

FILIERE SCIENCES DE LA MATIERE PHYSIQUE

MODULE : ELECTRICITE III

Cours d'Electricité 3

SOMMAIRE

Chapitre I : Electrostatique des milieux diélectriques

Chapitre II : Magnétostatique des milieux aimantés

Chapitre III : Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels

Chapitre IV : Propagation guidée des ondes électromagnétiques.

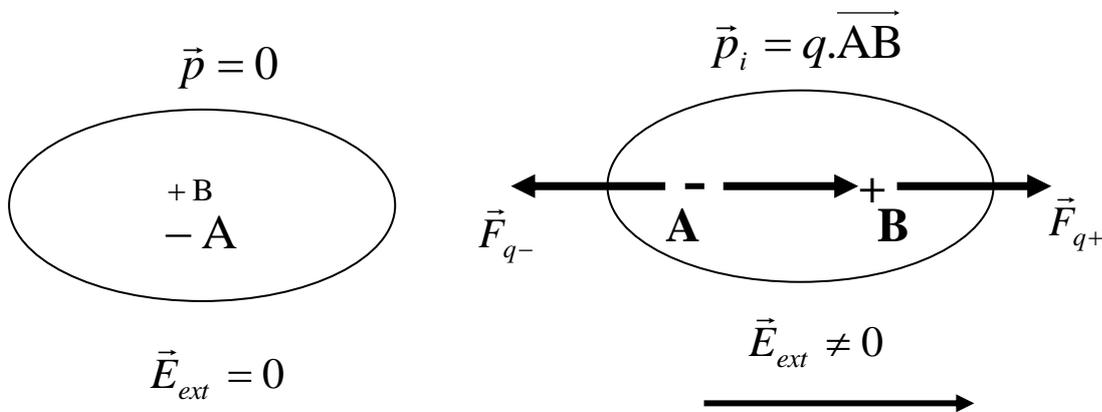
Chapitre I : Electrostatique des milieux diélectriques

I- Généralités

Un milieu diélectrique est un milieu isolant. C'est à dire qui ne contient pas de charges libres. Il est formé, en général, par des molécules (ou atomes) qui peuvent être polaires ou non polaires.

I.1 Cas des molécules non polaires en l'absence d'un champ électrique appliqué \vec{E}_{ext}

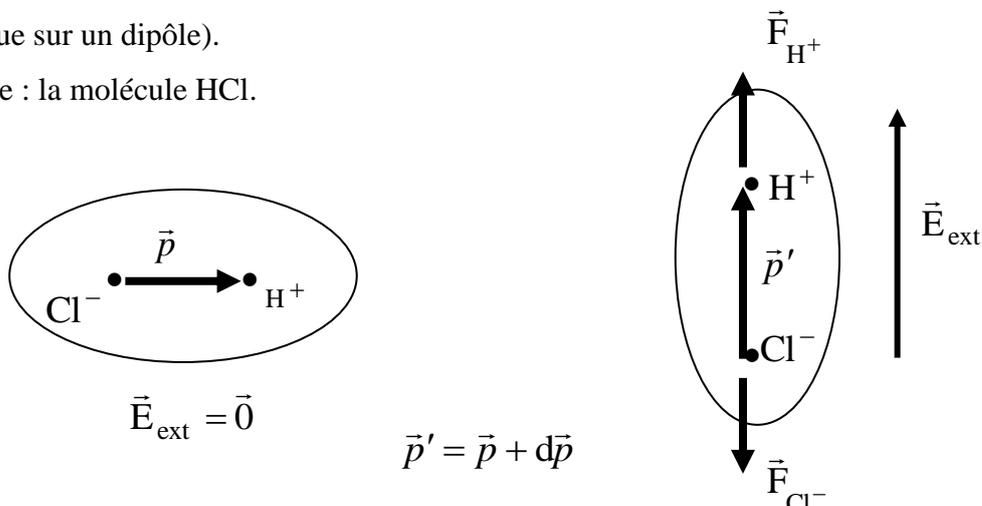
Lorsqu'on applique un champ électrique les centres de gravité des charges positives et négatives se séparent sous l'action des forces électriques appliquées. Les molécules deviennent des petits dipôles électriques de moment dipolaire induit \vec{p}_i



I.2 Cas des molécules qui sont déjà polaires même en l'absence d'un champ électrique

Lorsqu'on applique un champ extérieur, il y a modification du moment dipolaire permanent de ces molécules sous l'action des forces électriques appliquées, et orientation des dipôles obtenus dans une direction parallèle au champ appliqué (Cf. cours électrostatique, action d'un champ électrique sur un dipôle).

Exemple : la molécule HCl.



En résumé : Un milieu diélectrique est un milieu contenant un grand nombre de dipôles électriques.

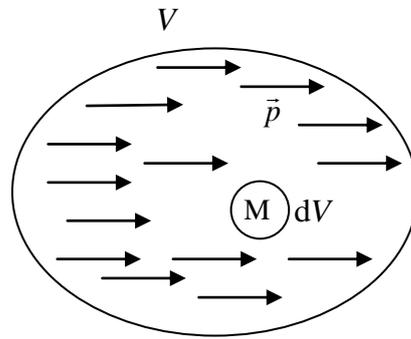
II- Vecteur polarisation \vec{P}

Considérons un volume V de matière diélectrique. Un volume élémentaire dV , pris autour d'un point M du milieu, est équivalent à un dipôle électrique élémentaire de moment dipolaire $d\vec{p}$.

On appelle vecteur polarisation le vecteur défini, en tout point du milieu, par la relation :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (\text{I-1})$$

Il représente le moment dipolaire par unité de Volume (ou densité dipolaire). Son module s'exprime en Coulomb par mètre carré ($C.m^{-2}$).



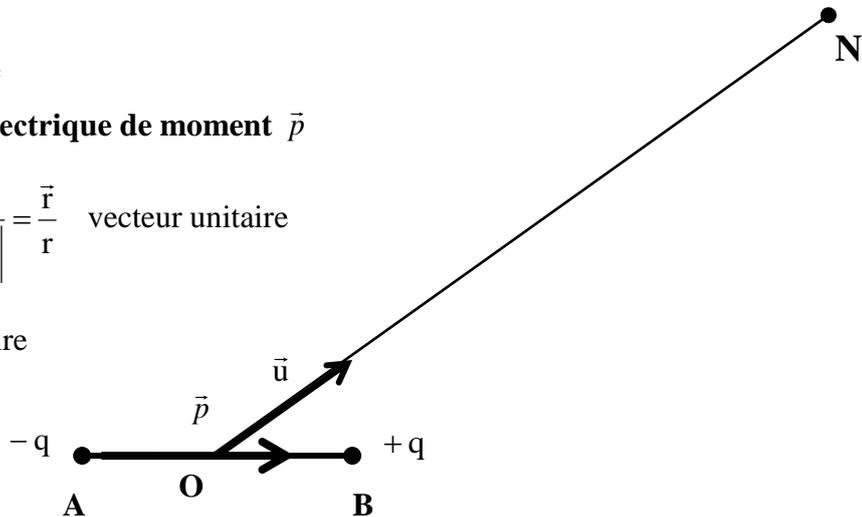
III- Potentiel et champ électrostatiques créés par un milieu diélectrique en un point N de l'espace

III.1 Potentiel électrique

III.1.1 Cas d'un dipôle électrique de moment \vec{p}

$$\|\vec{ON}\| = r \quad ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{ON}}{\|\vec{ON}\|} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{vecteur unitaire}$$

$$\vec{p} = q \cdot \vec{AB} \quad \text{moment dipolaire}$$

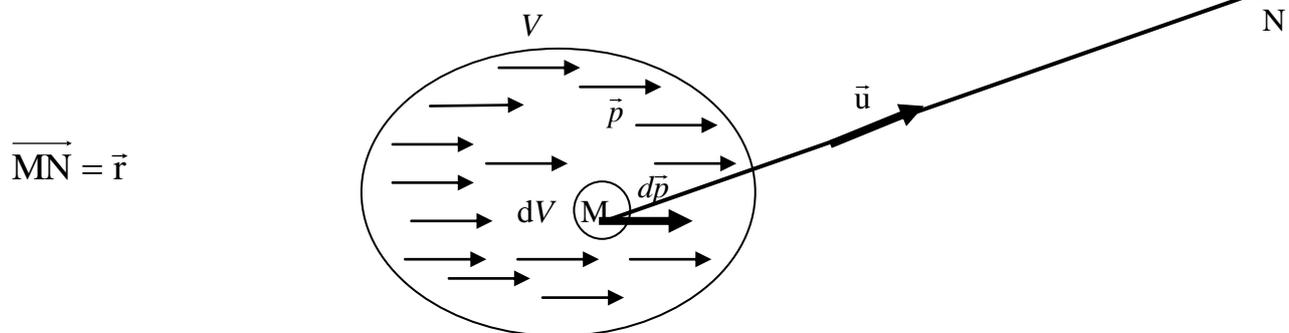


Le potentiel électrique créé par le dipôle au point N est donné par :

$$V(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (\text{I-2})$$

III.1.2 Cas du milieu diélectrique

Soit $V_d(N)$ le potentiel créé par le milieu en un point N de l'espace.



Un volume élémentaire dV , pris autour d'un point M du milieu, est équivalent à un dipôle électrique de moment :

$$d\vec{p} = \vec{P} \cdot dV \quad (\text{I-3})$$

Ce volume crée en un point N de l'espace un potentiel électrique élémentaire $dV_d(N)$ tel que :

$$dV_d(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} dV \quad (I-4)$$

Le potentiel créé par tout le volume diélectrique en N est :

$$V_d(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} dV \quad (I-5)$$

Nous allons développer cette intégrale en considérant les relations vectorielles ci-dessous :

Dans un repère cartésien orthonormé direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$M(X, Y, Z); N(x, y, z); \vec{r} = \overrightarrow{MN} = (x - X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k}$

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)_M = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Si \vec{A} est un champ de vecteurs et f une fonction de scalaires on a :

$$\text{div}(\vec{A} \cdot f) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f + f \cdot \text{div} \vec{A}$$

Donc, pour $\vec{A} = \vec{P}$ et $f = \frac{1}{r}$, c'est notre cas, on a :

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)_M = \text{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right)_M - \frac{\text{div} \vec{P}}{r}$$

ce qui permet d'écrire :

$$V_d(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \text{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right) dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\text{div} \vec{P}}{r} dV$$

Le premier terme est une intégrale triple de la divergence étendue au volume V . Elle peut se transformer en une intégrale double étendue à une surface S , qui délimite ce volume, à l'aide du théorème d'Ostrogradsky d'où l'expression du potentiel électrique dû au milieu diélectrique au point N de l'espace :

$$V_d(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\text{div} \vec{P}}{r} dV \quad (I-6)$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire de la normale à S .

Remarque : Ce potentiel comporte deux termes :

- le premier terme est identique au potentiel électrostatique créé par une distribution de charges surfaciques de densité $\sigma_p(M) = \vec{P}(M) \cdot \vec{n}(M)$.

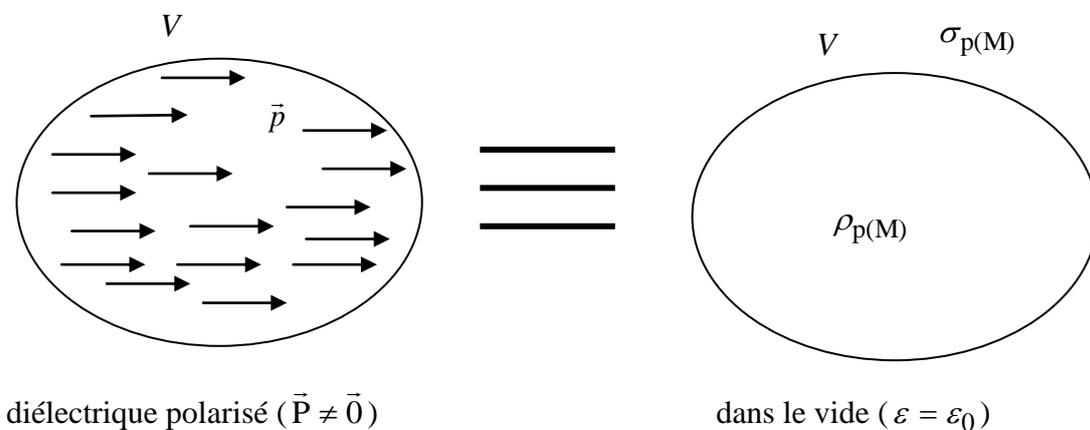
- Le deuxième terme est identique au potentiel électrostatique créé par une distribution de charges volumiques de densité $\rho_p(\mathbf{M}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\mathbf{M})$.

En conclusion :

Pour calculer le potentiel électrostatique créé par un milieu diélectrique, il est équivalent de remplacer les dipôles électriques qui le constituent par deux distributions de charge fictives (qui n'ont aucune existence physique), appelées charges fictives de polarisation :

- une charge surfacique fictive de densité : $\sigma_p(\mathbf{M}) = \vec{P}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}(\mathbf{M})$
- une charge volumique fictive de densité : $\rho_p(\mathbf{M}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\mathbf{M})$

Un volume diélectrique polarisé est donc équivalent dans le vide à :



Remarque :

Si le milieu n'est pas polarisé (c.à.d. en tout point du volume $\vec{P} = \vec{0}$) les charges de polarisation sont nulles et par suite aucun potentiel ni champ électriques ne sont créés. Pour polariser le volume diélectrique on applique un champ électrique qui va orienter les dipôles électriques dans une direction qui lui est parallèle, d'où un moment dipolaire global non nul et par suite un vecteur polarisation non nul.

Si le milieu contient en plus, des charges réelles (mobiles) volumiques de densité ρ , et surfaciques de densité σ , les densités de charges totales sont :

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_p + \sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} + \sigma$$

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_p + \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho$$

Le potentiel total au point N est :

$$V_{\text{tot}}(\mathbf{N}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_{\text{tot}}}{r} \cdot dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{\text{tot}}}{r} \cdot dV \quad (\text{I-7})$$

Remarque :

Ce sont ces charges mobiles qui peuvent être à l'origine du champ électrique éventuellement appliqué pour polariser le milieu diélectrique, que l'on note en général \vec{E}_0 ou \vec{E}_{ext} .

III.2 Champ électrique

Une fois le potentiel $V_d(N)$ est connu, le champ électrique $\vec{E}_d(N)$ est calculé à partir de la relation :

$$\vec{E}_d(N) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_d(N) \quad (\text{I-8})$$

Le champ électrique total au point N est :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(N) = \vec{E}_d(N) + \vec{E}_{\text{ext}}(N) \quad (\text{I-9})$$

Si Le point N se trouve dans le volume diélectrique, le champ \vec{E}_{tot} s'appelle champ macroscopique.

IV- Vecteur déplacement électrique ou induction électrique \vec{D}

La forme locale du théorème de Gauss est donnée par :

$$\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho_{\text{tot}}(M)}{\epsilon_0} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho - \text{div} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{I-10})$$

soit : $\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho(M)$

On appelle vecteur induction électrique ou excitation électrique le vecteur :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{I-11})$$

tel que :

$$\text{div } \vec{D}(M) = \rho(M) \quad (\text{I-12})$$

Cette relation exprime la forme locale du théorème de Gauss généralisé.

D s'exprime en Coulomb par mètre carré ($C \cdot m^{-2}$).

Si on considère un élément de volume du milieu on a :

$$\iiint_V \text{div } \vec{D}(M) dV = \iiint_V \rho dV$$

en appliquant le théorème d'Ostrogradsky on obtient la forme intégrale du théorème de Gauss généralisé :

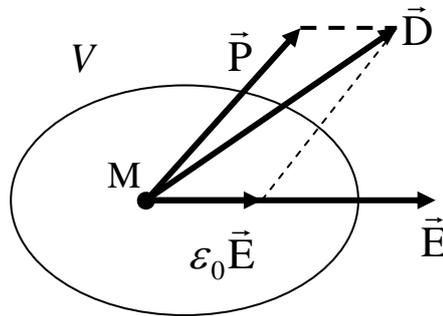
$$\iint_S \vec{D}(M) \cdot d\vec{S} = Q \text{ (totale mobile interne à S)} \quad (\text{I-13})$$

où (S) est la surface du volume V.

Q est la charge électrique réelle totale située à l'intérieur de la surface fermée de Gauss.

Remarque :

L'expression $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ est générale. Elle s'applique à tous les diélectriques. Elle montre, qu'en général, les vecteurs \vec{E} , \vec{D} et \vec{P} ne sont pas colinéaires.



V – Propriétés des milieux diélectriques

V.1 Milieux diélectriques parfaits ou linéaires, homogènes et isotropes

En pratique, il n'y a pas de diélectriques parfaits. Les **diélectriques réels** sont caractérisés par :

- une faible conductivité électrique.
- la polarisation induite par le champ électrique extérieur ne disparaît pas instantanément lorsque ce champ disparaît. On dit que ces milieux présentent de l'hystérésis électrique.

Les **diélectriques parfaits** sont des milieux linéaires, homogènes et isotropes (L.H.I.) qui ne présentent ni conductivité électrique ni hystérésis et pour les quels la polarisation \vec{P} et le champ électrique total \vec{E} sont colinéaires. La relation de proportionnalité est donnée par :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (\text{I-14})$$

où χ_e est un scalaire qui représente la susceptibilité diélectrique de la substance.

Dans ces diélectriques parfaits les champs \vec{E} et \vec{D} sont aussi colinéaires. En effet :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

on pose $1 + \chi_e = \epsilon_r$ d'où :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{I-15})$$

ϵ_r est un nombre sans dimension qui représente la permittivité électrique relative du milieu.

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ est la permittivité absolue. Ici c'est un scalaire.

L'expression (I-14) peut aussi s'écrire :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (\text{I-16})$$

V.2 Milieux diélectriques linéaires anisotropes

Un milieu diélectrique est dit linéaire si l'application qui, à tout point M du milieu, fait correspondre $\vec{D}(M)$ à $\vec{E}(M)$ est linéaire.

Soit $\vec{D}(D_x, D_y, D_z)$ et $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ dans un repère cartésien orthonormé direct $\mathfrak{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La relation entre ces deux vecteurs est une relation matricielle :

$$(\mathbf{D}) = (\varepsilon) (\mathbf{E})$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-17})$$

La matrice (ε) des permittivités diélectriques étant symétrique, il existe une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ appelée base principale dans laquelle on a :

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I-18})$$

La relation matricielle entre $\vec{D}(D_1, D_2, D_3)$ et $\vec{E}(E_1, E_2, E_3)$ dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I-19})$$

ce qui donne :

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 \quad ; \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 \quad ; \quad D_3 = \varepsilon_3 E_3 \quad (\text{I-20})$$

Les trois axes Mx_1, Mx_2, Mx_3 de vecteurs unitaires respectifs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont les axes électriques (ou axes principaux) du milieu diélectrique au point M.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les permittivités diélectriques principales en M.

La permittivité diélectrique dépend donc de la direction considérée dans le milieu. On dit que le milieu diélectrique est anisotrope. Les vecteurs \vec{D} et \vec{E} ne sont pas colinéaires.

De même pour les composantes P_1, P_2 et P_3 du vecteur polarisation \vec{P} :

$$P_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \quad ; \quad P_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 \quad ; \quad P_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_0) E_3 \quad (\text{I-21})$$

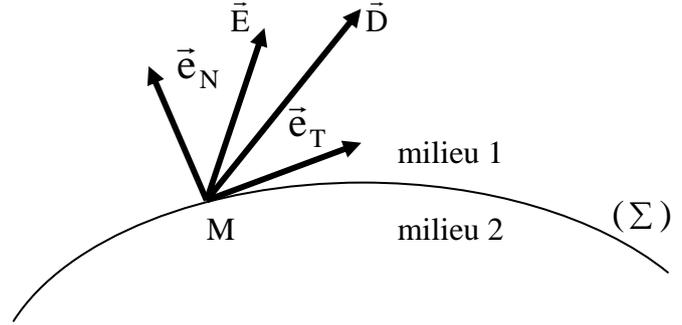
Les vecteurs \vec{P} et \vec{E} ne sont pas colinéaires.

- Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon(M)$ indépendant de la direction considérée le milieu est isotrope.
- Si ε ne dépend pas du point M considéré le milieu est homogène.

D'où l'appellation linéaire, homogène et isotrope des milieux diélectriques parfaits.

VI – Relations de passage, pour \vec{D} et \vec{E} , entre deux milieux

Au point M de la surface de séparation Σ
le vecteur \vec{D} s'exprime suivant les directions tangente et normale de vecteurs unitaires respectifs \vec{e}_T et \vec{e}_N par :



$$\vec{D} = D_T \cdot \vec{e}_T + D_N \cdot \vec{e}_N \quad \text{et} \quad \vec{E} = E_T \cdot \vec{e}_T + E_N \cdot \vec{e}_N$$

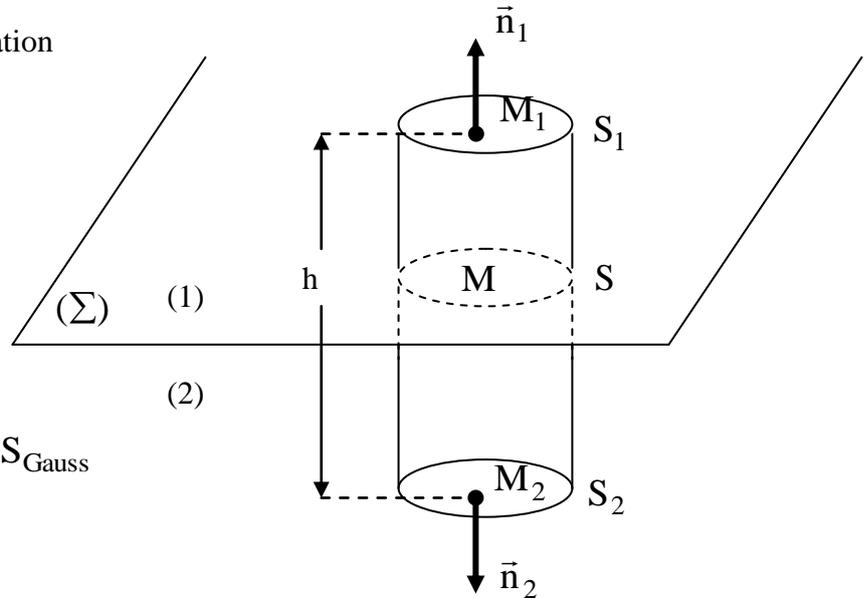
VI.1 Composante normale de \vec{D}

On applique le théorème de Gauss à une surface cylindrique fermée S_{Gauss} de hauteur h tendant vers zéro.

Considérons une surface de séparation plane (Σ) :

$$S_{\text{Gauss}} = S_1 + S_2 + S_L$$

$$\oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$



Q : charge mobile totale interne à S_{Gauss}

$$\oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{D}_1(M_1) \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2(M_2) \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \Phi_{\vec{D}/S_L} = \iiint_V \rho dV \quad (\text{I-22})$$

On veut établir la relation de passage à la surface de séparation entre les milieux (1) et (2), c'est à dire lorsque h tend vers zéro.

Lorsque $h \rightarrow 0$

$$S_L \rightarrow 0 \quad ; \quad \Phi_{\vec{D}/S_L} \rightarrow 0 \quad ; \quad S_1 \text{ et } S_2 \rightarrow S$$

$$M_1 \text{ et } M_2 \rightarrow M \in (\Sigma) \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{D}_1(M_1) &\rightarrow \vec{D}_1(M) \\ \vec{D}_2(M_2) &\rightarrow \vec{D}_2(M) \end{aligned}$$

$$\rho dV \rightarrow \sigma dS \quad ; \quad \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$$

L'expression du théorème de Gauss précédente devient dans ce cas :

$$\iint_{S_1} [\vec{D}_1(M) \cdot \vec{n}_1 - \vec{D}_2(M) \cdot \vec{n}_1] dS = \iint_S \sigma dS \quad (I-23)$$

Cette expression est vraie quelque soit dS , donc, on a nécessairement :

$$\vec{D}_1(M) \cdot \vec{n}_1 - \vec{D}_2(M) \cdot \vec{n}_1 = \sigma \quad (I-24)$$

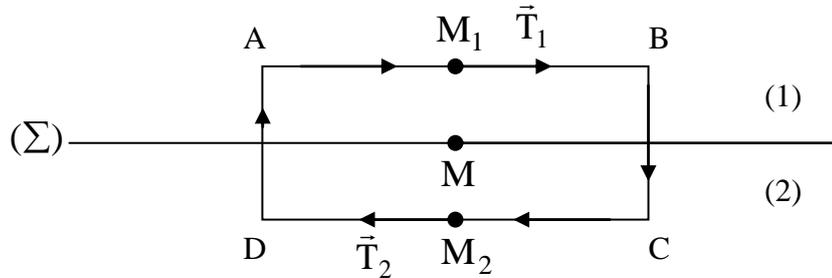
Conclusion : A la traversée d'une surface de séparation, entre deux milieux, contenant une charge surfacique réelle de densité σ , il y a discontinuité de la composante normale de \vec{D} .

VI.2 Composante tangentielle de \vec{E}

Le champ étant électrostatique, sa circulation est conservative :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Γ = contour fermée = rectangle ABCD



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{E}_1(M_1) \cdot d\vec{\ell}_{AB} \cdot \vec{T}_1 + \int_{CD} \vec{E}_2(M_2) \cdot d\vec{\ell}_{CD} \cdot \vec{T}_2 + C_{\vec{E}/BC} + C_{\vec{E}/DA} = 0$$

On s'intéresse à ce qui se passe à la surface de séparation (Σ), donc lorsque :

$$BC \text{ et } DA \rightarrow 0 \quad ; \quad C_{\vec{E}/BC} \text{ et } C_{\vec{E}/DA} \rightarrow 0$$

$$M_1 \text{ et } M_2 \rightarrow M \in (\Sigma) \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{E}_1(M_1) &\rightarrow \vec{E}_1(M) \\ \vec{E}_2(M_2) &\rightarrow \vec{E}_2(M) \end{aligned}$$

$$d\ell_{AB} = d\ell_{CD} = d\ell \quad ; \quad \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$$

La circulation de \vec{E} s'écrit donc :

$$\vec{E}_1(M) \cdot \vec{T}_1 = \vec{E}_2(M) \cdot \vec{T}_1 \quad (I-25)$$

Conclusion :

A la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux il y a continuité de la composante tangentielle de \vec{E} .

VII – Energie électrostatique en présence du champ B

VII.1 Densité volumique d'énergie

On démontre que la densité volumique d'énergie électrostatique emmagasinée dans un milieu où règne un champ électrique est égale à :

$$\varpi_e(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{D}}(\mathbf{M}) \cdot \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{M}) \quad (\text{I-26})$$

Dans le cas d'un milieu parfait (L.H.I.), $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}}$, la densité d'énergie s'écrit :

$$\varpi_e(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2(\mathbf{M}) = \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} D^2(\mathbf{M}) \quad (\text{I-27})$$

VII.2 Energie électrostatique

L'énergie électrostatique contenue dans un volume V d'un milieu diélectrique parfait est donnée par :

$$W_e = \iiint_V \varpi_e(\mathbf{M}) dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \iiint_V E^2(\mathbf{M}) dV = \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} \iiint_V D^2(\mathbf{M}) dV \quad (\text{I-28})$$

Chapitre II : Milieux aimantés

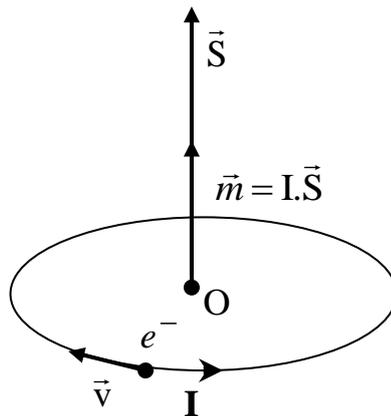
I- Introduction

Certains corps appelés aimants ont la propriété de créer autour d'eux un champ magnétique comme les courants électriques. Placés dans un champ d'induction magnétique ; ils subissent des actions analogues à celles subies par les courants.

Certaines substances possèdent naturellement ces propriétés (Exple. la magnétite de formule Fe_3O_4). D'autres ne les possèdent qu'après avoir été préalablement placés dans un champ d'induction magnétique appliqué. C'est l'aimantation induite (Exemple le fer Fe).

En effet les mouvements de rotation de l'électron autour du noyau (mouvement orbital) et de rotation des électrons autour d'eux-mêmes (rotation propre ou mouvement de spin) forment des boucles de courants ou dipôles magnétiques qui créent des champs magnétiques.

Un volume de matière aimantée contient à l'échelle atomique un grand nombre de circuits électriques fermés analogues à des dipôles magnétiques. Par analogie avec un milieu diélectrique, on appelle milieu aimanté un milieu contenant des dipôles magnétiques en grand nombre.

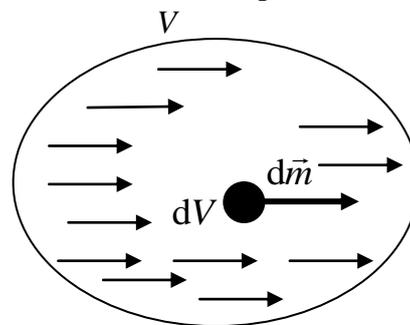


II- Vecteur aimantation \vec{J}

Soit volume V de matière magnétique. Un volume élémentaire dV pris autour d'un point M du milieu est équivalent à un dipôle magnétique élémentaire de moment dipolaire $d\vec{m}$.

On appelle vecteur aimantation le vecteur \vec{J} défini en tout point du milieu par la relation :

$$\vec{J} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad (\text{II-1})$$



Il représente le moment magnétique par unité de volume. Son module s'exprime en Ampère par mètre (A.m^{-1}).

III- Potentiel vecteur \vec{A}_d et champ d'induction magnétique \vec{B}_d créés par un milieu aimanté en un point N de l'espace

III.1 Potentiel vecteur \vec{A}_d

Rappel : cas d'un dipôle magnétostatique de moment \vec{m} (voir Electricité 2, chapitre I)

Le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétostatique en un point N situé à une distance r de son centre O est donné par :

$$\vec{A}_{\text{dipôle}}(\text{N}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{II-2})$$

C'est cette expression que nous allons exploiter pour déterminer l'expression du potentiel dû au milieu.

• Cas d'un milieu aimanté

$$\vec{MN} = \vec{r}$$

Un volume dV pris autour d'un point M du milieu est équivalent à un dipôle de moment :

$$d\vec{m} = \vec{J} \cdot dV \quad (\text{II-3})$$

Il crée au point N de l'espace un potentiel vecteur élémentaire

$d\vec{A}_d(\text{N})$ tel que :

$$d\vec{A}_d(\text{N}) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dV \quad (\text{II-4})$$

Le potentiel créé par tout le volume aimanté au point N est :

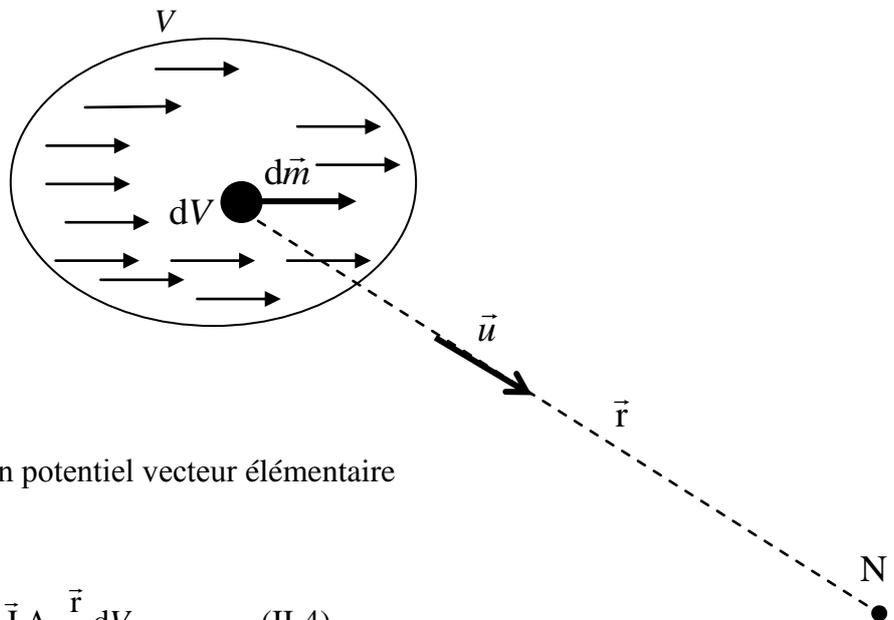
$$\vec{A}_d(\text{N}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) dV \quad (\text{II-5})$$

Or, on sait que si \vec{R} est un champ de vecteurs et f une fonction de scalaires on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \cdot \vec{R}) = f \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{R} - \vec{R} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Dans notre cas, $\vec{R} = \vec{J}$ et $f = \frac{1}{r}$, on a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) = \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{J}}{r} - \vec{J} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right)$$



Le potentiel vecteur créé par tout le volume du milieu aimanté en N s'écrit donc :

$$\vec{A}_d(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\text{rot } \vec{J}}{r} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \text{rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dS \quad (\text{II-6})$$

On rappelle également que :

$$\iiint_V \text{rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dV = \iint_S dS \cdot \vec{n} \wedge \frac{\vec{J}}{r} = - \iint_S \frac{\vec{J}}{r} \wedge \vec{n} \cdot dS$$

où S est la surface délimitant le volume V du milieu, \vec{n} est un vecteur unitaire de la normale à la surface S en un point N.

Soit donc :

$$\vec{A}_d(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\text{rot } \vec{J}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{J} \wedge \vec{n}}{r} \cdot dS \quad (\text{II-7})$$

Remarque : Cette expression est composée de deux termes :

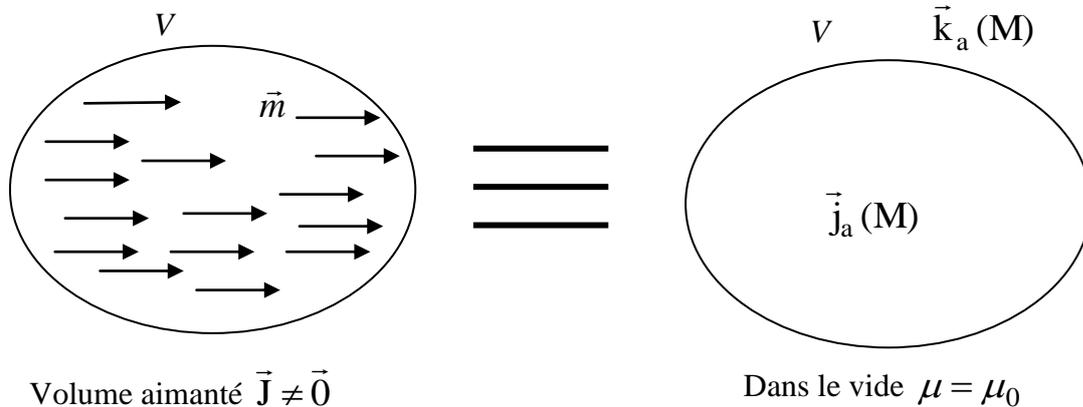
- le premier terme est analogue au potentiel vecteur créé par une distribution volumique de courant de densité $\vec{j}_a(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{J}(M)$.
- Le deuxième terme est analogue au potentiel vecteur créé par une distribution surfacique de courant de densité $\vec{k}_a(M) = \vec{J}(M) \wedge \vec{n}$

En conclusion :

Un volume de matière aimantée est équivalent à deux distributions de courant fictif :

- une distribution volumique de courant fictif d'aimantation : $\vec{j}_a(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{J}(M)$
- une distribution surfacique de courant fictif d'aimantation : $\vec{k}_a(M) = \vec{J}(M) \wedge \vec{n}$

Un volume aimanté est, donc, équivalent dans le vide à :



Remarque :

Si le milieu n'est pas aimanté (c'est-à-dire $\vec{J} = \vec{0}$ en tout point du volume) les courants fictifs d'aimantation sont nuls. Pour aimanter le volume magnétique on applique un champ d'induction

magnétique \vec{B}_0 qui va aligner les dipôles magnétiques dans une direction qui lui est parallèle, d'où un moment dipolaire global non nul et par suite un vecteur aimantation non nul.

Si le milieu contient en plus, des courants réels volumiques de densité \vec{j} , et surfaciques de densité \vec{k} , les densités totales de courant sont :

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\text{tot}} &= \vec{j} + \vec{j}_a = \vec{j} + \vec{\nabla} \wedge \vec{J} \\ \vec{k}_{\text{tot}} &= \vec{k} + \vec{k}_a = \vec{k} + \vec{J} \wedge \vec{n}\end{aligned}$$

Le potentiel vecteur total au point N est :

$$\vec{A}_{\text{tot}}(\text{N}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{tot}}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{k}_{\text{tot}}}{r} .dS \quad (\text{II-8})$$

Ce sont ces courants réels qui peuvent être à l'origine du champ magnétique éventuellement appliqué, pour aimanter le milieu, que l'on note en général \vec{B}_0 ou \vec{B}_{ext} .

III.2 Champ d'induction magnétique

Une fois le potentiel vecteur connu, le champ $\vec{B}_d(\text{N})$ est calculé à partir de la relation :

$$\vec{B}_d(\text{N}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_d(\text{N}) \quad (\text{II-9})$$

Le champ d'induction magnétique total au point N est :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_d(\text{N}) + \vec{B}_0 \quad (\text{II-10})$$

IV- Vecteur champ magnétique ou excitation magnétique \vec{H}

IV.1 Définition

Soit un volume de matière aimantée placé dans un champ d'induction magnétique \vec{B}_0 . La forme locale du théorème d'Ampère pour \vec{B} s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}_{\text{tot}} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_a) = \mu_0 (\vec{j} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J}) \quad (\text{II-11})$$

où : \vec{j} est la densité de courant réel qui crée \vec{B}_0 .

\vec{j}_a est la densité de courant fictif d'aimantation.

à partir de l'expression (II-11) on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}_{\text{tot}}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{j}$$

On appelle vecteur excitation ou champ magnétique le vecteur :

$$\vec{H}_{\text{tot}}(\text{M}) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}(\text{M})}{\mu_0} - \vec{J}(\text{M}) \quad (\text{II-12})$$

tel que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{II-13})$$

Cette relation exprime la forme locale du théorème d'Ampère généralisé.

Où :
$$\vec{H}_{\text{tot}}(\text{M}) = \vec{H}_o(\text{M}) + \vec{H}_d(\text{M})$$

$H_o(\text{M})$: l'excitation magnétique liée au champ B_o , par : $\vec{B}_o(\text{M}) = \mu_0 \vec{H}_o(\text{M})$

$H_d(\text{M})$: l'excitation démagnétisante du MA.

H s'exprime en Ampère par mètre ($A \cdot m^{-1}$).

IV.2 Théorème d'Ampère

IV.2.1 Théorème d'Ampère généralisé

La relation (II-12) implique :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \mu_0 (\vec{H}_{\text{tot}} + \vec{J}) \quad (\text{II-14})$$

Si on considère l'équation (II-13), et on calcule le flux de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}$ à travers une surface S on a :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

d'après le théorème de Stokes on obtient la forme intégrale du théorème d'Ampère généralisé :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}(\text{M}) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_{\text{réel}} \quad (\text{II-15})$$

(Γ) est une courbe fermée qui s'appuie sur la surface S .

I est l'intensité du courant réel total qui traverse la courbe fermée d'Ampère.

Remarque : cette forme d'intégrale fait intervenir le vecteur excitation magnétique H et ne dépend que du courant électrique réel (le courant qui est dû à un déplacement de charge libres)

IV.2.2 Théorème d'Ampère

Si on considère la relation (II-11), et on calcule le flux de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$ à travers une surface S on obtient :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S [\vec{j} + \vec{j}_a] \cdot d\vec{S}$$

d'après le théorème de Stokes on obtient la forme intégrale du théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\text{M}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S [\vec{j} + \vec{j}_a] \cdot d\vec{S} = \mu_0 (I_{\text{tot}}^{\text{réelle}} + I_{\text{tot}}^{\text{fictive}}) \quad (\text{II-16})$$

Remarque : cette forme d'intégrale fait intervenir le champ d'induction magnétique B . Elle dépend à la fois du courant électrique réel et du courant fictif.

V – Propriétés magnétiques de la matière

La relation $\vec{B}_{\text{tot}} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$ est générale. La classification macroscopique des milieux aimantés est basée sur les relations particulières qui existent entre ces trois vecteurs.

V.1 Milieux magnétiques parfait

V.1.1 Caractéristiques :

Ces milieux sont considérés parfaits ou LHI. Le vecteur aimantation \vec{J} est, en tout point du milieu, proportionnel à \vec{H} :

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H} \quad (\text{II-17})$$

où χ_m est un scalaire (nombre réel sans unité) qui représente la susceptibilité magnétique du milieu. Il est $\chi_m < 0$ pour les milieux diamagnétiques et $\chi_m > 0$ pour les milieux paramagnétiques.

Il existe deux types de matériaux parfaits : les diamagnétiques et les paramagnétiques

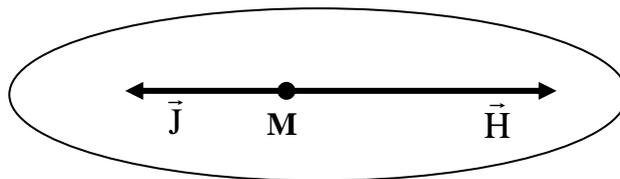
V.1.2 Milieux diamagnétiques

En l'absence du champ magnétique appliqué le moment magnétique global de chaque atome i (ou molécule) est nul :

$$\vec{m}_i = \sum_j \vec{m}_{\ell,j} + \sum_j \vec{m}_{s,j} = \vec{0}$$

par suite le moment magnétique global du milieu est nul : $\sum_i \vec{m}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{J} = \vec{0}$

Si on applique un champ magnétique, une aimantation induite apparaît en sens opposé à ce champ ($\chi_m < 0$). Si on annule ce champ l'aimantation s'annule instantanément.



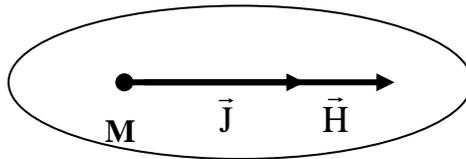
Exemples :

Milieu diamagnétique	χ_m à 20°C
Bismuth	$-16.6 \cdot 10^{-5}$
Carbone (diamant)	$-2.1 \cdot 10^{-5}$
Carbone (graphite)	$-1.6 \cdot 10^{-5}$
Cuivre	$-1.0 \cdot 10^{-5}$
Plomb	$-1.8 \cdot 10^{-5}$
Mercure	$-2.9 \cdot 10^{-5}$
Argent	$-2.6 \cdot 10^{-5}$
Eau	$-0.91 \cdot 10^{-5}$

V.1.3 Milieux paramagnétiques

En l'absence du champ magnétique appliqué les moments magnétiques des atomes (ou molécules) ne sont pas nuls $\vec{m}_i \neq \vec{0}$ (elles possèdent un moment magnétique permanent). Mais par suite de l'agitation thermique des atomes (ou molécules) du milieu, orientation désordonnée des moments \vec{m}_i , par suite le moment magnétique global du milieu est nul : $\sum_i \vec{m}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{J} = \vec{0}$

Si on applique un champ \vec{B}_0 , une aimantation induite apparaît dans le même sens que ce champ ($\chi_m > 0$). Si le champ appliqué disparaît, l'aimantation disparaît instantanément.



Exemples :

Milieu paramagnétique	χ_m (à 20°C)
Tungstène	$6.8 \cdot 10^{-5}$
Césium	$5.1 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Lithium	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Magnésium	$1.2 \cdot 10^{-5}$

Dans la relation générale $\vec{B}_{\text{tot}} = \mu_0 (\vec{H}_{\text{tot}} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}_{\text{tot}}$, on introduit le coefficient $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ qui représente la perméabilité magnétique absolue du milieu. Le champ d'induction magnétique s'écrit :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \mu \vec{H}_{\text{tot}} \quad (\text{II-18})$$

Le coefficient μ s'exprime en Henry par mètre ($\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$).

Le rapport $\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m = \mu_r$ représente la perméabilité magnétique relative du milieu.

Remarque : pour ces substances magnétiques parfaites (LHI) la susceptibilité magnétique est très faible ($\chi_m \ll 1$) ce qui implique que $\mu_r \approx 1 \Rightarrow \mu \approx \mu_0$ et $\vec{B}_{\text{tot}} = \mu_0 \vec{H}_{\text{tot}}$.

V.2 Milieux magnétiques non parfaits - Matériaux ferromagnétiques

V.2.1 Origine du ferromagnétisme

Le ferromagnétisme est la propriété que possèdent certains matériaux de s'aimanter très fortement sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, et pour certains d'entre-eux, appelés

aimants de garder une aimantation importante même après la disparition du champ appliqué (aimantation rémanente).

Remarque :

Le spin des électrons dans les atomes est la source principale du **ferromagnétisme**, bien qu'il y ait aussi une contribution du moment orbital de l'électron par rapport au noyau.

En présence d'un champ appliqué \vec{B}_0 tous les spins magnétiques et par suite moments magnétiques s'alignent totalement suivant \vec{B}_0 , et contribuent à une aimantation nette \vec{J} d'intensité importante, même si l'intensité du champ appliqué est faible. Cette aimantation induite n'est pas proportionnelle à ce champ et peut même ne pas lui être parallèle. En plus, cette aimantation induite se conserve lorsque le champ magnétique qui lui a donné naissance disparaît. On dit que ce type de matériau présente de l'hystérésis magnétique.

Les matériaux ferromagnétiques se distinguent donc des dia et paramagnétiques :

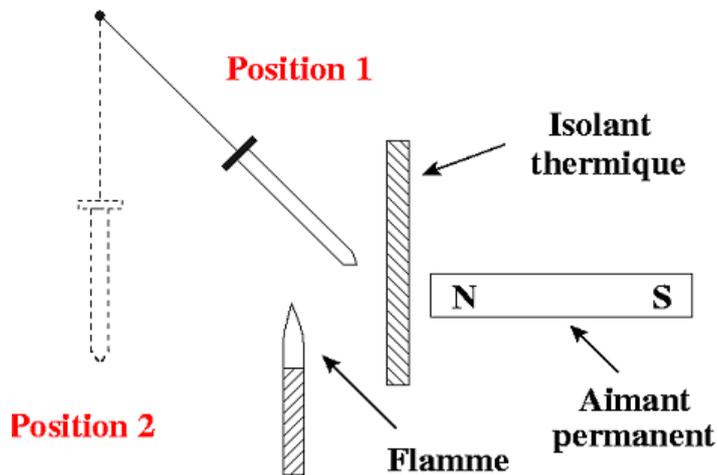
- ◆ ils ne conservent pas leur aimantation à champ nul.
- ◆ les vecteurs \vec{J} , \vec{B} et \vec{H} ne sont pas colinéaires : $J = f(H)$ et $B = g(H)$ ne sont plus des droites passant par l'origine.
- ◆ La susceptibilité magnétique χ_m et la perméabilité magnétique μ_r ne sont pas des constantes mais des fonctions de H : $\chi_m = \chi_m(H)$ et $\mu_r = \mu_r(H)$
- ◆ la perméabilité magnétique relative $\mu_r \gg 1$. Le fer pur peut atteindre (après traitement à haute température) une perméabilité $\mu_r = 1,4.10^6$.

Exemples : Le fer (Fe), le nickel (Ni), le cobalt (Co), les aciers, la magnétite (Fe_3O_4) qui constitue les aimants, etc ...

Le ferromagnétisme est important pour l'industrie et les nouvelles technologies car il est à la base de nombreux appareils électriques et électrochimiques : les électroaimants, les générateurs, les transformateurs et les mémoires magnétiques (cassettes, disques durs, etc...).

V.2.2 Influence de la température :

On suspend un clou de fer à une potence en face d'un aimant. Il est attiré fortement par l'aimant (position 1 sur la figure): il est ferromagnétique. Lorsque le clou est chauffé au-dessus d'une température ($T = 775^\circ C$ pour fer), il n'est plus attiré par un aimant (position 2 sur la figure) car il perd ses propriétés ferromagnétiques. Quant il se refroidit, ses propriétés ferromagnétiques réapparaissent; il est à nouveau attiré par l'aimant. Cette modification dans les propriétés magnétiques nous permettra d'obtenir un barreau de fer tout à fait désaimanté, en le portant au rouge et en le laissant refroidir en dehors de tout champ magnétique.



(Effet de la température sur les propriétés magnétiques)

Il existe une température caractéristique, dite température critique T_c (ou température de Curie), au-dessus de laquelle, les matériaux ferromagnétiques perdent leur propriété et se comportent comme des paramagnétiques.

- Si $T > T_c$: le matériau est paramagnétique
- Si $T < T_c$: le matériau est ferromagnétique

Exemple :

	T_c (K)
Fe	1043
Ni	631
Co	1397

Contrairement au dia et paramagnétisme qui traitaient essentiellement des ions ou molécules libres, le ferromagnétisme concerne les solides (atomes ou ions) et résulte d'une interaction au sein de la structure cristalline.

V.2.3 Notion de champ moléculaire

Les matériaux ferromagnétiques, possèdent une aimantation spontanée en l'absence de tout champ magnétique externe. Pour fonder une théorie du comportement de ces matériaux, Pierre Weiss (1907) a développé un modèle qui explique l'existence de cette aimantation par l'action d'un champ interne appelé champ moléculaire. Dans sa théorie, Weiss considère qu'un moment magnétique atomique est soumis à un champ résultant de la somme du champ appliqué \vec{H}_0 et du champ des autres moments magnétiques, appelé champ moléculaire \vec{H}_0 :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m \quad (\text{II-19})$$

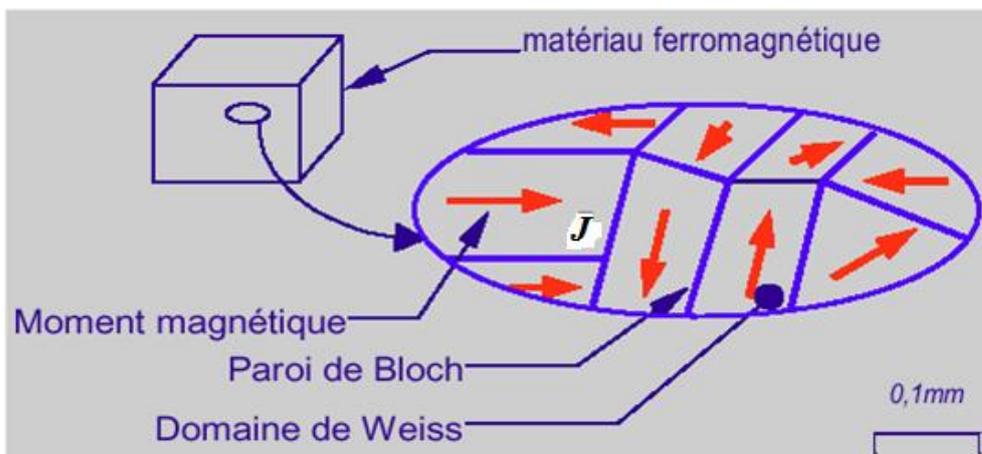
Ce champ moléculaire est proportionnel à l'aimantation locale \vec{J} :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m = \lambda \cdot \vec{J} \quad (\text{II-20})$$

où λ appelé coefficient du champ moléculaire, est une constante indépendante de la température et de l'aimantation.

V.2.4 Organisation en domaines

Les matériaux ferromagnétiques sont constitués d'atomes qui possèdent, chacun, un moment magnétique individuel. Ils se divisent en de multiples petits domaines, appelés domaines de Weiss, à l'intérieur desquels tous les atomes ont un moment magnétique parallèle.

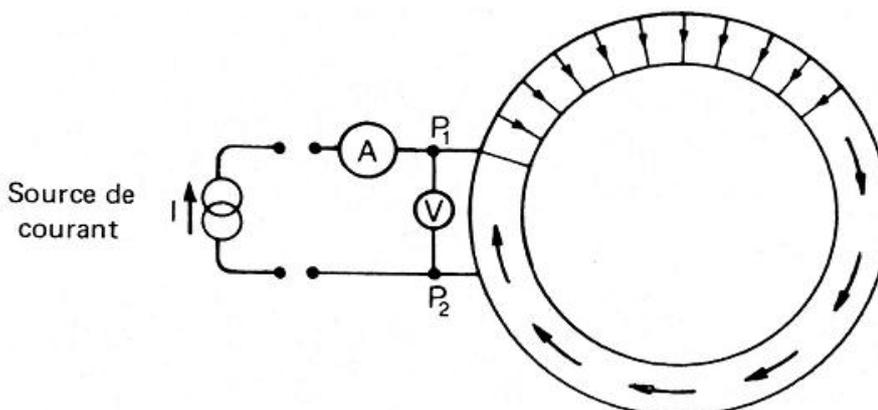


La région où l'aimantation passe progressivement d'une direction à l'autre est appelée paroi de domaine magnétique ou paroi de Bloch (c'est l'interface entre deux domaines d'aimantations différentes).

V.2.5 Mécanisme d'aimantation des matériaux ferromagnétiques

V.2.5.1 Courbe de première aimantation

Pour aimanter un matériau ferromagnétique, qui n'a jamais été aimanté, ou qui a été désaimanté, on en place un échantillon, dans une bobine torique (N spires parcourues par un courant I) de faible section S et de longueur moyenne ℓ .



On mesure alors les intensités des champs B et H.

L'application du théorème d'Ampère sur une courbe fermée (cercle) à l'intérieur du tore donne :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{libre} \Rightarrow H \cdot \ell = N \cdot I \Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{\ell} \quad (\text{II-21})$$

- L'Ampèremètre (A) affiche l'intensité I du courant dans le solénoïde ce qui permet d'obtenir la valeur de l'intensité de H (équation II-21).
- Le voltmètre mesure la d.d.p aux bornes du solénoïde quand on modifie l'intensité I :

$$V_1 - V_2 = - \left(- \frac{d\phi}{dt} \right) = NS \frac{dB}{dt} \quad (\text{II-22})$$

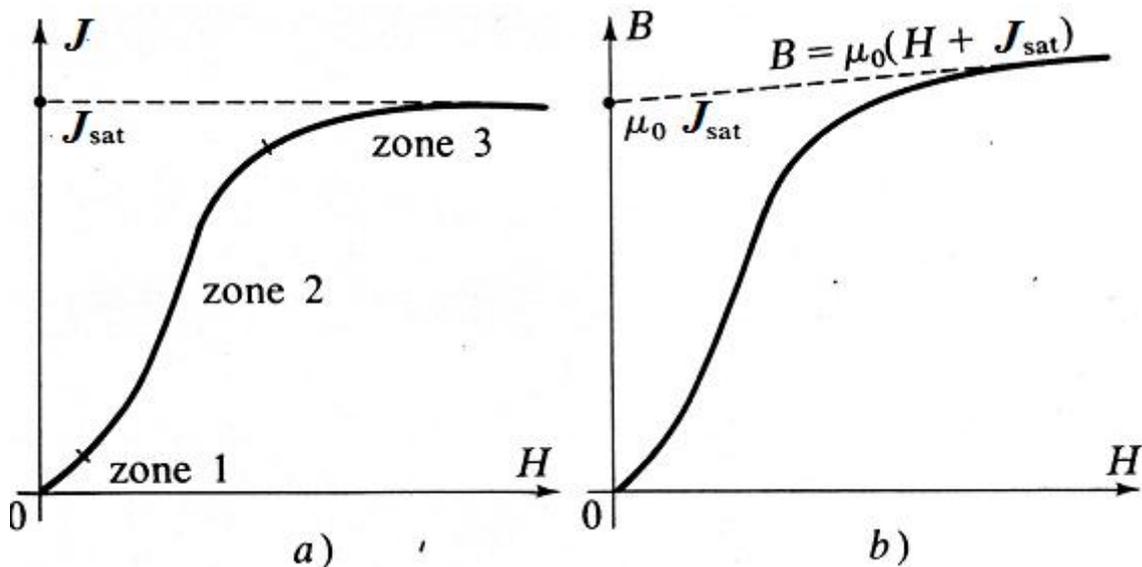
En intégrant sur le temps, on en déduit B :

$$B = \frac{1}{NS} \int_{t_1}^{t_2} (V_1 - V_2) \cdot dt \quad (\text{II-23})$$

- Connaissant H et B on en déduit le module de l'aimantation M.

$$J = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (\text{II-24})$$

La courbe J (H) ou B(H) obtenue est appelée courbe de première aimantation.



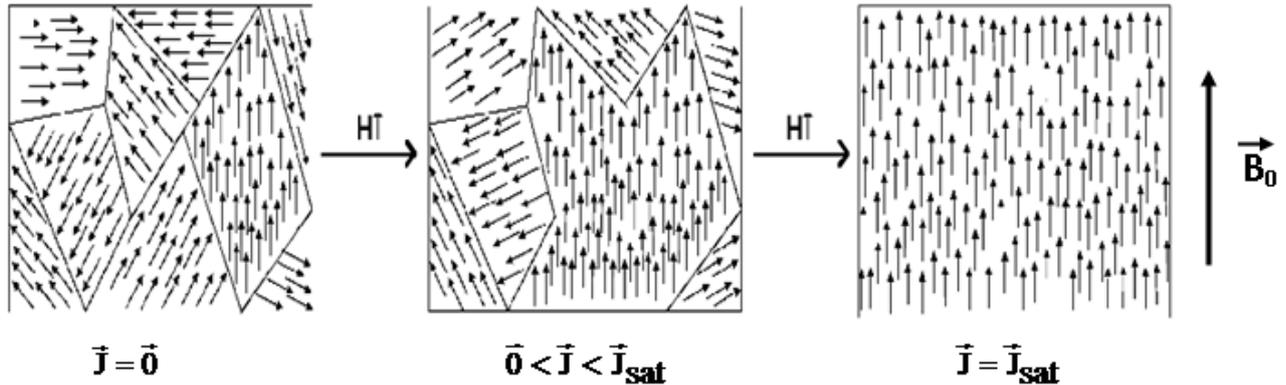
Courbes de première aimantation : (a) J(H), (b) B(H).

La courbe de 1^{ère} aimantation comprend 3 zones :

- la zone 1 : quasiment linéaire
- la zone 2 : à croissance plus rapide
- la zone 3 : de saturation (aimantation à saturation J_{sat}).

- à $T = 300 \text{ K}$, J_{sat} du fer est atteinte pour $H = 105\text{-}106 \text{ A/m}$, soit pour $B = \mu_0 H = 0.1 - 1 \text{ T}$.
- Pour le mumétal (μ -métal est un alliage de Ni, de Fe, de Mo et de C), il faut $H = 10 \text{ A/m}$, soit pour $B = 10^{-5} \text{ T}$.

Sous l'action d'un champ B_0 , l'aimantation, dans ces différents domaines, tend à s'aligner dans le sens de ce champ, ce qui confère au matériau une forte aimantation nette d'intensité importante. Si on augmente suffisamment le champ, on atteint alors une limite d'aimantation : le matériau devient saturé.



Les frontières entre les domaines sont des zones où l'aimantation change de direction.

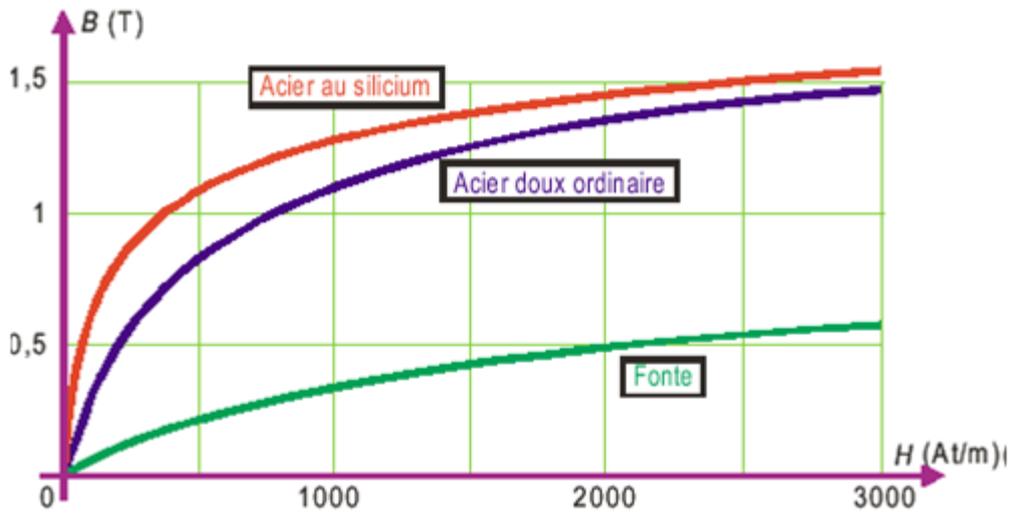
Sous l'effet d'un champ magnétique croissant, il y a :

- déplacement des parois de Bloch
- grossissement des domaines énergétiquement favorisés et disparition des autres.

Le mécanisme d'aimantation comporte donc trois principaux phénomènes qui se produisent successivement en fonction de l'intensité du champ magnétique appliqué :

- Le premier mécanisme d'aimantation est le mouvement élastique des parois de domaines, qui se produit aux champs magnétiques faibles, et qui représente une aimantation spontanément réversible du matériau. Le mouvement des parois amène une augmentation de l'énergie totale du système mais ne permet pas de franchir la barrière de potentiel; le système retourne donc naturellement à l'état initial si le champ appliqué est annulé.
- Le second mécanisme d'aimantation est le mouvement irréversible des parois de domaines, qui provoque le franchissement de certaines barrières de potentiel. Lors du retrait du champ magnétique appliqué, on ne retrouve donc pas la même répartition en domaines. Il existe un nouvel état métastable qui explique l'apparition d'une aimantation moyenne non nulle sous champ nul. Cette aimantation est qualifiée de rémanente.
- Le troisième mécanisme d'aimantation se produit lorsque le matériau ne comporte que des domaines possédant une composante alignée avec les directions d'aimantation facile des cristaux

les plus proches de la direction du champ. L'augmentation du champ magnétique appliqué cause alors une rotation de l'orientation de l'aimantation à l'intérieur de ces domaines pour s'aligner avec le champ magnétique appliqué.



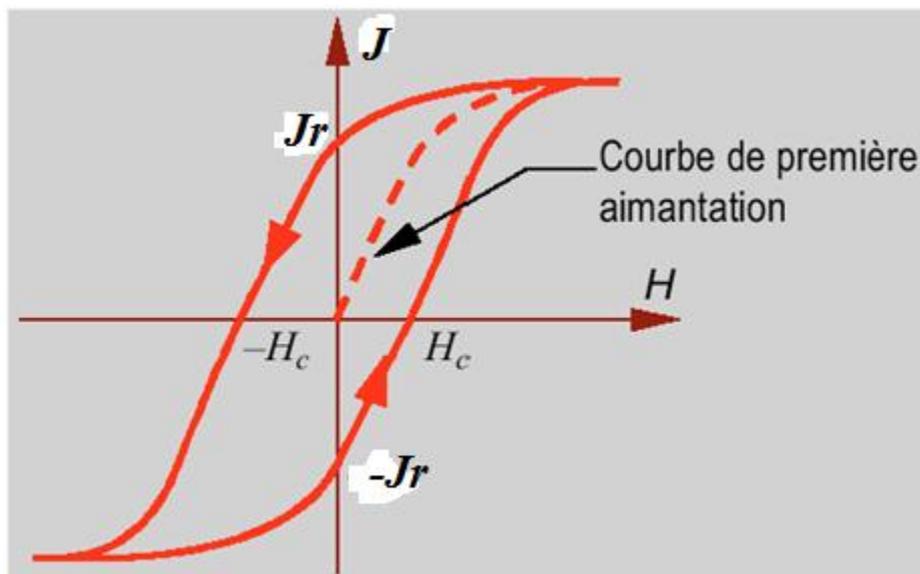
Courbe de première aimantation de matériaux courants

V.2.5.2 Cycle d'hystérésis

Une fois l'aimantation à saturation J_{sat} est atteinte (le matériau étant magnétisé), on diminue le champ H .

♦ l'aimantation J décroît, en conservant pour chaque valeur de H , une intensité supérieure à celle qu'elle avait au cours de la première aimantation.

Si on fait varier le champ entre deux limites symétriques ($+H_m$) et ($-H_m$) on obtient un cycle stable, appelé **cycle d'hystérésis**.



On constate que :

◆ Pour $H = 0$, $M \neq 0$. Cette aimantation qui se conserve après disparition du champ est appelée **aimantation rémanente** J_r . C'est le phénomène d'**hystérésis magnétique**.

◆ Pour annuler l'aimantation J_r , il faut appliquer une excitation magnétique négative ($-H_c$), appelée **excitation coercitive (ou champ coercitif)**.

V.2.5.3 Classification des corps ferromagnétiques

L'étude du ferromagnétisme est extrêmement compliquée. Les propriétés magnétiques d'un matériau métallique dépendent de tous les états antérieurs par lesquels le métal est passé. Elles sont différentes suivant que le matériau est doux ou dur.

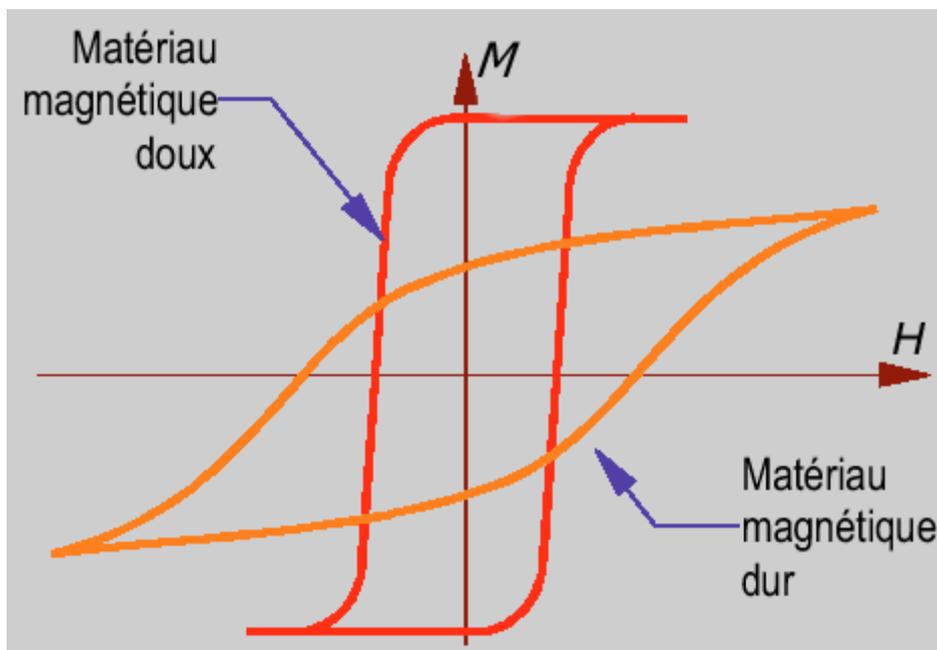
◆ Matériaux ferromagnétiques doux :

- l'aimantation croît rapidement avec le champ appliqué. Ils sont caractérisés par :

* un cycle d'hystérésis étroit

* les champs B_r et H_c sont faibles ($H_c < 1000$ A/m)

* Ils s'aimantent et se désaimantent très facilement.



Ils sont composés des éléments principaux Fer, Cobalt, Nickel, Magnésium, Silicium,

Exemple : les alliages Fe-Si, fer-nickel et fer-cobalt, les ferrites douces et les alliages métalliques amorphes et polycristallins.

Utilisation : On les utilise pour réaliser des circuits magnétiques de machines (moteurs, transformateurs)

♦ Matériaux ferromagnétiques durs :

Ils sont caractérisés par :

* un cycle d'hystérésis très large.

* B_r et H_c très élevés (B_r entre 0.2 et 1.3 T, H_c entre 50 et 1 500 kA/m)

* Ils s'aimantent et se désaimantent très difficilement

Exemple : La magnétite, les alliages d'aluminium (Al), de nickel (Ni), de cobalt (Co) de fer (Fe), du cuivre (Cu) et du titane (Ti).

Ce sont des matériaux magnétiques possédant la plus haute température de Curie (environ $T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C}$)

Utilisation : On les utilise pour fabriquer des aimants permanents.

VI- Energie perdue au cours d'un cycle d'hystérésis

En utilisant le montage en bobine torique (paragraphe V.2.5.1), la puissance électrique fournie s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Avec} \quad V_1 - V_2 &= NS \frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad I = \frac{H\ell}{N} \\ P &= (V_1 - V_2)I = H\ell S \frac{dB}{dt} \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

Le travail (volumique) dW fourni au matériau pour faire varier le champ dB (le volume est $S.\ell$) est :

$$dW = \frac{Pdt}{S.\ell} = HdB$$

L'énergie magnétique volumique fournie pour décrire un cycle d'hystérésis est donc :

$$\begin{aligned} W &= \oint HdB = \oint Hd[\mu_0(H + J)] = \\ &= \mu_0 \oint HdH + \mu_0 \oint H.dJ \end{aligned} \quad (\text{II-26})$$

$$\text{Or} \quad \mu_0 \oint HdH = \left[\frac{1}{2} H^2 \right]_{\text{cycle}} = 0$$

D'où l'énergie magnétique volumique :

$$W = \mu_0 \oint H.dJ \quad (\text{II-27})$$

Remarque :

L'énergie magnétique volumique dissipée est le produit de μ_0 par l'aire du cycle d'hystérésis en coordonnées (H, J). En coordonnées (B,H) l'énergie est directement l'aire du cycle d'hystérésis :

$$W = \oint B.dH \quad (\text{II-28})$$

VII – Relations de passage entre deux milieux pour \vec{B} et \vec{H}

Soient B_T, H_T, B_N et H_N les composantes tangentielles et normales de \vec{B} et \vec{H} en un point M de la surface de séparation (Σ) entre deux milieux de perméabilités magnétiques respectives μ_1 et μ_2 .

$$\vec{B} = B_T \cdot \vec{T} + B_N \cdot \vec{n}$$

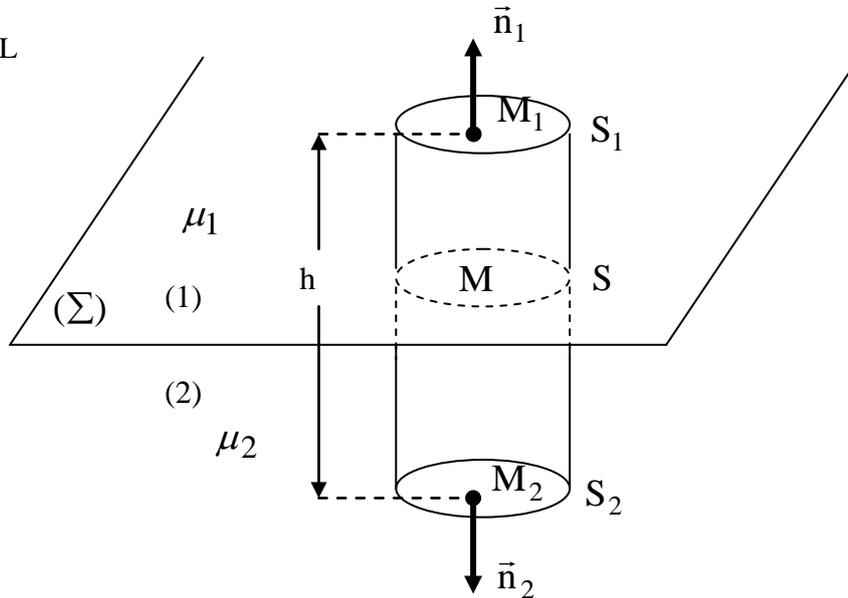
$$\vec{H} = H_T \cdot \vec{T} + H_N \cdot \vec{n}$$

VII.1 Composante normale de \vec{B}

On utilise la conservation du flux magnétique $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

On choisit comme surface fermée (S) un cylindre de hauteur h et de surfaces de base $S_1 = S_2$.

$$S = S_1 + S_2 + S_L$$



$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B}_1(M_1) \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{B}_2(M_2) \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \Phi_{\vec{B}/S_L} = 0$$

On veut établir la relation de passage à la surface de séparation entre les milieux (1) et (2), c'est à dire lorsque h tend vers zéro.

Lorsque $h \rightarrow 0$

$$S_L \rightarrow 0 \quad ; \quad \Phi_{\vec{B}/S_L} \rightarrow 0$$

$$S_1 \text{ et } S_2 \rightarrow S \quad ; \quad dS_1 = dS_2 = dS_\Sigma$$

$$M_1 \text{ et } M_2 \rightarrow M \in (\Sigma) \quad ; \quad \begin{array}{l} \vec{B}_1(M_1) \rightarrow \vec{B}_1(M) \\ \vec{B}_2(M_2) \rightarrow \vec{B}_2(M) \end{array} \quad ; \quad \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$$

La relation de conservation du flux magnétique s'écrit :

$$\iint_S (B_1(M) \cdot \vec{n}_1 - B_2(M) \cdot \vec{n}_1) \cdot d\vec{S} = 0$$

Cette expression est vraie quelque soit dS , donc , on a nécessairement :

$$\vec{B}_1(M) \cdot \vec{n}_1 - \vec{B}_2(M) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{II-28})$$

Conclusion :

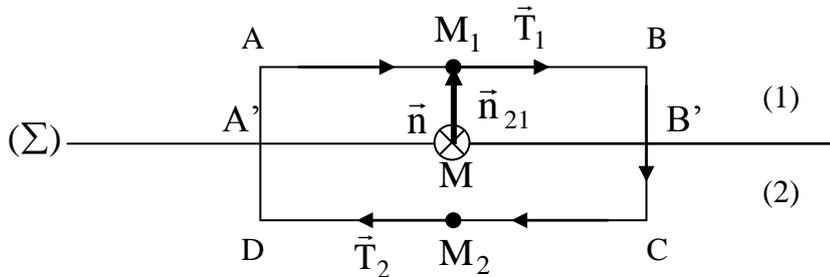
A la traversée d'une surface de séparation, entre deux milieux il y a continuité de la composante normale de \vec{B} .

VII.2 Composante tangentielle de \vec{H}

On suppose que la surface de séparation (Σ) entre les deux milieux est parcourue par un courant surfacique de densité \vec{k} et on applique le théorème d'Ampère généralisé :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{réel}}$$

Γ = contour fermée = rectangle ABCD



$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{H}_1(M_1) \cdot d\vec{\ell}_{AB} \cdot \vec{T}_1 + \int_{CD} \vec{H}_2(M_2) \cdot d\vec{\ell}_{CD} \cdot \vec{T}_2 + C_{\vec{H}/BC} + C_{\vec{H}/DA} = \int_{A'B'} \vec{k} \cdot \vec{n} \cdot d\ell_{A'B'}$$

On s'intéresse à ce qui se passe à la surface de séparation (Σ), donc lorsque :

$$BC \text{ et } DA \rightarrow 0 \quad ; \quad d\ell_{AB} = d\ell_{CD} = d\ell_{A'B'} = d\ell \quad ; \quad \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$$

$$M_1 \text{ et } M_2 \rightarrow M \in (\Sigma) \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{H}_1(M_1) &\rightarrow \vec{H}_1(M) \\ \vec{H}_2(M_2) &\rightarrow \vec{H}_2(M) \end{aligned}$$

$$C_{\vec{E}/BC} \text{ et } C_{\vec{E}/DA} \rightarrow 0$$

La circulation de \vec{H} s'écrit donc :

$$\int_{A'B'} (\vec{H}_1(M) \cdot \vec{T}_1 - \vec{H}_2(M) \cdot \vec{T}_1) \cdot d\ell = \int_{A'B'} \vec{k} \cdot \vec{n} \cdot d\ell$$

Vrai quelque soit $d\ell$, donc pour :

$$\vec{H}_1(M) \cdot \vec{T}_1 - \vec{H}_2(M) \cdot \vec{T}_1 = \vec{k} \cdot \vec{n}$$

soit encore :

$$\vec{H}_1(M) \cdot \vec{T}_1 - \vec{H}_2(M) \cdot \vec{T}_1 = \vec{k} \cdot (\vec{n}_{21} \wedge \vec{T}_1) \quad (\text{II-29})$$

Conclusion : A la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux, parcourue par des courants réels, il y a discontinuité de la composante tangentielle de \vec{H} .

VIII – Energie magnétique en présence de \vec{B} et \vec{H}

Comme pour les milieux diélectriques, on démontre que l'énergie magnétique emmagasinée dans un volume V de matériau placé dans une région où règne un champ magnétique est égale à :

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}(M) \cdot \vec{B}(M) \cdot dV \quad (\text{II-30})$$

La densité volumique d'énergie magnétique est :

$$\varpi_m = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \vec{H}(M) \cdot \vec{B}(M) \quad (\text{II-31})$$

Si le milieu est parfait (L.H.I.), $\vec{B} = \mu \vec{H}$ et la densité d'énergie magnétique s'écrit :

$$\varpi_m = \frac{1}{2} \mu H^2(M) = \frac{1}{2\mu} B^2(M) \quad (\text{II-32})$$

La densité d'énergie électromagnétique est alors donnée par :

$$\varpi_{em} = \varpi_e + \varpi_m = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2(M) + \mu H^2(M) \right) \quad (\text{II-33})$$

L'énergie électromagnétique emmagasinée dans un milieu parfait où règne un champ électrique et magnétique est donnée par :

$$W_{em} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2 \right) \quad (\text{II-34})$$

Chapitre III : Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels linéaires

Dans de tels milieux une onde électromagnétique est caractérisée par quatre vecteurs $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$.

I – Equations de MAXWELL

Elles ont la même forme que dans le vide (Cours d'électricité 2 , Module Electromagnétisme dans le vide), il suffit de changer ϵ_0 en ϵ et μ_0 en μ :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{Relation de MAXWELL - GAUSS} \quad (\text{III-1})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Conservation du flux magnétique} \quad (\text{III-2})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Relation de MAXWELL - FARADAY} \quad (\text{III-3})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad \text{Relation de MAXWELL - AMPERE} \quad (\text{III-4})$$

ϵ et μ sont liées par la relation $\mu \epsilon v^2 = 1$, où v est la vitesse de propagation de l'onde.

Ces équations de Maxwell s'appliquent dans tous les cas, au sein d'un milieu continu. Pour résoudre un problème particulier on écrira à côté, les relations dépendant de la nature du milieu. Ainsi, dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, on écrira :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{III-5})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{III-6})$$

ϵ est la permittivité diélectrique absolue et μ la perméabilité magnétique absolue du milieu.

De plus, dans le cas d'un milieu conducteur obéissant à la loi d'Ohm, on écrira la relation supplémentaire :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (\text{III-7})$$

où : \vec{j} est la densité de courant de conduction (courant réel) et γ la conductivité électrique du milieu.

Les quatre champs doivent satisfaire en tous les points du milieu à ces équations. On démontre que l'ensemble se propage dans le temps et dans l'espace.

II – Equations de propagation

II.1 Champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B})

II.1.1 Champ électrique

Rappel : Soit \vec{P} un champ de vecteurs on a : $\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{P}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{P}) - \Delta \vec{P}$

Pour le champ \vec{E} : $\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$

Le premier membre donne :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = -\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Le second membre s'écrit : $\overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) - \Delta \vec{E}$

d'où l'équation de propagation du champ \vec{E} :

$$\left[\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right] \quad (\text{III-8})$$

II.1.2 Champ d'induction magnétique :

De la même façon on considère :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$$

Le premier membre donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \mu \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{j} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

d'où l'équation de propagation du champ \vec{B} :

$$\left[\Delta \vec{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \vec{\nabla} \wedge \vec{j} \right] \quad (\text{III-9})$$

II.2 Potentiels vecteur \vec{A} et scalaire V

Rappel :

On sait que \vec{B} dérive du potentiel vecteur \vec{A} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

En plus, en régime variable le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le choix de la jauge (\vec{A}, V) n'est pas unique pour une distribution donnée des champs \vec{E} et \vec{B} .

II.2.1 Choix de la jauge de potentiel

Pour que les champs \vec{E} et \vec{B} se conservent il faut se fixer une condition pour la jauge (\vec{A}, V).

La condition la plus commode que doit satisfaire ce couple de potentiel est la condition de Lorentz, donnée par :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \vec{A}(\infty) = 0 \\ V(\infty) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

II.2.2 Equations de propagation du potentiel vecteur \vec{A}

Dans l'équation de Maxwell N°4' on remplace :

$$\vec{B} \text{ par } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} \text{ par } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

on obtient l'équation de propagation du potentiel vecteur :

$$\left[\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \right] \quad (\text{III-11})$$

II.2.3 Equations de propagation du potentiel scalaire V

Dans l'équation de Maxwell N°1, on remplace \vec{E} par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\text{soit : } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0$$

A partir de la condition de LORENTZ on remplace $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ par $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$, d'où l'équation :

$$\left[\Delta V - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \right] \quad (\text{III-12})$$

Remarque :

L'équation homogène est, donc, la même pour \vec{E} , \vec{B} , \vec{A} et V :

$$\text{Soit : } \quad \square \Psi(M, t) = 0 \quad (\text{III-13})$$

Où : $\square = \Delta - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ (opérateur mathématique appelé d'Alembertien)

L'ensemble des composantes de \vec{E} , \vec{B} , \vec{A} et du potentiel V constituent une onde électromagnétique qui se propage dans l'espace et le temps.

II.3 Solution de l'équation d'onde

Les solutions sont identiques à celles que l'on avait dans le vide. C'est à dire de la forme :

$$\Psi = f\left(t - \frac{u}{v}\right) + g\left(t + \frac{u}{v}\right) \quad (\text{III-14})$$

$f\left(t - \frac{u}{v}\right)$ correspond à une onde progressive et $g\left(t + \frac{u}{v}\right)$ à une onde régressive.

u est la coordonnée de la direction de propagation .

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ est la vitesse de phase de l'onde dans le milieu : $v = \frac{\omega}{k}$

III – Onde électromagnétique plane progressive monochromatique (OEMPM)

Une onde est dite monochromatique si les composantes du champ EM ainsi que les potentiels vecteur et scalaire s'écrivent :

$$\Psi(M, t) = \Psi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi)$$

$\vec{k} = k \cdot \vec{e}_u$ dirigé suivant la direction de propagation.

Une OEM est dite plane si

- L'amplitude Ψ_0 est constante
- $\Psi(M, t)$ dépend uniquement de la coordonnée du point M suivant la direction de propagation.

III.1 Caractéristiques de l'onde plane

• Orthogonalité de l'onde plane :

\vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires entre eux $\vec{E} \perp \vec{B}$

• **Transversalité de l'onde plane :**

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont contenus dans un plan (plan d'onde) perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde plane. On parle d'onde Transverse Electromagnétique (TEM).

Les champs \vec{E} et \vec{B} forment avec le vecteur d'onde \vec{k} un trièdre direct.

On aura également la relation de structure de l'onde plane :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{1}{v} \vec{e}_u \wedge \vec{E} \Rightarrow B = \frac{E}{v} \quad (\text{III-15})$$

III.2 Energie transportée par une OEM dans un milieu matériel

III.2.1 Vecteur de Poynting

On définira le vecteur de Poynting par la relation :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \quad (\text{III-16})$$

son module est donné par :

$$R = \frac{E \cdot B}{\mu} = \frac{E^2}{\mu \cdot v} = \epsilon \cdot v \cdot E^2$$

Unité de R : Watt / m²

si \vec{e}_u est le vecteur unitaire de la direction de propagation : $\vec{R} = \epsilon \cdot v \cdot E^2 \cdot \vec{e}_u$

Les densité volumiques des énergies électrique et magnétique sont égales :

$$\frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{\mu H^2}{2}$$

La densité d'énergie électromagnétique totale est donc :

$$\omega_{tot} = \omega_e + \omega_m = \epsilon \cdot E^2 = \frac{B^2}{\mu} \quad (\text{III-17})$$

donc le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \omega_{tot} \cdot v \cdot \vec{e}_u \quad (\text{III-18})$$

III.2.2 Puissance électromagnétique transportée par l'OEM

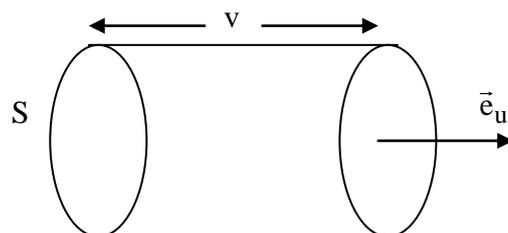
La puissance électromagnétique qui traverse une surface (S) de vecteur unitaire \vec{e}_u est :

$$P = \iint_S \vec{R} \cdot dS \cdot \vec{e}_u = \iint_S \omega_{tot} \cdot v \cdot dS \quad (\text{III-19})$$

soit $P = W_{tot}$

Où W est l'énergie électromagnétique qui traverse la surface (S) pendant l'unité de temps.

La longueur du cylindre est $L = vdt = v$ pendant l'unité de temps $dt = 1$ seconde.



Commentaire :

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface (S) est égal à l'énergie électromagnétique contenue dans un volume cylindrique de base (S), de longueur v allongé parallèlement à la direction de propagation de vecteur unitaire \vec{e}_u . L'énergie se propage donc avec la vitesse v . Ce flux représente la puissance électromagnétique qui traverse une surface (S), de vecteur unitaire \vec{e}_u .

III.3 Polarisation des ondes planes monochromatiques

On considère une OEMPM qui se propage suivant l'axe Ox d'un repère cartésien. Le vecteur d'onde est donc parallèle à Ox :

$$\vec{k} = k \cdot \vec{e}_x$$

L'équation du plan d'onde qui contient les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ est : $x = Cste$

Le champ électrique de cette onde, en un point M et à l'instant t, dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est :

$$\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega.t - k.x) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega.t - k.x + \varphi) \end{cases}$$

φ est le déphasage entre les composantes E_y et E_z

Par convention l'état de polarisation de l'onde en un point est celle de son champ électrique.

III.3.1 Différents états de polarisation

Pour déterminer l'état de polarisation de l'onde on étudie le mouvement de l'extrémité du vecteur \vec{E} dans un plan d'onde, ce qui revient à établir une relation entre E_z et E_y indépendante du temps.

III.3.1.1 Polarisation elliptique

Elimination du temps t :

$$\begin{aligned} E_y &= E_{0y} \cos(\omega.t - k.x) \\ E_z &= E_{0z} \cos(\omega.t - k.x) \cos\varphi - E_{0z} \sin(\omega.t - k.x) \sin\varphi \end{aligned}$$

La 1^{ère} composante donne :

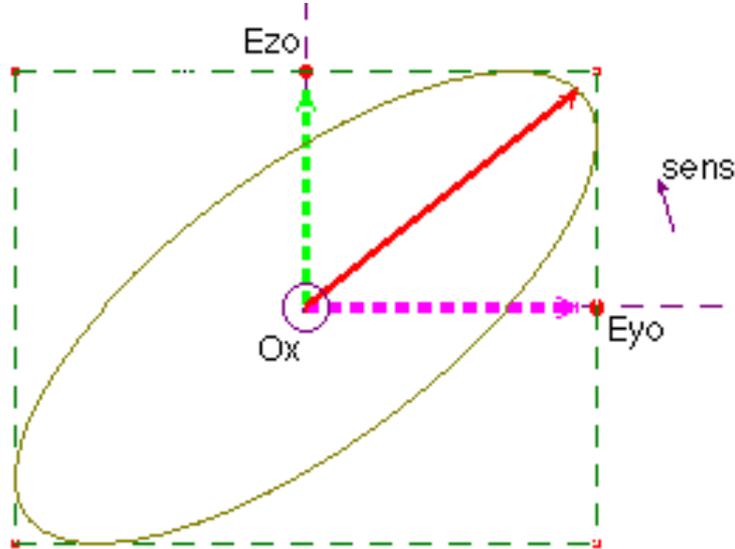
$$\cos(\omega.t - kx) = \frac{E_y}{E_{0y}}$$

$$\sin(\omega.t - k.x) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega.t - kx)} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2}$$

On introduisant ces 2 expressions de la 2^{ème} composante, on obtient l'équation :

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2} - 2 \frac{E_y E_z \cos \varphi}{E_{0y} E_{0z}} = \sin^2 \varphi$$

C'est l'équation d'une ellipse inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{0y}$ et $2E_{0z}$. Elle est décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} .



- Si $\pi < \varphi < 2\pi$: l'extrémité de \vec{E} se déplace dans le sens trigonométrique, on parle de polarisation elliptique gauche.
- Si $0 < \varphi < \pi$: l'extrémité de \vec{E} se déplace dans le sens contraire, la polarisation est elliptique droite.

III.3.1.2 Polarisation circulaire

Si $\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ et $E_{0y} = E_{0z} = E_0$

$$\frac{E_y^2}{E_0^2} + \frac{E_z^2}{E_0^2} = 1 \Rightarrow E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$$

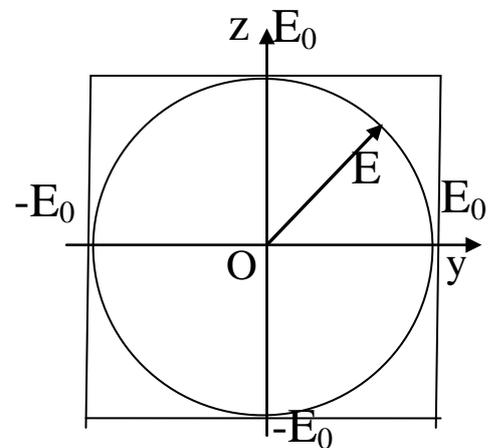
L'extrémité de \vec{E} décrit un cercle de centre (0,0) et de rayon E_0 .

III.3.1.3 Polarisation rectiligne

Si $\varphi = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) l'équation devient :

$$\frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} \Rightarrow E_z = \mp \frac{E_{0z}}{E_{0y}} E_y$$

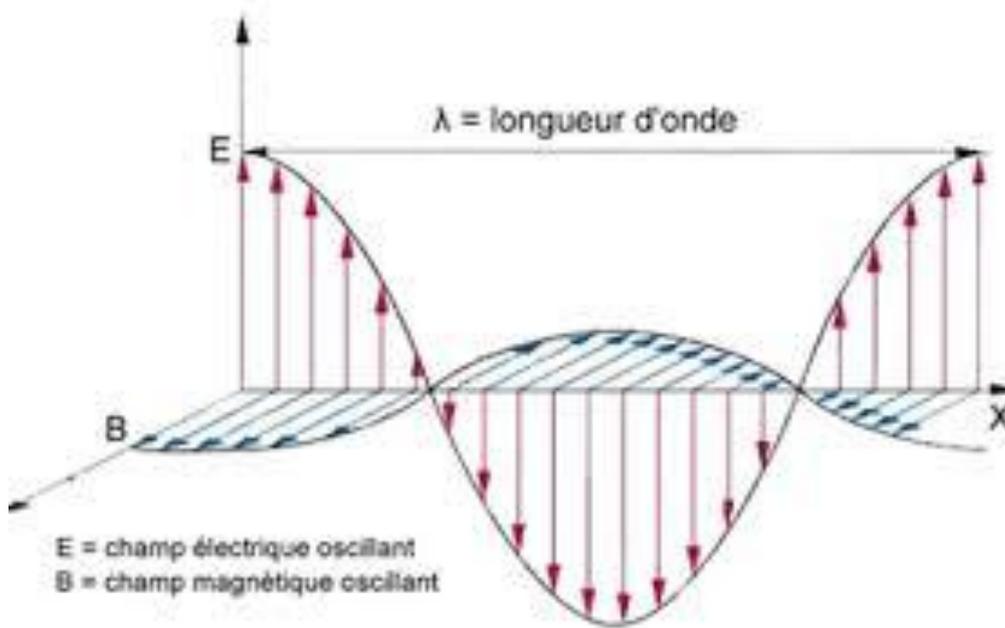
Le vecteur \vec{E} garde une direction fixe. Il vibre le long d'un segment : L'onde est polarisée rectilignement.



Pour une OEM :

- se propageant suivant Ox : $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_x$,
- polarisée rectilignement suivant Oy : $\vec{E}(M, t) = E_y(M, t) \vec{e}_y$

A un instant t donné, en différents points de l'axe Ox le champ EM a l'allure suivante :



IV – Propagation dans les milieux conducteurs non magnétiques

De tels milieux sont caractérisés par : $\rho = 0$, $\mu = \mu_0$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

IV.1 Cas des conducteurs ordinaires

IV.1.1 Equations de propagation de \vec{E} et \vec{B} en notation complexe

Les équations d'onde (II-8) et (III-9) s'écrivent :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{III-20})$$

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \gamma \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{III-21})$$

Pour une OEM plane sinusoïdale qui se propage le long de l'axe Oz, les opérateurs $\vec{\nabla}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ et Δ s'expriment par :

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad ; \quad \vec{\nabla} = -i\vec{k} \quad ; \quad \Delta = -k^2$$

les équations d'onde en notation complexe s'écrivent comme suit :

$$\left(-k^2 + \mu_0 \varepsilon \omega^2 - i \mu_0 \gamma \omega \right) \vec{E} = 0 \quad (\text{III-22})$$

$$\left(-k^2 + \mu_0 \varepsilon \omega^2 - i \mu_0 \gamma \omega \right) \vec{B} = 0 \quad (\text{III-23})$$

On en déduit donc la relation :

$$-k^2 + \mu_0 \varepsilon \omega^2 - i \mu_0 \gamma \omega = 0$$

soit :

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 - i \mu_0 \gamma \omega = \mu_0 \varepsilon \omega^2 \left(1 - i \frac{\gamma}{\varepsilon \omega} \right) \quad (\text{III-24})$$

Le carré du vecteur d'onde est donc complexe, par suite k est complexe. Il s'écrit en général :

$$\bar{k} = k' - i k'' , \text{ avec } k' \text{ et } k'' > 0.$$

La quantité $\frac{\varepsilon \omega}{\gamma}$ apparaît comme le quotient du courant de déplacement $\left| \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right| = \varepsilon \omega \left| \bar{E} \right|$ par la

densité de courant de conduction $\left| \bar{j} \right| = \gamma \left| \bar{E} \right|$.

On appelle facteur de qualité du milieu le rapport :

$$Q = \frac{\left| \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right|}{\left| \bar{j} \right|} = \frac{\varepsilon \omega \left| \bar{E} \right|}{\gamma \left| \bar{E} \right|} = \frac{\varepsilon \omega}{\gamma} \quad (\text{III-25})$$

Dans les conducteurs ordinaires γ est de l'ordre de $10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ (Ex. cuivre : $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$). Le facteur Q est donc faible pour les conducteurs ordinaires. La conductivité électrique γ du milieu dépend de la fréquence de l'onde.

IV.1.2 Atténuation de l'onde

on a : $k^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 \left(1 - i \frac{1}{Q} \right) = (k' - i k'')^2$ Soit :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 \\ 2 k' k'' = \frac{\mu_0 \varepsilon \omega^2}{Q} \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

On en déduit :

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{2}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-27})$$

$$k'' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{2}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-28})$$

Remarque : dans le vide $Q \rightarrow \infty$ donc $k'' = 0$ et $k' = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}$.

L'expression du champ électrique d'une OEM plane sinusoïdale dans un milieu conducteur est donc :

$$\bar{E} = E_0 e^{i(\omega t - \bar{k} z)} = \bar{E}_0 e^{i(\omega t - k' z + i k'' z)} \cdot \bar{u}$$

soit :

$$\vec{E} = E_0 e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z)} \cdot \vec{u} \quad (\text{III-29})$$

Il y a donc atténuation de l'onde plane caractérisée par le coefficient $k'' = k''(\omega)$.

k'' s'appelle coefficient (ou facteur) d'atténuation de l'onde. Il est égal à l'inverse de la distance δ sur laquelle l'amplitude est atténuée d'un facteur e. La distance d'atténuation ou profondeur de pénétration de l'onde est donc :

$$\delta = \frac{1}{k''} \quad (\text{III-30})$$

en fonction de δ le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - k'z)} \cdot \vec{u} \quad (\text{III-31})$$

IV.2 Cas des milieux très bons conducteurs

Pour ces milieux, la conductivité électrique est infiniment grande ($\gamma \gg$). Le facteur de qualité du milieu est infiniment petit ($Q \ll 1$).

On définit les bons conducteurs comme ceux pour lesquels $Q \leq \frac{1}{50}$, ce qui veut dire que la densité de conduction ($j = \gamma E$) vaut au moins 50 fois la densité de courant de déplacement ($j = \varepsilon \omega E$).

Remarque : γ est fonction de la pulsation ω aux fréquences optiques. Le cuivre reste un bon conducteur jusqu'à des fréquences de l'ordre de $2 \cdot 10^6$ Hz (ultraviolet).

IV.2.1 Longueur d'atténuation

Pour un milieu très bon conducteur ($Q \ll 1$) l'expression de k^2 se réduit à :

$$\bar{k}^2 = -i \gamma \mu_0 \omega \quad (\text{III-32})$$

sachant que $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, le vecteur d'onde complexe est donné par :

$$\bar{k} = (-i \gamma \mu_0 \omega)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (1-i) \quad (\text{III-33})$$

donc :

$$k' \approx k'' \approx \left(\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-34})$$

d'où la longueur d'atténuation de l'onde :

$$\delta = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}} \quad (\text{III-35})$$

Remarque :

$$\frac{\vec{E}}{\vec{B}} = \frac{\omega}{k} = \omega \left(\frac{1}{\gamma \mu_0 \omega} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{\gamma \mu_0}} e^{i \frac{\pi}{4}} \quad (\text{III-36})$$

car $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i \frac{\pi}{4}}$.

Les expressions du champ électromagnétique de l'onde dans les milieux bons conducteurs sont données par :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \cdot \vec{u} \quad (\text{III-37})$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{\gamma \mu_0}{\omega}} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \cdot \vec{v} \quad (\text{III-38})$$

On note, donc, que dans les bons conducteurs, le champ \vec{B} est en retard de phase de $\frac{\pi}{4}$ par rapport au champ \vec{E} , alors qu'ils sont en phase dans les isolants. Cette différence vient du fait que le courant associé à \vec{B} dans les conducteurs est le courant de conduction et non le courant de déplacement comme dans les isolants.

En notation réelle le champ électromagnétique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cdot \vec{u} \quad (\text{III-39})$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{\gamma \mu_0}{\omega}} e^{-\frac{z}{\delta}} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \vec{v} \quad (\text{III-40})$$

IV.2.2 Effet de peau

On peut remarquer que la profondeur de pénétration de l'onde $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$ diminue lorsque γ, μ ou ω augmentent. A la limite lorsque ω ou γ deviennent infinis, δ tend vers zéro. Ainsi donc, les OEM de hautes fréquences ($\omega \gg$) ne peuvent pénétrer qu'à une faible profondeur dans les métaux $\gamma \gg$, voir tableau ci-dessous. L'OEM reste localisée dans une couche d'épaisseur δ : C'est l'effet de peau.

Métal	Conductivité γ (x 10^7) $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	Profondeur de pénétration (ou épaisseur de peau) δ (en mm)		
		50 Hz	1 KHz	1 MHz
Argent	6.0	9.1	2.03	0.064
Cuivre	5.8	9.3	2.1	0.066
Or	4.5	10.6	2.38	0.075
Aluminium	3.5	12.1	2.7	0.085

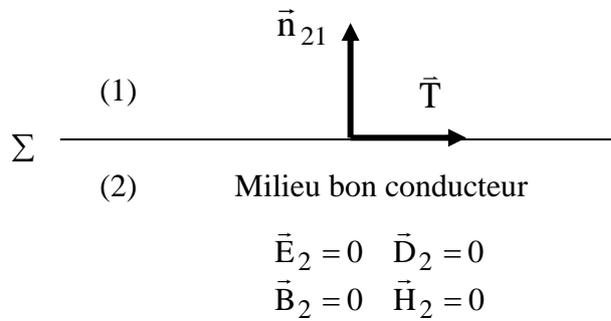
IV-3 Relations de passage à la surface d'un milieu bon conducteur

Nous allons reprendre les relations de passage établies aux paragraphes VI des chapitre 1 et 2 de ce module, avec cette fois le milieu (1) est non conducteur et le milieu (2) est un très bon conducteur.

Soit (Σ) la surface de séparation entre ces deux milieux, et soient :

\vec{k}_s : vecteur densité surfacique de courant de conduction qui circulent à la surface (Σ).

σ : densité surfacique de charge mobile qui pourrait être à la surface de séparation.



IV.3.1 Composante tangentielle de \vec{E}

Rappelons la relation de passage de continuité du champ électrique vue au paragraphe VI du chapitre 1 :

$$\vec{E}_1(\mathbf{M}) \cdot \vec{T}_1 = \vec{E}_2(\mathbf{M}) \cdot \vec{T}_1$$

Ici le milieu 2 est un très bon conducteur, donc $\vec{E}_2 = \vec{0}$ dans ce milieu d'où :

$$\vec{E}_1(\mathbf{M}) \cdot \vec{T}_1 = \vec{0} \quad (\text{III-41})$$

La composante tangentielle du champ électrique est, donc, nulle à la surface de séparation d'un bon conducteur.

IV.3.2 Composante normale de \vec{D}

De même nous avons établi, au paragraphe VI du chapitre 1, la relation de passage pour l'induction électrique :

$$\vec{D}_1(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_{21} - \vec{D}_2(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_{21} = \sigma$$

en tenant compte que dans le milieu conducteur $\vec{D}_2 = \vec{0}$, il vient :

$$\vec{D}_1(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_{21} = \sigma \quad (\text{III-42})$$

à la surface de séparation d'un milieu bon conducteur la composante normale de \vec{D} est égale à la densité surfacique de charge contenue sur cette surface.

IV.3.3 Composante normale de \vec{B}

Rappelons La relation de passage, établie au paragraphe VI du chapitre 2, traduisant la continuité de la composante normale de \vec{B} :

$$\vec{B}_1(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_1 - \vec{B}_2(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

Puisque dans le milieu 2 est un conducteur, alors $\vec{B}_2 = \vec{0}$, on obtient :

$$\vec{B}_1(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{III-43})$$

à la surface de séparation d'un bon conducteur la composante normale de \vec{B} est nulle.

IV.3.4 Composante tangentielle de \vec{H}

Si on remplace également $\vec{H}_2 = \vec{0}$ dans la relation de passage pour \vec{H} (paragraphe VI, chapitre 2) :

$$\vec{H}_1(\mathbf{M}) \cdot \vec{T}_1 - \vec{H}_2(\mathbf{M}) \cdot \vec{T}_1 = \vec{k} \cdot (\vec{n}_{21} \wedge \vec{T}_1)$$

On obtient :

$$\vec{H}_1(M) \cdot \vec{T}_1 = \vec{k} \cdot (\vec{n}_{21} \wedge \vec{T}_1) = (\vec{k} \wedge \vec{n}_{21}) \cdot \vec{T}_1 \quad (\text{III-44})$$

soit encore :

$$\vec{H}_{1T} = \vec{k} \wedge \vec{n}_{21} \quad (\text{III-45})$$

En résumé :

A la surface de séparation d'un conducteur parfait on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_{1T} = 0 & \vec{D}_{1N} = \sigma \cdot \vec{n}_{21} \\ \vec{B}_{1N} = 0 & \vec{H}_{1T} = \vec{k} \wedge \vec{n}_{21} \end{cases} \quad (\text{III-46})$$

IV.4 Réflexion et réfraction des OEM sur un conducteur parfait

IV.4.1 Incidence normale

Soit (Σ) une surface de séparation plane entre un milieu (1) non conducteur et un milieu (2) parfait (très bon conducteur).

On considère une OEM incidente plane monochromatique, polarisée rectilignement suivant l'axe Ox ($\vec{E}_i = E_i \cdot \vec{e}_x$), se propageant suivant la direction Oz ($\vec{k}_i = k_i \cdot \vec{e}_z$) d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O; x, y, z)$. L'interface (Σ) étant choisie parallèle au plan (y O x).

Le champ électromagnétique (\vec{E}_i, \vec{B}_i) de cette onde incidente est :

$$\begin{cases} \vec{E}_i(z, t) = E_{0i} \cos(\omega t - k_i z) \cdot \vec{e}_x \\ \vec{B}_i(z, t) = B_{0i} \cos(\omega t - k_i z) \cdot \vec{e}_y \end{cases} \quad (\text{III-47})$$

où $B_{0i} = \frac{E_{0i}}{v_1}$ (pour une onde plane) et v_1 la vitesse de phase de l'onde dans le milieu (1).

Soient :

\vec{E}_r et \vec{B}_r le champ électromagnétique dans le milieu (1) après réflexion.

\vec{E}_t et \vec{B}_t le champ électromagnétique dans le milieu (2), conducteur parfait, après transmission.

Rappelons qu'en tout point du milieu conducteur $\vec{E}_t = \vec{0}$ et $\vec{B}_t = \vec{0}$.

Le champ électrique total dans le milieu (1) est : $\vec{E}_1(z, t) = \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_r(z, t)$.

Ecrivons la condition de continuité de la composante tangentielle de \vec{E} (relation 41) en un point de la surface du conducteur, c'est à dire pour $z = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(z=0) \cdot \vec{e}_x &= (\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0)) \cdot \vec{e}_x \\ &= (E_{0i} \cdot \vec{e}_x + E_{0r} \cdot \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x = 0 \end{aligned}$$

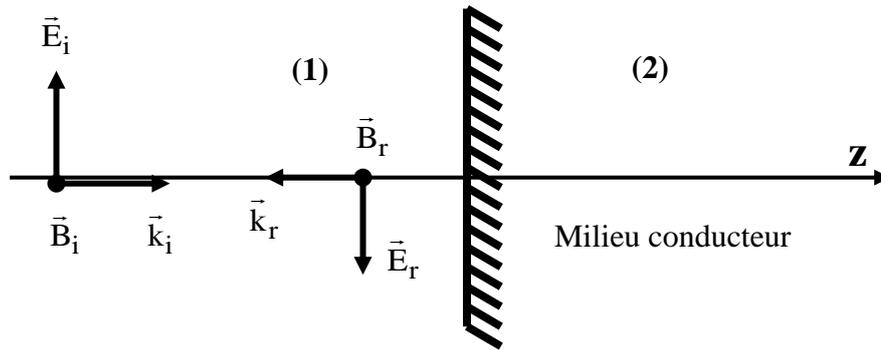
On en déduit que : $E_{0r} = -E_{0i}$

ce qui permet d'écrire pour le champ électrique de l'onde réfléchie ($\vec{k}_i = -\vec{k}_r$):

$$\vec{E}_r(z, t) = -E_{0i} \cos(\omega t + k_i z) \cdot \vec{e}_x \quad (\text{III-48})$$

Le trièdre ($\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r$) étant direct, on en déduit que le champ \vec{B}_r est parallèle à \vec{B}_i , donc polarisé rectilignement suivant Oy, soit :

$$\vec{B}_r(z, t) = \frac{E_{0i}}{v_1} \cos(\omega t + k_i z) \cdot \vec{e}_y = B_{0r} \cos(\omega t + k_i z) \cdot \vec{e}_y \quad (\text{III-49})$$



IV.4.2 Superposition d'ondes – Ondes stationnaires

En un point M de l'axe Oz, situé dans le milieu (1), il y a superposition des ondes incidentes (\vec{E}_i, \vec{B}_i) et réfléchies (\vec{E}_r, \vec{B}_r) . Le champ EM résultant s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_i(M) + \vec{E}_r(M) = E_{0i} [\cos(\omega t - k_i z) - \cos(\omega t + k_i z)] \vec{e}_x$$

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_i(M) + \vec{B}_r(M) = B_{0i} [\cos(\omega t - k_i z) + \cos(\omega t + k_i z)] \vec{e}_y$$

soit :

$$\begin{cases} \vec{E}(z, t) = 2E_{0i} \sin k_i z \sin \omega t \cdot \vec{e}_x \\ \vec{B}(z, t) = 2B_{0i} \cos k_i z \cos \omega t \cdot \vec{e}_y \end{cases} \quad (\text{III-50})$$

L'amplitude du champ électromagnétique dépend de la position z , donc l'onde résultante n'est pas plane. Les fonctions d'espace et du temps sont découplées. Il s'agit d'ondes qui ne se propagent pas. Ce sont des ondes stationnaires (ondes vibrant sur place).

L'onde stationnaire est caractérisée par l'existence de nœuds et de ventres.

• **Nœuds** : Tous les points M de l'axe Oz où \vec{E} ou \vec{B} est nul à un instant donné.

- nœuds du champ électrique : $\vec{E} = \vec{0}$ pour $\sin k_i z = 0$, soit $k_i z = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$, pour :

$$z = \frac{n\pi}{k_i} = \frac{n\lambda}{2}$$

- nœuds du champ magnétique : $\vec{B} = \vec{0}$ pour $\cos k_i z = 0$, soit $k_i z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$, pour :

$$z = (2n+1)\frac{\pi}{2k_i} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

La distance entre deux nœuds successifs du champ électrique (ou du champ magnétique) est $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un nœud du champ électrique et un ventre du champ magnétique est $\frac{\lambda}{4}$.

• **Ventres** : Tous les points M de l'axe Oz où les amplitudes de \vec{E} ou \vec{B} sont maximales en valeurs absolues à un instant donné.

- ventres du champ électrique : $\|\vec{E}\|$ est maximal pour $|\sin k_1 z| = 1$, soit $k_1 z = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$,

pour $z = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$

- ventres du champ magnétique : $\|\vec{B}\|$ est maximal pour $|\cos k_1 z| = 1$, soit $k_1 z = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$, pour :

$$z = \frac{n \lambda}{2}$$

Ainsi donc les nœuds de \vec{E} coïncident avec les ventres de \vec{B} et inversement.

V – Propagation dans les milieux non conducteurs

De tels milieux sont caractérisés par l'absence de la conductivité électrique ($\gamma = 0$).

V.1 Milieux diélectriques parfaits

Dans un milieu diélectrique (non magnétique $\mu = \mu_0$), l'onde électromagnétique se propage à la

vitesse $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$, d'où la permittivité réelle du milieu :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\mu_0 v^2(\omega)} \quad (\text{III-51})$$

l'indice de réfraction du milieu est donné par :

$$n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} = \sqrt{\frac{\mu_r \varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r(\omega)} = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \quad (\text{car } \mu_r = 1) \quad (\text{III-52})$$

Chaque fois que l'indice de réfraction ou la vitesse de propagation d'un milieu est fonction de la pulsation ω , le milieu est dit dispersif

V.2 Milieux diélectrique réel ou absorbant

L'étude de la réponse d'un milieu diélectrique, non magnétique ($\mu = \mu_0$) est caractérisée par une permittivité relative complexe :

$$\bar{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon'_r(\omega) - i \varepsilon''_r(\omega) \quad (\text{III-53})$$

$$\varepsilon'_r > 0 \text{ et } \varepsilon''_r > 0$$

le vecteur d'onde d'une OEM plane monochromatique dans ce milieu matériel est lui même complexe :

$$\bar{k}(\omega) = k'(\omega) - i k''(\omega) \quad (\text{III-54})$$

$$k' \text{ et } k'' > 0, \text{ or :}$$

$$\bar{k}^2(\omega) = \mu_0 \omega^2 \bar{\varepsilon}(\omega) = \mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r(\omega) \quad (\text{III-55})$$

soit

$$\begin{aligned} k'(\omega) - k''(\omega) - i 2 k' k'' &= \mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 (\varepsilon'_r - i \varepsilon''_r) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon'_r - i \varepsilon''_r) \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient le système qui permet de déterminer k' et k'' :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r' \\ 2 k' k'' = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r'' \end{cases}$$

L'indice de réfraction d'un tel milieu est aussi complexe :

$$\bar{n} = \bar{k} \frac{c}{\omega} = n' - i n'', \quad n' > 0 \text{ et } n'' > 0 \quad (56)$$

donc :

$$\bar{n}^2 = \bar{k}^2 \frac{c^2}{\omega^2} = (n'^2 - n''^2) - i 2 n' n''$$

En remplaçant \bar{k}^2 (55) et en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient le système permettant de calculer n' et n'' :

$$\begin{cases} n'^2 - n''^2 = \varepsilon_r' \\ 2 n' n'' = \varepsilon_r'' \end{cases}$$

Pour une OEM plane monochromatique se propageant suivant la direction Oz d'un repère cartésien, le champ électromagnétique est :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \bar{k} z)} = \vec{E}_0 e^{-k'' z} e^{i(\omega t - k' z)} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \bar{k} z)} = \vec{B}_0 e^{-k'' z} e^{i(\omega t - k' z)} \end{cases} \quad (\text{III-57})$$

L'amplitude du champ est exponentiellement décroissante. C'est le phénomène d'absorption ou d'atténuation de l'onde plane lié à la partie imaginaire k'' de \bar{k} , tout comme dans les milieux conducteurs.

Pour de telles ondes on a :

$$\frac{\omega}{k'(\omega)} = v_\varphi \text{ qui représente la vitesse de phase de l'onde.}$$

$$k''(\omega) = \alpha \text{ qui représente le coefficient d'atténuation de l'onde.}$$

V.3 Réflexion et réfraction des OEM à la surface de séparation entre deux milieux diélectriques parfaits

V.3.1 Cas de l'incidence normale

Soient deux milieux diélectriques LHI (non magnétiques $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) de permittivités absolues ε_1 et ε_2 , séparés par une surface (Σ), ne contenant ni charges ($\sigma = 0$) ni courants réels ($\vec{k} = \vec{0}$).

Une OEM incidente plane monochromatique, polarisée rectilignement suivant l'axe Ox ($\vec{E}_i = E_i \cdot \vec{e}_x$), se propageant suivant la direction Oz ($\vec{k}_i = k_i \cdot \vec{e}_z$) d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O; x, y, z)$. L'interface (Σ) étant parallèle au plan (x O y).

Soient :

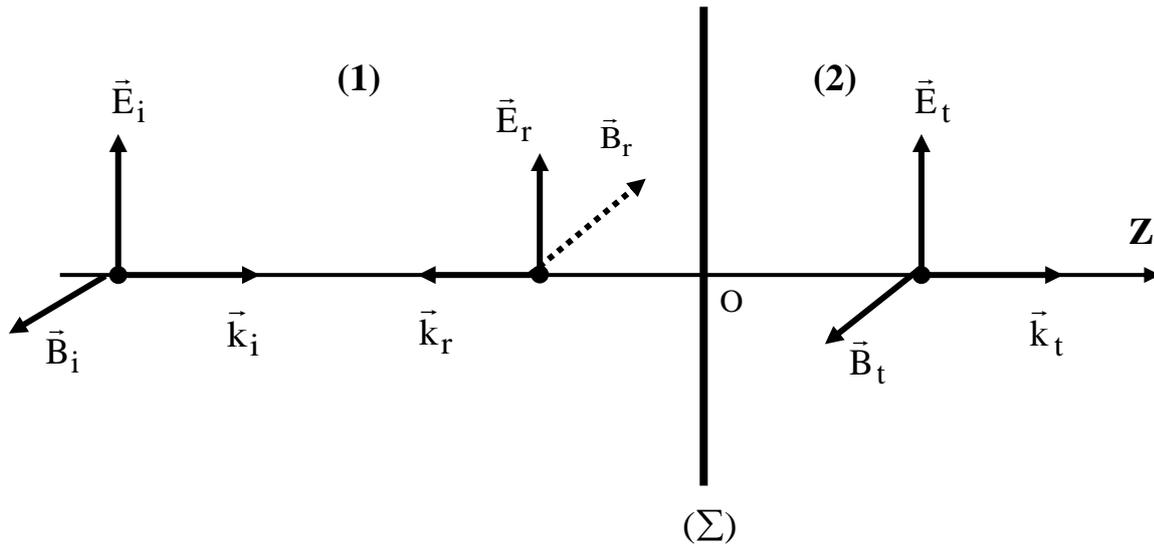
$$(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i) : \text{ onde incidente se propageant dans le milieu (1) à la vitesse } v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}}$$

$$(\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r) : \text{ onde réfléchie à la surface } (\Sigma) \text{ dans le milieu (1) ayant la même vitesse } v_1$$

$$(\vec{E}_t, \vec{B}_t, \vec{k}_t) : \text{ onde transmise dans le milieu (2) et se propageant à la vitesse } v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2}}$$

Les modules des vecteurs d'ondes incidente, réfléchie et transmise sont :

$$k_i = k_r = \frac{\omega}{v_1} = k_1 \quad \text{et} \quad k_t = \frac{\omega}{v_2} = k_2$$



V.3.1.2 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Les champs électriques des différentes ondes sont :

- Onde incidente : $\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t - k_1 z) \cdot \vec{e}_x$
- Onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t + k_1 z) \cdot \vec{e}_x$
- Onde transmise : $\vec{E}_t = E_{0t} \cos(\omega t - k_2 z) \cdot \vec{e}_x$

Les ondes étant planes on peut donc écrire :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_1}{\omega} \wedge \vec{E}_i \quad ; \quad \vec{B}_r = -\frac{\vec{k}_1}{\omega} \wedge \vec{E}_r \quad ; \quad \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_2}{\omega} \wedge \vec{E}_t \quad (\text{III-58})$$

On définit :

- le coefficient de réflexion en amplitude par : $r = \frac{E_r(0)}{E_i(0)} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$ (III-59)

- le coefficient de transmission en amplitude par : $t = \frac{E_t(0)}{E_i(0)} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$ (III-60)

Ecrivons la continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{H} à la surface de séparation (Σ), donc en $z = 0$:

• **Composante tangentielle de \vec{E} :**

On choisit comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(z, t) &= \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_r(z, t) \\ \vec{E}_2(z, t) &= \vec{E}_t(z, t) \\ [\vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t)] \cdot \vec{e}_x &= \vec{E}_t \cdot \vec{e}_x \end{aligned}$$

soit :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (\text{III-61})$$

• **Composante tangentielle de \vec{H} :**

On choisit comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_y$:

$$\vec{H}_1(z, t) = \vec{H}_i(z, t) + \vec{H}_r(z, t)$$

$$\vec{H}_2(z, t) = \vec{H}_t(z, t)$$

$$[\vec{H}_i(0, t) + \vec{H}_r(0, t)] \cdot \vec{e}_y = \vec{H}_t \cdot \vec{e}_y$$

soit :

$$H_{0i} - H_{0r} = H_{0t}$$

En tenant compte que pour une OEM plane, dans un milieu LHI on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i = \frac{B_i}{\mu_0} = \frac{E_i}{\mu_0 v_1} \\ H_r = \frac{B_r}{\mu_0} = \frac{E_r}{\mu_0 v_1} \\ H_t = \frac{B_t}{\mu_0} = \frac{E_t}{\mu_0 v_2} \end{array} \right.$$

Il vient :

$$\frac{E_{0i}}{v_1} - \frac{E_{0r}}{v_1} = \frac{E_{0t}}{v_2} \quad (\text{III-62})$$

Si on désigne par n_1 et n_2 les indices de réfractifs des milieux (1) et (2) respectivement les vitesses des ondes dans les deux milieux sont $v_1 = \frac{c}{n_1}$ et $v_2 = \frac{c}{n_2}$, l'équation (62) devient :

$$n_1 (E_{0i} - E_{0r}) = n_2 E_{0t} \quad (\text{III-63})$$

à partir du système d'équations (III-61) et (III-63) on exprime E_{0r} et E_{0t} en fonction de E_{0i} , soit :

$$E_{0r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{0i} \quad \text{et} \quad E_{0t} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} E_{0i}$$

d'où les coefficients de réflexion et de transmission de l'onde dans un milieu non absorbant :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

Remarque :

Dans le cas des milieux non absorbants on constate que :

- Le facteur de transmission $t > 0$ quelque soit n_1 et n_2 . La transmission de l'onde se fait sans changement de phase.
- Le facteur de réflexion $r > 0$ ou $r < 0$ suivant que $n_1 > n_2$ ou $n_1 < n_2$:
 - si $n_1 > n_2$, la réflexion n'introduit pas de changement de phase.
 - si $n_1 < n_2$, la réflexion provoque une avance ou un retard de phase égal à π .

V.3.1.3 Facteurs de réflexion R et de transmission T en énergie

Dans le cas de milieux non absorbants ce sont des quantités positives, sans dimension, suivantes :

$$R = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (\text{III-69})$$

$$T = 1 - R = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (\text{III-70})$$

V.3.1.4 Cas où l'un des milieux n'est pas parfait (ou absorbant)

Si l'un au moins des deux milieux est absorbant, son indice de réfraction est complexe et les coefficients r et t sont complexes.

On suppose par exemple 2 milieux :

- Milieu (1) : non absorbant, n_1 réel
- Milieu (2) : absorbant (indice complexe), $n_2 = n_2' - in_2''$

Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sont donc :

$$\bar{r} = \frac{n_1 - \bar{n}_2}{n_1 + \bar{n}_2} \quad (\text{III-71})$$

$$\bar{t} = \frac{2n_1}{n_1 + \bar{n}_2} \quad (\text{III-72})$$

Les facteurs de réflexion et de transmission en énergie sont donnés par :

$$R = \bar{r} \bar{r}^* = |\bar{r}|^2 = \frac{(n_1 - n_2')^2 + n_2''^2}{(n_1 + n_2')^2 + n_2''^2} \quad (\text{III-73})$$

$$T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2'}{(n_1 + n_2')^2 + n_2''^2} \quad (\text{III-74})$$

V.3.2 Cas de l'incidence oblique

V.3.2.1 Expressions du champ électromagnétique

Soit une OEM plane monochromatique incidente, polarisée rectilignement arrivant, sous un angle d'incidence θ_1 , à la surface de séparation (Σ) entre deux milieux diélectriques et dépourvue de charges et de courant ($\sigma = 0$, $\vec{k}_s = \vec{0}$) :

- Milieux (1), (ϵ_1, μ_0, n_1)
- Milieux (2), (ϵ_2, μ_0, n_2)

Il existe 2 cas fondamentaux de polarisation :

• **1^{er} Cas :** Le champ électrique \vec{E} est dans le plan d'incidence, le champ magnétique \vec{H} est perpendiculaire à ce plan. On parle de mode transverse magnétique noté TM ou mode E.

• **2^{ème} Cas :** Le champ électrique \vec{E} est perpendiculaire au plan d'incidence, le champ magnétique \vec{H} est dans le plan d'incidence. On parle de mode transverse électrique noté TE ou mode H.

On se limitera ici au 1er cas de polarisation. Le deuxième cas de polarisation peut être traité à titre d'exercice. Soient :

$(\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{k}_i)$: Onde électromagnétique incidente dans le milieu (1)

$(\vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{k}_r)$: Onde électromagnétique réfléchi à la surface (Σ) dans le milieu (1)

$(\vec{E}_t, \vec{H}_t, \vec{k}_t)$: Onde électromagnétique transmise dans le milieu (2)

Remarque :

On peut aussi considérer les champs $\vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0}$, $\vec{H}_r = \frac{\vec{B}_r}{\mu_0}$ et $\vec{H}_t = \frac{\vec{B}_t}{\mu_0}$

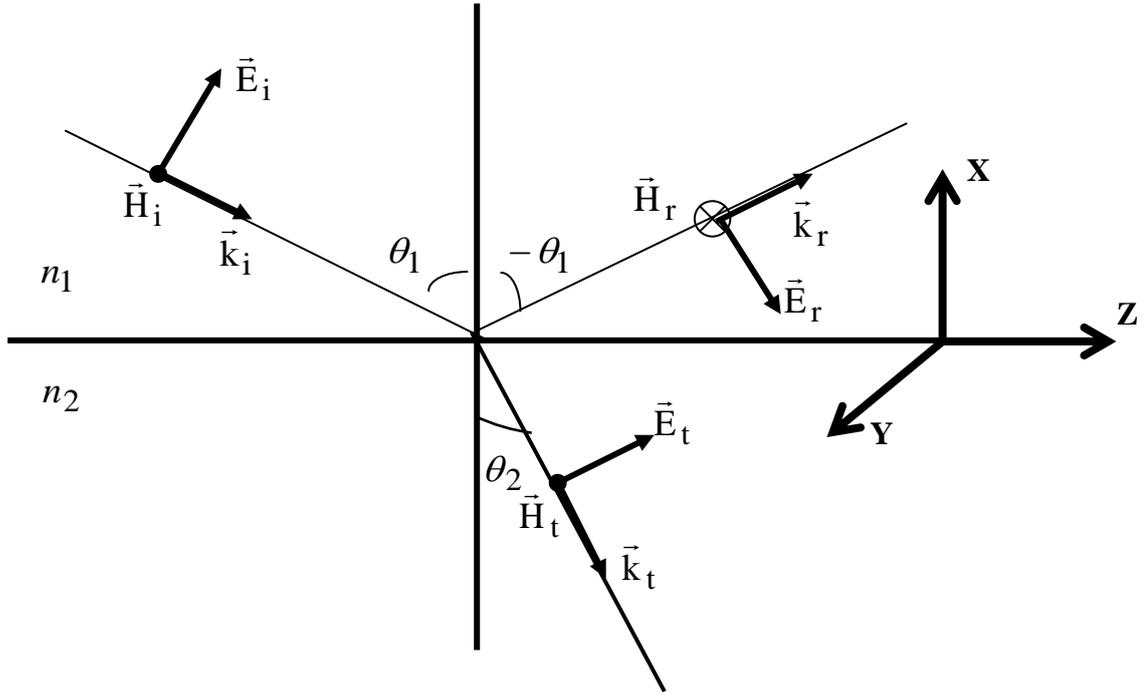
Le plan (XOZ) est le plan d'incidence.

Le plan (YOZ) = (Σ) est la surface de séparation.

Donc $\vec{E}_i \in (\text{XOZ})$ et $\vec{H}_i \perp (\text{XOZ})$, c.à.d. $\vec{H}_i = H_i \cdot \vec{e}_y$

On considère le cas $n_1 > n_2$.

Dans ce cas le champ \vec{E}_i de l'onde incidente, et \vec{E}_r de l'onde réfléchie, sont en phase.



• **Champ électromagnétique de l'onde incidente :**

$$\vec{E}_i = \begin{cases} \vec{E}_{ix} = E_{0i} \sin \theta_1 \exp i [\omega t - k_1 (-x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)] \\ \vec{E}_{iy} = 0 \\ \vec{E}_{iz} = E_{0i} \cos \theta_1 \exp i [\omega t - k_1 (-x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)] \end{cases} \quad \text{(III-75)}$$

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{iy} = H_{0i} \exp i [\omega t - k_1 (-x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)] \cdot \vec{e}_y \quad \text{(III-76)}$$

• **Champ électromagnétique de l'onde réfléchie :**

Orientation des champs :

Le plan (XOZ) est un plan de symétrie pour le système; par conséquent les vecteurs \vec{H}_r et \vec{H}_t sont aussi dirigés suivant OY et les vecteurs \vec{E}_i , \vec{E}_r et \vec{E}_t sont contenus dans ce plan.

$$\vec{E}_r = \begin{cases} \vec{E}_{rx} = -E_{0r} \sin \theta_1 \exp i [\omega t - k_1 (x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)] \\ \vec{E}_{ry} = 0 \\ \vec{E}_{rz} = E_{0r} \cos \theta_1 \exp i [\omega t - k_1 (x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)] \end{cases} \quad \text{(III-77)}$$

$$\vec{H}_r = \vec{H}_{ry} = -H_{0r} \exp i [\omega t - k_1 (x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)] \cdot \vec{e}_y \quad \text{III-78}$$

• **Champ électromagnétique de l'onde transmise :**

Le champ \vec{H}_t est transmis sans changement de phase par rapport à \vec{H}_i , donc $\vec{H}_t = H_t \cdot \vec{e}_y // \vec{H}_i$. Le trièdre $(\vec{E}_t, \vec{H}_t, \vec{k}_t)$ étant orthonormé direct, d'où l'orientation de \vec{E}_t .

$$\vec{E}_t = \begin{cases} \vec{E}_{tx} = E_{0t} \sin \theta_2 \exp i [\omega t - k_2 (-x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2)] \\ \vec{E}_{ty} = 0 \\ \vec{E}_{tz} = E_{0t} \cos \theta_2 \exp i [\omega t - k_2 (-x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2)] \end{cases} \quad \text{(III-79)}$$

$$\vec{H}_t = \vec{H}_{ty} = H_{0t} \exp i [\omega t - k_2 (-x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2)] \cdot \vec{e}_y \quad \text{(III-80)}$$

V.3.2.2 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $r_{//}$ et $t_{//}$.

Rappel :

$$r = \frac{E_r(0)}{E_i(0)} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = r_{//} \quad \text{et} \quad t = \frac{E_t(0)}{E_t(0)} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = t_{//}$$

Les relations de continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{H} en un point M de (Σ) , donc en $x = 0$ donnent :

• **Continuité de la composante tangentielle de \vec{E} :**

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(0, z, t) &= \vec{E}_i(0, z, t) + \vec{E}_r(0, z, t) \\ \vec{E}_2(0, z, t) &= \vec{E}_t(0, z, t) \end{aligned}$$

On prend comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_z$, soit :

$$(\vec{E}_i(0, z, t) + \vec{E}_r(0, z, t)) \cdot \vec{e}_z = \vec{E}_t(0, z, t) \cdot \vec{e}_z$$

Soit encore :

$$(E_{0i} \cos \theta_1 + E_{0r} \cos \theta_1) = E_{0t} \cos \theta_2 \quad (\text{III-81})$$

En divisant les deux membres de cette expression par E_{0i} on obtient :

$$(1 + r_{//}) \cos \theta_1 = t_{//} \cos \theta_2 \quad (\text{III-82})$$

• **Continuité de la composante tangentielle de \vec{H} :**

$$\begin{aligned} \vec{H}_1(0, z, t) &= \vec{H}_i(0, z, t) + \vec{H}_r(0, z, t) \\ \vec{H}_2(0, z, t) &= \vec{H}_t(0, z, t) \end{aligned}$$

On prend comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_y$, soit :

$$(\vec{H}_i(0, z, t) + \vec{H}_r(0, z, t)) \cdot \vec{e}_y = \vec{H}_t(0, z, t) \cdot \vec{e}_y$$

soit encore :

$$H_{0i} - H_{0r} = H_{0t} \quad (\text{III-83})$$

Comme il s'agit d'une onde plane on a les relations :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}}{\mu_0 v} = \frac{n \vec{E}}{\mu_0 c}$$

donc :

$$H_{0i} = \frac{n_1 E_{0i}}{\mu_0 c} \quad ; \quad H_{0r} = \frac{n_1 E_{0r}}{\mu_0 c} \quad \text{et} \quad H_{0t} = \frac{n_2 E_{0t}}{\mu_0 c}$$

d'où l'équation :

$$n_1 (E_{0i} - E_{0r}) = n_2 E_{0t} \quad (\text{III-84})$$

En introduisant $r_{//}$ et $t_{//}$ on obtient :

$$n_1 (1 - r_{//}) = n_2 t_{//} \quad (\text{III-85})$$

En combinant les deux relations de continuité (III-82) et (III-85), on obtient les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à l'interface de deux diélectriques pour une polarisation parallèle au plan d'incidence :

$$r_{//} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1} \quad (\text{III-86})$$

$$t_{//} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1} \quad (\text{III-87})$$

Remarque :

- Le déphasage de l'onde transmise est toujours nul puisque $t_{//}$ est réel positif.
- Le déphasage de l'onde réfléchie est donné par le signe de $r_{//}$.

Chapitre 4 : PROPAGATION GUIDEE DES O.E.M.

Un guide d'ondes électromagnétique est un dispositif qui sert à guider les ondes électromagnétiques, pour les maintenir confinées dans un milieu particulier, sur une certaine distance¹. Il peut être métallique, ou constitué de polymères⁴, permettant la propagation d'ondes par réflexions multiples à la manière d'une fibre optique.

I – Propagation entre deux plans parallèles

1) Rappels : Réflexion oblique des OEM sur la surface (Σ) d'un conducteur parfait.

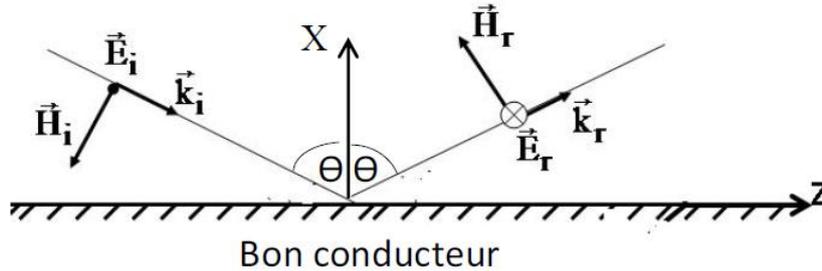
• Mode TE ou mode H :

$\vec{E}_i(M,t)$ est perpendiculaire au plan d'incidence,

$\vec{H}(M,t)$ est dans le plan d'incidence.

Onde incidente : $(\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{k}_i)$

Onde réfléchie : $(\vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{k}_r)$



Onde incidente

\vec{E}_i est polarisé rectilignement suivant OY : $\vec{E}_i = E_{iy} \vec{e}_y$

Le champ \vec{H}_i est dans le plan d'incidence (zOx) :

$$\vec{H}_i = H_{ix} \vec{e}_x + H_{iz} \vec{e}_z$$

Son orientation est telle que le trièdre $(\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{k}_i)$ soit direct.

En notation complexe :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{iy} \cdot \vec{e}_y = E_{0i} \exp i [\omega t + k (-x \cos \theta + z \sin \theta)] \vec{e}_y \quad (\text{IV-1})$$

$$\vec{H}_i = \begin{cases} \vec{H}_{ix} = -H_{0i} \sin \theta \exp i [\omega t + k (-x \cos \theta + z \sin \theta)] \\ \vec{H}_{iy} = 0 \\ \vec{H}_{iz} = -H_{0i} \cos \theta \exp i [\omega t + k (-x \cos \theta + z \sin \theta)] \end{cases} \quad (\text{IV-2})$$

Onde réfléchie

Le champ \vec{E}_r reste perpendiculaire au plan d'incidence (XOZ) : $\vec{E}_r = E_{ry}\vec{e}_y$

Le champ \vec{H}_r reste dans le plan d'incidence : $\vec{H}_r(M, t) = H_{rx}\vec{e}_x + H_{rz}\vec{e}_z$

L'orientation des champs réfléchis est obtenue en considérant les conditions de continuité en un point M de (Σ).

Les champs \vec{E}_i et \vec{E}_r sont en opposition de phase. Donc de sens opposés.

Les expressions complexes de ces champs sont :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{ry}\vec{e}_y = -E_{0i} \exp i [\omega t - k (x \cos \theta + z \sin \theta)] \vec{e}_y \quad (\text{IV-3})$$

$$\vec{H}_r = \begin{cases} \vec{H}_{rx} = H_{0i} \sin \theta \exp i [\omega t - k (x \cos \theta + z \sin \theta)] \\ \vec{H}_{ry} = 0 \\ \vec{H}_{rz} = -H_{0i} \cos \theta \exp i [\omega t - k (x \cos \theta + z \sin \theta)] \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

Onde résultante

En un point M du milieu 1 (non conducteur) les champs complexes résultants sont :

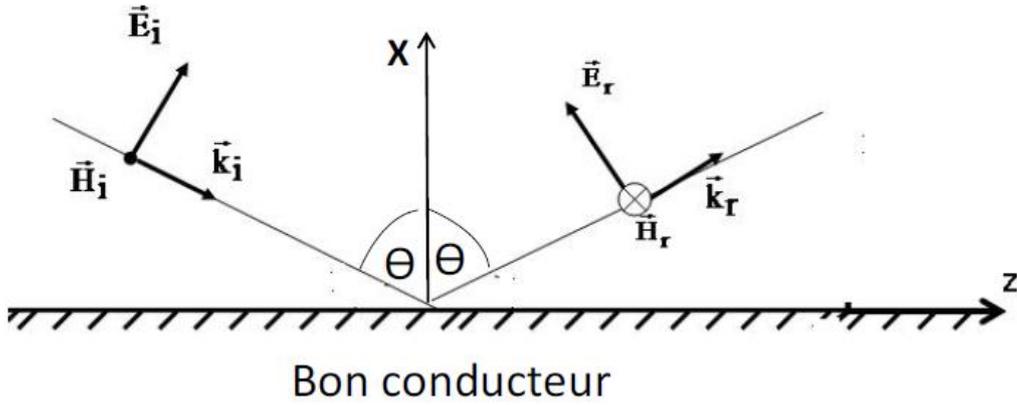
$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) \\ &= 2i E_{0i} \sin(k x \cos \theta) \exp i (\omega t - k z \sin \theta) \vec{e}_y \end{aligned} \quad (\text{IV-5})$$

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{H}_x = \vec{H}_{ix} + \vec{H}_{rx} = -2i H_{0i} \sin \theta \sin(k x \cos \theta) \exp i (\omega t - k z \sin \theta) \\ \vec{H}_y = 0 \\ \vec{H}_z = \vec{H}_{iz} + \vec{H}_{rz} = -2 H_{0i} \cos \theta \cos(k x \sin \theta) \exp i (\omega t - k z \sin \theta) \end{cases} \quad (\text{IV-6})$$

• Mode TM ou mode E :

$\vec{E}_i(M, t)$ est dans le plan d'incidence,

$\vec{H}(M, t)$ est perpendiculaire à ce plan.



Onde incidente

$$\vec{\bar{E}}_i = \begin{cases} \bar{E}_{ix} = E_{0i} \sin \theta \exp i [\omega t + k (x \cos \theta - z \sin \theta)] \\ \bar{E}_{iy} = 0 \\ \bar{E}_{iz} = E_{0i} \cos \theta \exp i [\omega t + k (x \cos \theta - z \sin \theta)] \end{cases} \quad (\text{IV-7})$$

$$\vec{\bar{H}}_i = \bar{H}_{iy} \cdot \vec{e}_y = H_{0i} \exp i [\omega t + k (x \cos \theta - z \sin \theta)] \vec{e}_y \quad (\text{IV-8})$$

Onde réfléchie

Le champ $\vec{\bar{H}}_r$ reste \perp au plan d'incidence (XOZ) et le champ $\vec{\bar{E}}_r$ reste dans le plan d'incidence.

$\vec{\bar{H}}_i$ et $\vec{\bar{H}}_r$ étant \parallel à (Σ) , on ne peut rien dire sur l'orientation de $\vec{\bar{H}}_r$ (la condition de continuité du champ total, à la surface $(\Sigma) = (YOZ)$, porte sur la composante normale).

On doit considérer la continuité de la composante tangentielle de $\vec{\bar{E}}$ en un point M de (Σ) , soit :

$$(\vec{\bar{E}}_i + \vec{\bar{E}}_r) \cdot \vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\bar{E}}_i \cdot \vec{T} = -\vec{\bar{E}}_r \cdot \vec{T}$$

Soit pour $\vec{T} = \vec{e}_z$: $\vec{\bar{E}}_i \cdot \vec{e}_z = -\vec{\bar{E}}_r \cdot \vec{e}_z$

On en déduit que : $E_{0r} = -E_{0i}$

Les champs $\vec{\bar{E}}_i$ et $\vec{\bar{E}}_r$ sont en opposition de phase. Le champ $\vec{\bar{E}}_r$ doit, donc, être \perp à la direction de propagation de l'onde réfléchie.

D'une façon unique : $\vec{\bar{E}}_r$ est dirigé vers le haut de la figure. Ce qui donne : $\vec{\bar{H}}_r = \vec{\bar{H}}_i$

Les expressions complexes de ces champs sont :

$$\vec{\bar{E}}_r = \begin{cases} \bar{E}_{rx} = E_{0i} \sin \theta \exp i [\omega t - k (x \cos \theta + z \sin \theta)] \\ \bar{E}_{ry} = 0 \\ \bar{E}_{rz} = -E_{0i} \cos \theta \exp i [\omega t - k (x \cos \theta + z \sin \theta)] \end{cases} \quad (\text{IV-9})$$

$$\vec{\bar{H}}_r = \bar{H}_{ry} \cdot \vec{e}_y = H_{0i} \exp i [\omega t - k (x \cos \theta + z \sin \theta)] \vec{e}_y \quad (\text{IV-10})$$

Onde résultante

Les champs complexes résultants de la superposition des 2 ondes sont :

$$\vec{\bar{E}}(M) = \begin{cases} \bar{E}_x = \bar{E}_{ix} + \bar{E}_{rx} = 2 E_{0i} \sin\theta \cos(kx \cos\theta) \\ \quad \exp i(\omega t - kz \sin\theta) \\ \bar{E}_z = \bar{E}_{iz} + \bar{E}_{rz} = 2 i E_{0i} \cos\theta \sin(kx \cos\theta) \\ \quad \exp i(\omega t - kz \sin\theta) \end{cases} \quad (\text{IV-11})$$

$$\vec{\bar{H}}(M) = \vec{\bar{H}}_{iy} + \vec{\bar{H}}_{ry} = 2 H_{0i} \cos(kx \cos\theta) \exp i(\omega t - kz \sin\theta) \quad (\text{IV-12})$$

- le champ $\vec{\bar{H}}$ est \perp à la direction de propagation
- le champ $\vec{\bar{E}}$ a une composante suivant cette direction. On parle du mode transverse magnétique noté TM ou mode E.

2) Condition de propagation entre deux plans parallèles

• Cas du mode TE

Pour pouvoir introduire un plan parallèle à la surface (Σ) c.à.d. au plan (YOZ), il faut que les conditions de continuité, sur ce plan, soient vérifiées, à savoir :

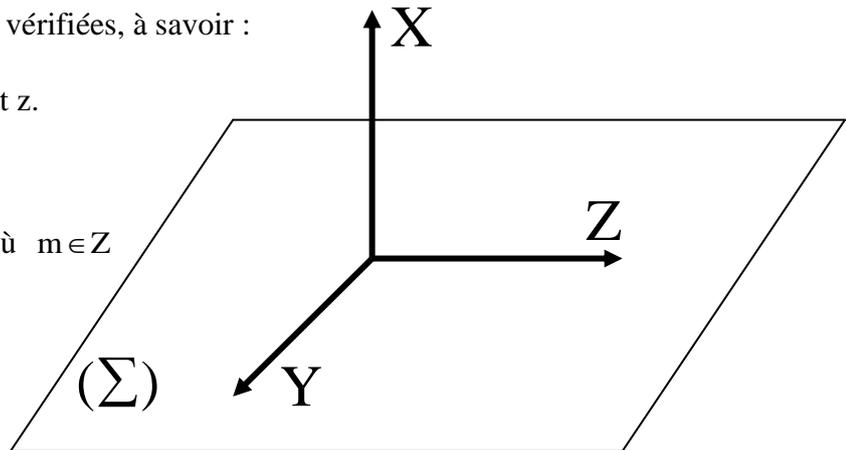
$$E_y = 0 ; E_z = 0 \text{ et } H_x = \frac{B_x}{\mu_0} = 0, \quad \forall y \text{ et } z.$$

Ce qui impose (expressions IV-5 et IV-6):

$$\sin(kx \cos\theta) = 0, \text{ soit } kx \cos\theta = m\pi \text{ où } m \in \mathbb{Z}$$

d'où :

$$x = \frac{m\pi}{k \cos\theta} = \frac{m\lambda}{2 \cos\theta}; \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{IV-13})$$



Pour θ donné, les distances auxquelles on doit placer le plan (Σ') parallèle à (Σ) Sont :

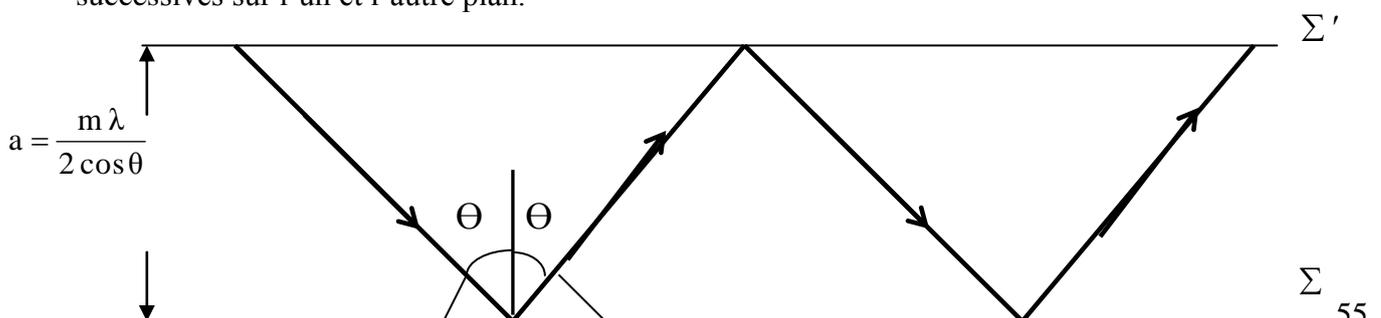
$$\frac{\lambda}{2 \cos\theta_0}, \quad \frac{\lambda}{\cos\theta_0}, \quad \frac{3\lambda}{2 \cos\theta_0} \quad \text{etc ...}$$

Si la distance a entre (Σ) et (Σ') est fixée, la propagation entre ces 2 plans aura lieu si :

$$\cos\theta = \frac{m\lambda}{2a} \quad \text{soit} \quad 0 < \frac{m\lambda}{2a} < 1 \quad (\text{IV-14})$$

a- Caractéristiques de cette propagation

La propagation entre les 2 plans parallèles (Σ) et (Σ') est caractérisée par des réflexions successives sur l'un et l'autre plan.



En un point M de l'espace diélectrique, entre les 2 plans, il y a superposition d'une OEM plane incidente et d'une onde plane réfléchie.

b- Cas particulier : Onde guidée par un seul plan

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le plan (Σ') est rejeté à l'infini ($\cos\theta = 0$; $a \rightarrow \infty$).

Comme $\sin(kx \cos\theta) = 0$ et $\sin(kx \cos\theta) = 1$, on a :

- Pour le mode TE (mode H) :

Toutes les composantes E_y , H_x et H_z sont nulles, il n'y a pas de solutions pratiques.

- Pour le mode TM (mode E) :

$$\bar{E}_x = 2 E_{0i} \exp i(\omega t - k z)$$

$$\bar{H}_y = 2 H_{0i} \exp i(\omega t - k z)$$

Il pourra y avoir propagation d'une OEM guidée par un plan conducteur unique, si le champ \vec{E} est dans le plan d'incidence et le champ \vec{H} est \perp à ce plan.

3) Propagation dans un guide d'ondes rectangulaire

a – Conditions de propagation

Nous avons vu qu'il est possible d'adjoindre un plan (Σ') \parallel (Σ) et d'obtenir une propagation guidée entre ces 2 plans qui sont \perp au plan d'incidence. Nous allons, voir si on peut adjoindre des plans (Π) et (Π') \parallel au plan d'incidence (XOZ) sans perturber cette propagation.

Les conditions de continuité sur ces deux plans sont :

$$E_x = 0 ; E_z = 0 \text{ et } H_y = \frac{B_y}{\mu_0} = 0, \forall x \text{ et } z.$$

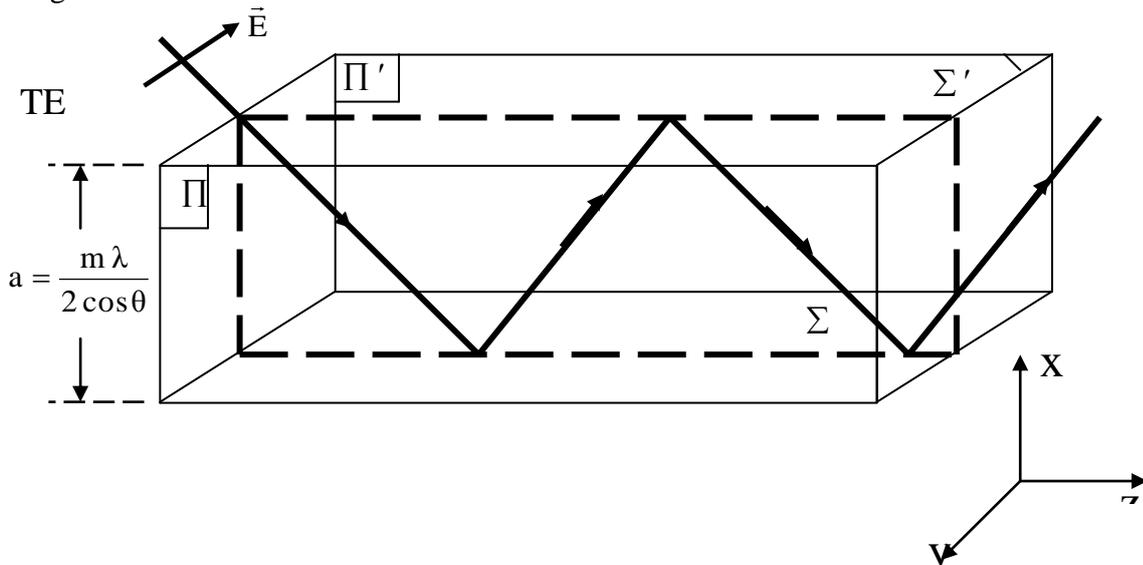
- Cas du mode TE (mode H) :

Les conditions de continuité ci-dessus sont vérifiées $E_x = 0$, $E_z = 0$ et $H_y = 0$. Donc on peut adjoindre 2 plans (Π) et (Π') parallèles à (Σ) et (Σ') et \parallel au plan d'incidence. La distance entre (Π) et (Π') est indifférente.

- Cas du mode TM (mode E) :

Les conditions de continuité ne sont pas satisfaites sur les plans (Π) et (Π') puisque E_x , E_z et H_y ne peuvent être nuls quelque soit x et z.

Il est, donc, impossible d'avoir la propagation d'une onde TM à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire.



Dans le cas général où la polarisation du champ incident est quelconque, on peut le décomposer en :

- une composante \perp au plan d'incidence qui donne naissance à une propagation du type TE dans le guide d'ondes.
- une composante dans le plan d'incidence dont la propagation (mode TM) n'est pas possible.

Conclusion :

La propagation d'une OEM à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire n'est possible que si le champ électrique de l'onde incidente est \perp aux faces sur lesquelles cette onde va se réfléchir successivement.

b – Définitions des modes TE_{0n} , TE_{m0} et TE_{mn}

• Cas où l'OEM se propage par réflexions

successives sur les plans (Σ) et (Σ') \perp à OX

On parle d'une onde TE_{m0} . Le guide d'ondes fonctionne selon le mode TE_{m0} .

Si $m=1$, l'OEM se propage dans le guide d'ondes selon le mode fondamental TE_{10} .

• Cas où l'OEM se propage par réflexions successives sur les plans (Π) et (Π') \perp à OY

On parle d'une onde TE_{0n} . Le guide d'ondes fonctionne selon le mode TE_{0n} .

Si $n=1$, l'OEM se propage selon le mode fondamental TE_{01} . Les deux appellations sont équivalentes.

4) Etude du mode fondamental

Les ondes TE₁₀ (ou TE₀₁) sont celles qui se propagent à l'intérieur des guides d'ondes standards les plus utilisés dans la pratique. Leur étude théorique est relativement simple.

a – Expressions des champs

Le mode TE₁₀ se propage par réflexions successives sur les faces (Σ) et (Σ') distantes de $a = \frac{\lambda}{2 \cos \theta}$, donc :

$$k_x \cos \theta = \frac{2 \pi x}{\lambda} \cos \theta = \frac{2 \pi x}{\lambda} \frac{\lambda}{2 a} = \frac{\pi}{a} x$$

Les composantes complexes du champ EM s'écrivent donc :

$$\bar{E}_y = 2 i E_{0i} \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) \exp i (\omega t - k z \sin \theta) \quad (\text{II-43})$$

$$\bar{H}_x = -2 i H_{0i} \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) \exp i (\omega t - k z \sin \theta) \quad (\text{II-44})$$

$$\bar{H}_z = -2 H_{0i} \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{a} x \right) \exp i (\omega t - k z \sin \theta)$$

b- Puissance active transportée par l'onde TE₁₀

Elle transportée suivant la direction OZ. La densité de puissance suivant cette direction est donnée par le vecteur de Poynting complexe :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{E} \wedge \bar{H}^* \quad (\text{II-45})$$

soit :

$$\bar{P}_z = -\frac{1}{2} \bar{E}_y \cdot \bar{H}_x^* \quad (\text{II-46})$$

la relation de Maxwell – Faraday permet d'écrire $\bar{H} = -\frac{1}{i \mu \omega} \text{rot } \bar{E}$, soit :

$$\bar{H}_x = -\frac{i}{\mu \omega} \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} = -\frac{k}{\mu \omega} \sin \theta \bar{E}_y$$

et $\bar{H}_x^* = -\frac{k}{\mu \omega} \sin \theta \bar{E}_y^*$

donc,

$$\bar{P}_z = \frac{k}{2 \mu \omega} |\bar{E}_y|^2 \sin \theta$$

or, $|\bar{E}_y| = 2 E_{0i} \sin \frac{\pi}{a} x$ et $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4 a^2}}$, d'où :

$$\bar{P}_z = 2 E_{0i}^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4 a^2}} \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) \quad (\text{II-47})$$

C'est la puissance qui traverse l'unité de surface \perp à OZ. Elle dépend du point où l'on se place à cause de $\sin \frac{\pi}{a} x$.

La puissance moyenne active qui traverse un plan de section transverse est :

$$P = \int_0^a \int_0^b P_z \, dx \, dy \quad (\text{II-48})$$

soit :

$$\bar{P}_z = E_{0i}^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}} \, a \cdot b \quad (\text{II-49})$$

Les puissances que peut transporter un guide d'ondes, de dimensions données et fonctionnant à une fréquence donnée, dépendent du d'électrique qui le constitue.

c – Relation de dispersion du guide

L'équation de propagation du champ s'écrit :

$$\Delta \bar{E}_y - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial t^2} = 0$$

avec $\frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} \bar{E}_y$; $\frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial z^2} = -k^2 \sin^2 \theta \bar{E}_y$; $\frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial t^2} = -\omega^2 \bar{E}_y$

on obtient : $k^2 \cos^2 \theta = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$

soit :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2} \quad (\text{II-50})$$

C'est la relation de dispersion du guide. La variation de k avec la pulsation ω n'est pas linéaire, le guide d'ondes se comporte, donc, comme un milieu dispersif.

d – Pulsation et fréquence de coupure du guide d'ondes

L'onde TE_{10} ne peut se propager dans le guide que si $k^2 > 0$, donc si : $\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2} > 0$

soit :

$$\omega > v \frac{\pi}{a}$$

On pose :

$$\omega_c = v \frac{\pi}{a} \quad (\text{II-51})$$

C'est la pulsation de coupure du guide d'onde.

On définit aussi la fréquence de coupure par :

$$F_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{v}{2a} \quad (\text{II-52})$$

La relation de dispersion s'écrit encore :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega_c^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{II-53})$$

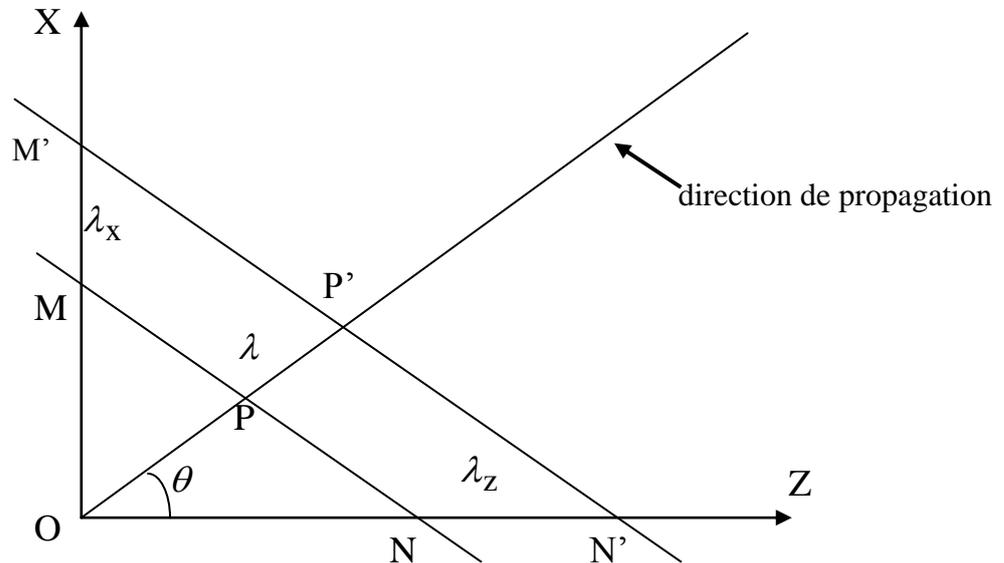
On peut aussi définir la longueur d'onde de coupure par :

$$\lambda_c = \frac{v}{F_c} = \frac{2\pi}{\omega_c} v = 2a \quad (\text{II-54})$$

La largeur du guide est, donc, égale à $\frac{\lambda_c}{2}$.

e – Signification physique de λ , λ_x et λ_z

Suivant les axes OX et OZ, l'onde semble se propager avec une longueur d'onde et une vitesse différentes de celles qu'elle a suivant sa direction de propagation.



On représente dans le plan (XOZ) d'incidence les traces de 2 plans d'ondes successifs dont la distance est :

- $PP' = \lambda$ sur la direction de propagation.
- $NN' = \lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{v_z}{F}$ sur l'axe OZ. C'est une longueur d'onde de phase apparente dans la direction de propagation de l'énergie active. On l'appelle longueur d'onde de propagation guidée.
- $MM' = \lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{v_x}{F}$ sur l'axe OX. C'est une longueur d'onde de phase apparente dans la direction de propagation de l'énergie réactive.
- $PP' = \lambda = \frac{v}{F}$: longueur d'onde de propagation en espace libre dans le diélectrique constituant le guide

On peut déduire la relation fondamentale de la propagation guidée (sachant que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$) :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_z^2} + \frac{1}{\lambda_x^2} \quad (\text{II-55})$$

Le temps mis par l'OEM, pour aller de P en P', est le même que celui pour aller de N en N', elle semble se propager plus rapidement suivant OX et OZ que suivant sa propre direction de propagation. Sa vitesse apparente sur les deux axes est :

$$v_x = \frac{v}{\sin \theta} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{v}{\cos \theta}$$

car :

$$v_x = \lambda_x F = \frac{\lambda}{\sin \theta} F = \frac{v}{\sin \theta} \quad v_z = \lambda_z F = \frac{\lambda}{\cos \theta} F = \frac{v}{\cos \theta}$$

On peut aussi remarquer que :

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \theta} = 2a = \lambda_c$$

(longueur d'onde de coupure)

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}}$$

La relation fondamentale de la propagation du mode (RFPM) TE₁₀ s'écrit :

$$\left(\frac{F}{v}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_z^2} + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \quad (\text{II-56})$$

- Si $\frac{F}{v} > \frac{1}{2a} = \frac{F_c}{v}$ la (RFPM) peut être satisfaite si λ_z est réel. On aura donc $e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_z} z}$ est un terme de phase, l'onde se propage sans atténuation.

- Si $\frac{F}{v} < \frac{1}{2a} = \frac{F_c}{v}$ il faut que λ_z soit imaginaire pur puisque $\frac{1}{\lambda_z^2} < 0$. Tous les termes $e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_z} z}$ sont de la forme e^{-Az} , A réel positif. L'onde s'atténue avec z.

En résumé :

- Si $F > (F_c)_{10}$ ou $\lambda < (\lambda_c)_{10}$ le mode TE₁₀ peut se propager.
- Si $F < (F_c)_{10}$ ou $\lambda > (\lambda_c)_{10}$ ce mode ne peut pas se propager.

4 – Etude des modes TE_{m0} où TE_{0n}

a – Longueur d'onde de coupure

Pour le mode TE_{m0} : $\lambda_c = \lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{2a}{m}$

Si $m = 1$, mode TE_{10} , $\lambda_c = 2a$

Si $m = 2$, mode TE_{20} , $\lambda_c = a$

Si $m = 3$, mode TE_{30} , $\lambda_c = \frac{2a}{3}$ etc ...

La relation fondamentale de la propagation de ces modes s'écrit :

$$\left(\frac{F}{v}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_z^2} + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 \quad (\text{II-57})$$

- Si $F > (F_c)_{m0}$ ou $\lambda < (\lambda_c)_{m0}$ le mode TE_{m0} pourra se propager.

- Si $F < (F_c)_{m0}$ ou $\lambda > (\lambda_c)_{m0}$ ce mode ne pourra pas se propager.

b – Longueur d'onde de propagation guidée

C'est $\lambda_g = \lambda_z$, et comme $\lambda_c = \lambda_x$, on a $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$ donc, $\frac{\lambda}{\lambda_g} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$, soit :

$$\lambda_g = \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (\text{II-58})$$

c – Calcul des dimensions d'un guide d'ondes rectangulaire

Calculons les dimensions a (// à OX) et b (// à OY) pour un guide d'ondes qui doit fonctionner en modes TE_{m0} jusqu'à l'ordre k et transmettre une bande passante de fréquences comprises entre F_1 et F_2 (avec $F_2 > F_1$, soit $\lambda_2 < \lambda_1$).

- pour que les modes TE_{m0} puissent se propager jusqu'à l'ordre k , il faut que : $\lambda < (\lambda_c)_{k0}$,
soit :

$$\lambda_1 < \frac{2a}{k}$$

d'où une première condition sur a : $a > \frac{k\lambda_1}{2}$

- pour que les modes TE_{m0} d'ordres supérieurs à k ne puissent pas se propager, il faut que :

$$\lambda > (\lambda_c)_{k+1,0} = \frac{2a}{k+1}, \quad \text{soit :}$$

$$\lambda_2 > \frac{2a}{k+1}$$

d'où une deuxième condition sur a : $a < \frac{k+1}{2} \lambda_2$

- la distance b entre les plans (Π) et (Π') n'a pas d'influence dans les cas des modes TE_{m0} qui admettent (Σ) et (Σ') comme plans de réflexion. Cette distance ne peut pas être arbitraire. Elle

doit être suffisamment faible pour qu'aucun régime parasite TE_{0n} qui se propage par réflexions sur (Π) et (Π') , \perp à (Σ) et (Σ') , ne puisse exister. Il faut donc que :

$$\lambda_2 > (\lambda_c)_{01} = 2b > (\lambda_c)_{02} = b > (\lambda_c)_{03} = \frac{2b}{3} \dots$$

d'où la condition sur b : $b < \frac{\lambda_2}{2}$

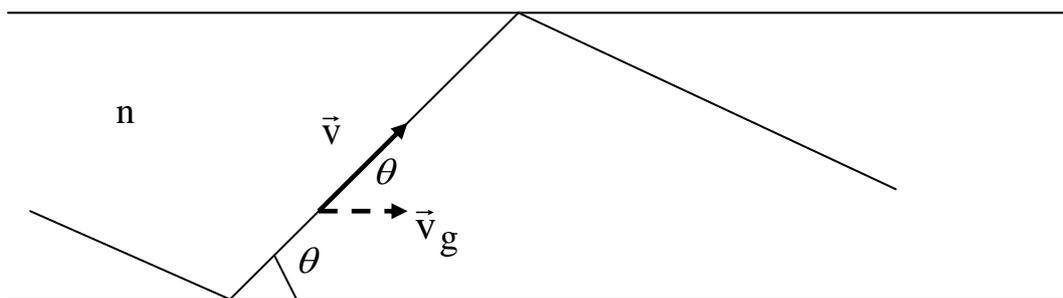
En résumé :

$$\text{on doit avoir : } \begin{cases} \frac{k \lambda_1}{2} < a < \frac{k+1}{2} \lambda_2 \\ \text{et} \\ b < \frac{\lambda_2}{2} \end{cases} \quad (\text{II-59})$$

5 – Vitesse de groupe et vitesse de phase

La vitesse d'une onde plane qui se propage dans un milieu uniforme, d'indice n , est $v = \frac{c}{n}$. C'est la vitesse de propagation de la phase, donc, du plan d'onde. Si on considère le rayon correspondant à un mode de propagation guidé, la vitesse d'une onde plane se propageant dans le guide, avec un angle d'inclinaison θ donnant une réflexion totale, peut être exprimée par $v = \frac{c}{n}$. Cependant, la vitesse effective de l'énergie lumineuse, le long de l'axe Z (direction de propagation du mode) du guide d'ondes est donnée par la longueur de la composante de la vitesse \vec{v} suivant Z . Soit :

$$v_g = v \cos \theta = \frac{c}{n} \cos \theta \quad (\text{II-60})$$



Cette vitesse, appelée vitesse du groupe, est très importante dans les communications optiques, car c'est la vitesse à laquelle les signaux optiques se propagent le long du guide d'ondes.