Solution de la série 2.

Ex 1 :

1°/ Les relations de Planck Einstein sont :

$$E = \hbar\omega \;,\quad p = \hbar k.$$

2°/ Les relations sont à la base de la dualité onde corpuscule.

3°/ En relativité restreinte, on a :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;,\quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

le rapport :

$$\boxed{\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2}.}$$

On a :

$$\frac{p^2}{c^2} = m^2 \frac{v^2/c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m^2\frac{v^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2/c^2}{m^2+\frac{p^2}{c^2}}$$

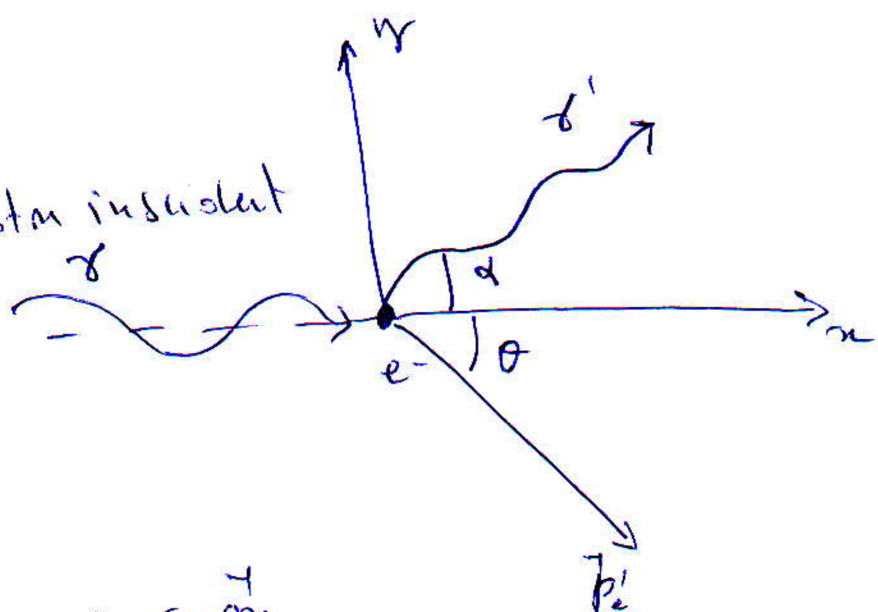
donc $1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{m^2 + P^2/c^2 - P^2/c^2}{m^2 + P^2/c^2}$

d'où on a : $\boxed{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2}$

4- Les équations de la conservation de l'énergie et de l'impulsion lors d'un choc photon-électron sont :

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e \quad (1)$$

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{p}'_\gamma + \vec{p}'_e$$



projection sur $\vec{ox}$

$$\frac{h}{\lambda} = p'_e \cos\theta + \frac{h}{\lambda'} \cos\alpha \quad (2)$$

projection sur $\vec{oy}$ (3)

$$0 = -p'_e \sin\theta + \frac{h}{\lambda'} \sin\alpha$$

(2)

5°| Calcul de p'_e :

Les équations ② et ③, il vient :

$$p'_e \cos\theta = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\alpha \quad ④$$

$$p'_e \sin\theta = \frac{h}{\lambda'}\sin\alpha \quad ⑤$$

d'où $p'^{2}_e = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\sin\alpha\right)^2.$

$$p'_e = \left(\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\alpha\right)^{1/2} \quad ⑥$$

De l'équation ①, il vient :

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \left(p'^2_e c^2 + m^2c^4\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow p'_e = \left[h^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2mhc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\right]^{1/2}. \quad ⑦$$

Des équations ⑥ et ⑦, on a :

$$\frac{mc}{h}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{1}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\alpha).$$

$$\Rightarrow \frac{mc}{h}(\lambda' - \lambda) = (1 - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{mc\lambda}{h}\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}\right) = (1 - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = a(1 - \cos\alpha)}.$$

6°/ Calcul de l'énergie du photon diffusé:

$$E'_\gamma = \frac{hc}{\lambda'} \quad , \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = \lambda\left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right).$$

d'où

$$E'_\gamma = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{E'_\gamma = E_\gamma \frac{1}{1 + a(1 - \cos\alpha)}}.$$

7°/ Calcul de l'angle θ:

Des équations ② et ③, on a:

$$tg\,\theta = \frac{\frac{1}{\lambda'} \sin\alpha}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos\alpha}$$

on remplace $\frac{\lambda'}{\lambda}$ par sa valeur

$$tg\,\theta = \frac{\sin\alpha}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} - \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + a(1-\cos\alpha) - \cos\alpha}$$

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{\sin\alpha}{(1+a)(1-\cos\alpha)}}$$

Exercice 2:

1°| D'après l'Hypothèse de De Broglie : à chaque particule d'énergie E et d'impulsion $\vec{p}$ on associe une onde plane : $\psi(x,t) = A e^{i(kx-wt)}$

avec $E = \hbar w$ et $p = \hbar k$.

D'après le principe de superposition, l'état la plus générale st la Combinaison linéaire de touts les ondes planes et on a:

d'une façon générale

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{i(kx-wt)}\, dk.$$

cte dans $g(k)$

2°| La fonction d'onde à $t=0$ st:

$$\psi(x,0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|p|}{p_0}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, dp. \quad (1)$$

a| à $t=0$ on a:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, \varphi(p)\, dp \quad (2) \text{ Déf.}$$

où $\varphi(p)$ représente la transformée de Fourier de $\psi(x,0)$

En identifiant ① avec ② on déduit :

$$\varphi(p) = N e^{-|p|/p_0} .$$

b°/ * $|\psi(x,0)|^2$: représente la probabilité de trouver la particule au pt x à $t=0$.

* $|\varphi(p)|^2$ st la probabilité pour la particule d'avoir une impulsion p à $t=0$

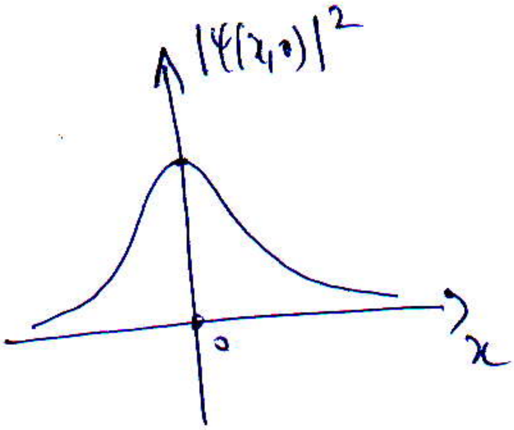
c°/ $$\psi(x,0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{p/p_0} e^{ipx/\hbar} dp + \int_{0}^{+\infty} e^{-p/p_0} e^{ipx/\hbar} dp \right].$$

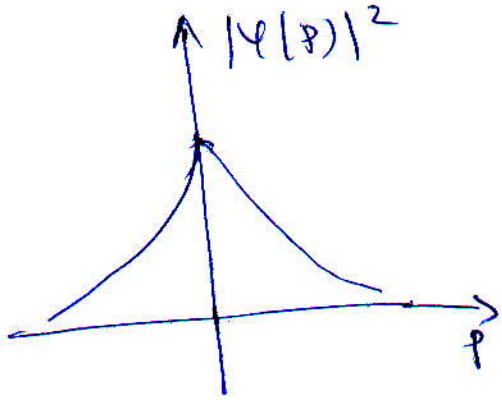
$$\psi(x,0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \left[\frac{e^{p\left(\frac{1}{p_0} + \frac{ix}{\hbar}\right)}}{\frac{1}{p_0} + \frac{ix}{\hbar}} \right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-p\left(\frac{1}{p_0} - ix/\hbar\right)}}{\frac{1}{p_0} - ix/\hbar} \right]_{0}^{\infty} \right]$$

$$\boxed{\psi(x,0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{2/p_0}{\frac{x^2}{\hbar^2} + \frac{1}{p_0^2}}}$$

$$|\psi(x,0)|^2 = \frac{N^2}{2\pi\hbar} \left(\frac{2/p_0}{\frac{x^2}{\hbar^2} + \frac{1}{p_0^2}} \right)^2$$

On remarque que quand $x \longrightarrow \pm\infty$, $|\psi(x,0)|^2 \longrightarrow 0$ et présente un maximum pour $x=0$





d/ suivant le principe d'incertitude de ~~d~~ Heisenberg le produit $\Delta x \, \Delta p$ à pour limite inferieure la quantité $\hbar$. suivant ce principe, améliorer la précesion sur la localisation de la particule (diminuer Δx) oblige à communiquer une impulsion suplementaire à la particule.

- Δx : st l'intervalle dans lequel on peut trouver la particule lors d'une mesure de sa position à $t=0$ et centré au point $x=0$.

- Lors d'une mesure de l'impulsion de la particule, on ne peut trouver des valeurs que dans l'intervalle Δp (centrée sur $p=0$).

3°/ $\mathcal{P}(p_1, 0) = \int_{-p_1}^{+p_1} |\varphi(p)|^2 dp = N^2 \int_{-p_1}^{p_1} e^{-2|p|/p_0} dp$

$$\boxed{\mathcal{P}(p_1, 0) = N^2 p_0 \left(1 - e^{-2p_1/p_0}\right)}$$

4°/ $\psi(x, t) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|p|/p_0} \, e^{i\left(\frac{px}{\hbar} - \omega t\right)} dp$

avec $\varphi(p) = N \, e^{-|p|/p_0} \, e^{-i\omega t}$

donc $|\varphi(p)|_t^2 = N^2 e^{-2|p|/p_0} = |\varphi(p)|_{t=0}^2$

donc $\boxed{\mathcal{P}(p_1, t) = \mathcal{P}(p_1, 0)}$

La probabilité est indépendante du temps ce qui correspond à un état stationnaire.

EX3 : Evolution d'un paquet d'onde gaussien

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x)\,e^{i[k_x x-\omega(k_x)t]}\,dk_x.$$

1°/ Montrons que $\psi(x,t)$ est solution de l'équation de Schrodinguer.

On a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int(-i\omega)\,g(k_x)\,e^{i(k_x x-\omega t)}\,dk_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int -k_x^2\,g(k_x)\,e^{i(k_x x-\omega t)}\,dk_x \quad (2)$$

d'où

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\Big(\underbrace{\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\omega\hbar}_{=0}\Big)g(k_x)\,e^{i(k_x x-\omega t)}\,dk_x.$$

Or $E=\hbar\omega$, $\vec{p}=\hbar\vec{k}$

particule libre $E=\frac{p^2}{2m}$

d'où $\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)}$

2°/ Montrons que la probabilité de présence de la particule st indépendante de temps.

On sait que : $\int|\psi(x,t)|^2dx=\int|G(k_x,t)|^2dk_x$

avec $G(k_x,t) = g(k_x)\, e^{-i\omega t}$.

$$g(k_x) = A\, e^{-\frac{a^2}{4}(k_x-k_{x_0})^2}$$

d'où $\left|G(k_x,t)\right|^2 = \left|g(k_x)\right|^2 = A^2 e^{-\frac{a^2}{4}(k_x-k_{x_0})^2}$

st indépendant du temps, et donc on a :

$\int \left|\psi(x,t)\right|^2 dx$ st indépendant de temps.

3) Calcul de la densité de probabilité.

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi d(t)}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{\varphi^2(x,t)}{Z(t)}\right)$$

$$\left|\psi(x,t)\right|^2 = \left(\frac{2a^2}{\pi d(t)}\right)^{1/2} \left|\exp \frac{\varphi^2(x,t)}{Z(t)}\right|^2$$

Avec
$$\left|e^{\frac{\varphi^2}{Z}}\right|^2 = e^{\frac{\varphi^2}{Z}} \cdot e^{\frac{\varphi^2}{Z^*}} = e^{\varphi^2\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z^*}\right)}.$$

$Z = a^2 + i\frac{2\hbar t}{m}$ et on donc $\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z^*} = \frac{2a^2}{a^4+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2}} = \frac{2a^2}{d(t)}$

d'où $$\boxed{\left|\psi(x,t)\right|^2 = \left(\frac{2a^2}{\pi d(t)}\right)^{1/2} e^{\frac{2a^2\varphi^2(x,t)}{d(t)}}}$$

4°/ Calcul de la vitesse de groupe V_g et la vitesse de phase V_φ.

La particule est libre, donc on a :

$$V_g = \frac{dW}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$$

$$V_\varphi = \frac{W}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

5°/

$V_g = V$ (vitesse de la particule)

car $P = mV \Rightarrow v = \frac{P}{m} = \frac{\hbar k}{m}$

donc $\boxed{V_g = V}$

$$\boxed{V_\varphi = \frac{V_g}{2}}$$