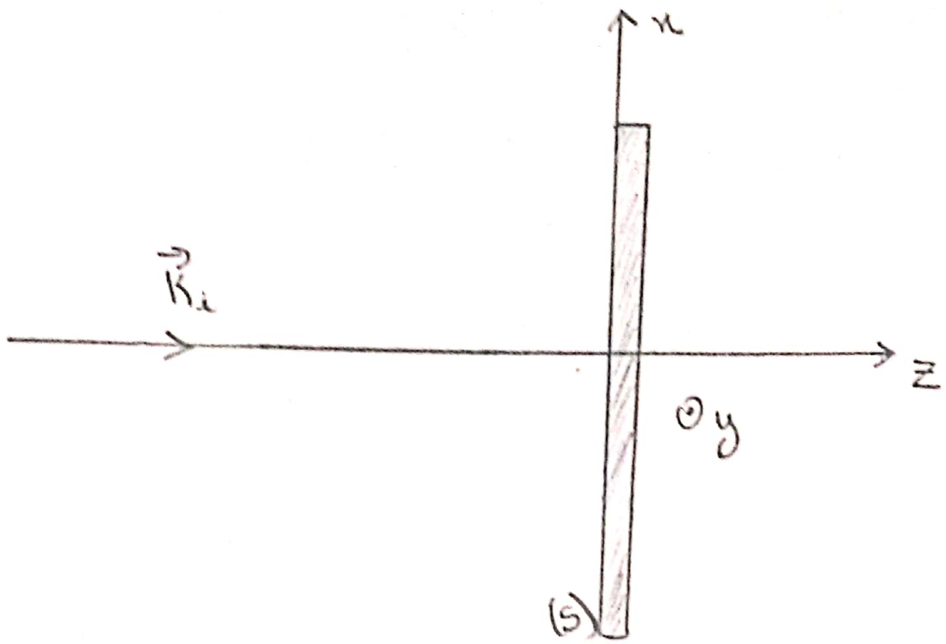
<u>A retenir</u> :

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C} = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

commutables

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

Exercice 4.



$$\vec{B}_i = B_0 \exp j(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})\,\vec{e}_y$$

1) Ecrivons E_i

$$\vec{E}_i = E_0 \exp j(\omega t - \vec{K}_i\cdot\vec{r})\,\vec{e}_x$$

Car le trièdre $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{K}_i)$ est toujours direct

$$\vec{K}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{c} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_i = E_0 \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right)\vec{e}_x$$

$$E_0 = c B_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_i = c B_0 \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right)\vec{e}_x}$$

$\boxed{\text{la direction de polarisation est } \vec{e}_x.}$

On peut retrouver le résultat par :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_i}{c}$$

$$\Rightarrow c\vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \vec{E}_i$$

$$\Rightarrow c(\vec{B}_i \wedge \vec{e}_z) = -\overbrace{(\vec{e}_z\cdot\vec{E}_i)}^{0 \text{ car } \vec{E}_i \perp \vec{e}_z}\vec{e}_z + (\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z)\vec{E}_i = +\vec{E}_i$$

d'où $\vec{E}_i = c(\vec{B}_i \wedge \vec{e}_z)$

$= c[B_0 \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} z)\, \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_i = c B_0 \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} z)\, \vec{e}_x}$$

2) Ecrivons la condition aux limites que satisfait le champ électrique total à la surface (S)

$$\boxed{\vec{E}_{tot,t}\Big|_{z=0} = \vec{0}}$$

incidence axiale $\Rightarrow$ toutes les composantes sont purement tangentielles. Cette équation devient :

$$\boxed{\vec{E}_{tot}\Big|_{z=0} = \vec{0}}$$

Déduisons-en $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$

Or $\vec{E}_{tot}\Big|_{z=0} = \vec{0} = \vec{E}_i\Big|_{z=0} + \vec{E}_r\Big|_{z=0}$

Soit $E_0 \exp j\omega t + E_{0r} \exp j\omega t = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_{0r} = -E_0}$$

$$\vec{E}_r = E_{0r} \exp j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})\, \vec{e}_x$$

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{c} \end{pmatrix} = -\frac{\omega}{c} z$$

car réfléchi $\Rightarrow$ sens + dez

$$\boxed{\vec{E}_r = -E_0 \exp j(\omega t + \frac{\omega}{c} z)\, \vec{e}_x}$$

Posons $\vec{E}_r = E_r \vec{e}_x$

$$\vec{B}_r = \frac{-\vec{e}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = -\frac{\vec{e}_z \wedge E_r \vec{e}_x}{c} = \frac{E_r}{c}(-\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp j\left(\omega t + \frac{\omega}{c} z\right) \vec{e}_y}$$

3) Calculons σ et $\vec{j}_s$

L'incidence étant axiale, les champs sont purement tangentiels

$\Rightarrow$ la composante normale du champ électrique est nulle

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

$\rightarrow$ Pour la densité de courant surfacique $\vec{j}_s$.

$\vec{B}$ étant également purement tangentiel, on a:

$$\vec{B}_{tot,t} = \vec{B}_{tot}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{tot}\big|_{z=0} = \vec{B}_i\big|_{z=0} + \vec{B}_r\big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{tot}\big|_{z=0} = \left(B_0 e^{j\omega t} + \frac{E_0}{c} e^{j\omega t}\right) \vec{e}_y$$

avec $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$

$$\Rightarrow \vec{B}_{tot}\big|_{z=0} = \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_y$$

or $\vec{j}_s = \dfrac{-\vec{e}_z \wedge \vec{B}_{tot}\big|_{z=0}}{\mu_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{j\omega t} \vec{e}_x}$$

5) Calculons $\vec{P}_i$ et $\vec{P}_r$

$$\vec{P}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}$$

$$= \frac{E_i \vec{e}_x \wedge B_i \vec{e}_y}{\mu_0} = \frac{E_i B_i}{\mu_0} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}_i = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \exp 2j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right) \vec{e}_z}$$

Par un calcul similaire

On trouve : $\boxed{\vec{P}_r = \frac{-E_0^2}{\mu_0 c} \exp 2j\left(\omega t + \frac{\omega}{c} z\right) \vec{e}_z}$

question 4 de l'exo 4

En un pt M situé dans le vide, la superposition des onde incidente $(\vec{E_i},\vec{B_i})$ et réfléchies $(\vec{E_r},\vec{B_r})$ donne les chps résultants

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E_i} + \vec{E_r} \\ \vec{B} = \vec{B_i} + \vec{B_r} \end{cases}$$

soit

$$\vec{E} = \left\{ E_0 e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} z)} - E_0 e^{j(\omega t + \frac{\omega}{c} z)} \right\} \vec{e_x}$$

$$\vec{B} = \left\{ \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} z)} + \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + \frac{\omega}{c} z)} \right\} \vec{e_y}$$

tout calcul fait :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E} = 2 \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right) \sin \omega t \ \vec{e_x} \\ \vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) \cos \omega t \ \vec{e_y} \end{cases}}$$

Ces expressions ne correspondent pas à des ondes qui se propagent.
Ce sont des ondes stationnaires