Chapitre 2

Les développements limités

Définition 2.1 (Développement limité d'une fonction en 0**)** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 (on note de façon abrégée $\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égale à n tel que*

$$f(x) = P(x) + \circ_0(x^n).$$

La fonction polynomiale P est appelée partie régulière du développement limité d'ordre n en 0 de f.

Exemple 2.2

- *Les polynômes réels admettent des développements limités à tous les ordres. Par exemple, le polynôme $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^3$ admet pour développement limité en 0 :*
  - $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + \circ_0(x^2)$ *développement limité à l'ordre 2 en 0.*
  - $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^3 + \circ_0(x^5)$ *développement limité à l'ordre 5 en 0.*
- *On a*

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$, le $\mathrm{DL_n}(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$;

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

Définition 2.3 (Développement limité d'une fonction en x_0**)** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un développement limité* *d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égale à n tel que*

$$f(x) = P(x) + \circ_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Remarque 2.4 *Dans la pratique, on utilise surtout les développements limités en* 0. *En fait si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 de la forme*

$$f(x) = P(x) + \circ_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors par le changement de variable $h = x - x_0$ on se ramène à un développement limité en 0

$$f(x_0 + h) = P(x_0 + h) + \circ_0(h^n).$$

Proposition 2.5 (Unicité du développement limité) *Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en* 0, *celui-ci est unique.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons que f admette en 0 deux développements limités d'ordre n distincts. Alors il existe deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus n tels que

$$f(x) = P_1(x) + \circ_0(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = P_2(x) + \circ_0(x^n).$$

Donc

$$P_1(x) - P_2(x) = \circ_0(x^n).$$

Écrivant

$$P_1(x) - P_2(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

Comme la fonction $x \mapsto x^n$ ne s'annule pas et $P_1(x) - P_2(x) = \circ_0(x^n)$, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{P_1(x) - P_2(x)}{x^n} = 0 \tag{2.1}$$

ou encore

$$\lim_{x \to 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^n} = 0$$

ce qui est impossible puisque $P_1(x) - P_2(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \neq 0.$ □

Proposition 2.6 *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en* 0 *de partie régulière P.*

- *Si f est paire alors la fonction polynomiale P est paire.*
- *Si f est impaire alors la fonction polynomiale P est impaire.*

Démonstration. Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors il existe un voisinage V de 0 et une fonction ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme V est un voisinage de 0, il existe $\eta > 0$ tel que $]-\eta, \eta[\subseteq V$. Pour tout $x \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$ on a

$$f(-x) = P(-x) + (-1)^n x^n \varepsilon(-x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$$

où la fonction ε_1 est définie sur $]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$ par $\varepsilon_1(x) = (-1)^n \varepsilon(-x)$ et vérifie $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Ainsi

- Si f est paire alors pour tout $x \in]-\eta, \eta[$ on a $f(-x) = f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0 (Proposition 2.5), on en déduit que $P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, et par conséquent $P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si f est impaire alors pour tout $x \in]-\eta, \eta[$ on a $f(-x) = -f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0 (Proposition 2.5), on en déduit que $P(-x) = -P(x)$ pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, et par conséquent $P(-x) = -P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Proposition 2.7 *Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \circ_0(x^n)$$

alors f est continue ou prolongeable par continuité en 0. Plus précisément, il existe un voisinage V de 0 tel que la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in V \setminus \{0\} \\ a_0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0. De plus $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de nombre dérivé a_1.

Démonstration. La fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, donc il existe un voisinage V de 0 et une fonction ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in V \setminus \{0\} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n = a_0$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n = a_0$$

ce qui montre que la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in V \setminus \{0\} \\ a_0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est continue en 0.

Pour tout $x \in V \setminus \{0\}$, on a $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$. Comme $n \geq 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - a_0}{x} = \lim_{x \to 0^+} a_1 + \cdots + a_n x^{n-1} + \varepsilon(x) x^{n-1} = a_1$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - a_0}{x} = \lim_{x \to 0^-} a_1 + \cdots + a_n x^{n-1} + \varepsilon(x) x^{n-1} = a_1.$$

Par suite la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de nombre dérivé a_1. □

Remarque 2.8 *Attention ! Même lorsque $n \geq 2$, l'existence d'un développement limité d'ordre n n'assure pas l'existence de $f''(0)$. Par exemple, considérons la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 2\cos(\frac{1}{x^2})$$

Donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 car f' n'est pas continue à gauche de 0 (cela est dû au terme $2\cos(\frac{1}{x^2})$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 0). Pourtant la fonction f vérifie

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \circ_0(x^2).$$

$\square$

Exemple 2.9 *Le théorème de Taylor-Young permet d'obtenir le développement limité d'ordre n en 0 de plusieurs fonctions usuelles :*

- *Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(0) = 1$. On en déduit que*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ_0(x^n).$$

- *Considérons la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\cos(x)^{(k)} = \cos(x + k\frac{\pi}{2}).$$

En particulier,

$$\cos(0)^{(k)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ 0 & \textit{si } k \textit{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \circ_0(x^{2p+1}).$$

- *Considérons la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sin(x)^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2}).$$

En particulier,

$$\sin(0)^{(k)} = \begin{cases} 0 & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ (-1)^p & \textit{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \circ_0(x^{2p+2}).$$

- *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)} = \alpha.(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. On en déduit que*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha.(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ_0(x^n).$$

Exercice 2.10

1. *Donner le développement limité de la fonction* $x \mapsto 1 + x - x^4$ *au voisinage de* 0 *d'ordre* 2 *et d'ordre* 5.
2. *Donner le développement limité de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ *au voisinage de* 0 *d'ordre* 3.
3. *Donner le développement limité de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *au voisinage de* 1 *d'ordre* 3.

La notion de développement limité possède pour généralisation naturelle les notions de développements limités à gauche ou à droite. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ n'est pas dérivable en 0 donc n'admet pas en 0 de développement limité d'ordre supérieur à 1. Remarquons que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et que les fonctions $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ admettent pour développement limité d'ordre n en 0 respectivement

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \circ(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \circ(x^n)$$

Ces considérations motivent la définition suivante.

Définition 2.11

— *On dit que la fonction* f *admet un développement limité d'ordre* n *à gauche de* 0 *s'il existe un polynôme* P *de* $\mathbb{R}[X]$ *de degré au plus égal à* n, *un réel* η *strictement négatif et une application* ε *définie sur* $]\eta, 0[$ *tels que pour tout* $x \in]\eta, 0[$

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \textit{avec} \quad \lim_{x \to 0^-} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f(x) = P(x) + \circ_{0^-}(x^n)$.

— *On dit que la fonction* f *admet un développement limité d'ordre* n *à droite de* 0 *s'il existe un polynôme* P *de* $\mathbb{R}[X]$ *de degré au plus égal à* n, *un réel* η *strictement positif et une application* ε *définie sur* $]0, \eta[$ *tels que pour tout* $x \in]0, \eta[$

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \textit{avec} \quad \lim_{x \to 0^+} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f(x) = P(x) + \circ_{0^+}(x^n)$

Exemple 2.12 *Comme* $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$ *, on obtient*

$$\frac{\sin(x)}{|x|} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + \circ_{0^+}(x^4)$$

$$\frac{\sin(x)}{|x|} = -1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + \circ_{0^-}(x^4)$$

Définition 2.13 (Développement limité au voisinage de l'infini) *On dit qu'une fonction f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si la fonction $t \mapsto f(\frac{1}{t})$ admet un développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en 0. Ce développement limité généralisé est donné par*

$$f(x) = P(\frac{1}{x}) + \frac{\varepsilon(x)}{x^n} \quad avec \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0 \quad (resp., \lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0).$$

On note $f(x) = P(\frac{1}{x}) + \circ_{+\infty}(\frac{1}{x^n})$ resp., $f(x) = P(\frac{1}{x}) + \circ_{-\infty}(\frac{1}{x^n})$

Exemple 2.14 *Calculons le développement limité généralisé d'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Pour cela, considérons la fonction g définie par*

$$g(t) = f(1/t).$$

On a

$$g(t) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1} = \frac{1}{1+t}$$

et le développement limité d'ordre 3 en 0 de g est $g(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \circ(t^3)$. On en déduit que f admet pour développement limité généralisé à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \circ_{+\infty}(\frac{1}{x^3}).$$

2.1 Opérations sur les développements limités

Lorsque la fonction f a une expression un peu plus compliquée, le théorème de Taylor-Young conduit rapidement à des calculs longs et compliqués.
Comme on a vu, on peut toujours se ramener d'un développement limité en un point quelconque $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ à un développement limité en 0. C'est pour quoi, on expliquera uniquement les opérations sur les développements limités en 0.

Proposition 2.15 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités de même ordre n en 0, de parties régulières respectives P et Q.*

1. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $\alpha P + \beta Q$.*
2. *La fonction $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est obtenue en conservant les monômes de degré au plus égal à n du polynôme $P \times Q$.*
3. *Si $g(0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est le quotient de la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q.*

Démonstration. Les deux premières assertions sont des conséquences directs de la définition 2.1 et de la proposition 2.5.
Montrons l'assertion 3. Par hypothèse, f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P, donc il existe un voisinage V_1 de 0 et une fonction ε_1 définie sur $V_1 \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V_1 \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Puisque g admet un développement limité en 0, d'après la proposition 2.7, on peut supposer que g est continue en 0. De plus, comme $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) \neq 0$, il existe un voisinage V_2 de 0 sur lequel g ne s'annule pas. D'autre part, il existe un voisinage V_3 de 0 et une fonction ε_2 définie sur $V_3 \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V_3 \setminus \{0\}$

$$g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

On a $Q(0) = g(0) \neq 0$, on peut donc effectuer la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q ; il existe $(U, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = Q \times U + X^{n+1} \times R \quad \text{avec } \deg(U) \leq n.$$

Ainsi pour tout $x \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{P(x)+x^n\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} = \frac{Q(x)U(x)+x^{n+1}R(x)+x^n\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} \\
&= \frac{Q(x)U(x)+x^nU(x)\varepsilon_2(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} + \frac{-x^nU(x)\varepsilon_2(x)+x^{n+1}R(x)+x^n\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} \\
&= U(x)+x^n\frac{-U(x)\varepsilon_2(x)+xR(x)+\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$ et $Q(0)\neq 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-U(x)\varepsilon_2(x)+xR(x)+\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} = 0$. On en déduit que

$$\forall x \in V_1\cap V_2\cap V_3 \quad \frac{f(x)}{g(x)} = U(x)+x^n\varepsilon_3(x) \quad \text{avec} \quad \deg(U)\leq n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0$$

où $\varepsilon_3(x) = \frac{-U(x)\varepsilon_2(x)+xR(x)+\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)}$. Ce qui montre que la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière U. □

Exemple 2.16

- *D'après l'exemple 2.9, les fonctions sinus et cosinus admettent pour développements limités en* 0 *à l'ordre* 3*,*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \circ_0(x^3) \quad \textit{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \circ_0(x^3)$$

  Donc les développements limités à l'ordre 3 *en* 0 *pour les fonctions* $x \mapsto \sin(x)+\cos(x)$ *et* $x\mapsto \sin(x).\cos(x)$ *s'obtiennent de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
\sin(x)+\cos(x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+\circ_0(x^3) \\
&= 1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\circ_0(x^3); \\
\sin(x)\times\cos(x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}\right).\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+\circ_0(x^3) \\
&= x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{12}+\circ_0(x^3) \\
&= x-\frac{2x^3}{3}+\circ_0(x^3) \quad (\textit{car } \tfrac{x^5}{12}=\circ_0(x^3)).
\end{aligned}$$

- *Déterminons le développement limité d'ordre* 3 *en* 0 *de la fonction* $f : x\mapsto \frac{x+2}{e^x}$*.*

  On a

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ_0(x^3)$$

Puisque $e^0 \neq 0$*, on peut effectuer la division par puissance croissante de* $x+2$ *par* $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$*.*

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2+x & 1+\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} \\
- & 2+2x+x^2+\frac{x^3}{3} & 2-x+\frac{1}{6}x^3 \\
\hline
 & -x-x^2-\frac{x^3}{3} & \\
- & -x-x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6} & \\
\hline
 & \frac{1}{6}x^3+\frac{x^4}{6} & \\
- & \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{36}x^6 & \\
\hline
 & -\frac{1}{12}x^5-\frac{1}{36}x^6 &
\end{array}
$$

Le développement limité d'ordre 3 *en* 0 *de la fonction* f *est donc*

$$\frac{x+2}{e^x} = 2 - x + \frac{1}{6}x^3 + \circ_0(x^3)$$

□

Proposition 2.17 *Soit* f *une fonction définie au voisinage de* 0*, admettant un développement limité d'ordre* n *en* 0 *:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \circ_0(x^n) = a_0 + P_0(x) + \circ_0(x^n)$$

et soit g *une fonction définie au voisinage de* a_0*, admettant un développement limité d'ordre* n *en* a_0 *:*

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a_0) + b_2(x-a_0)^2 + \cdots + b_n(x-a_0)^n + \circ_{a_0}((x-a_0)^n)$$

ou encoure

$$g(a_0+h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \cdots + b_nh^n + \circ_0(h^n)$$

alors $g \circ f$ *admet un développement limité d'ordre* n *en* 0*, dont la partie régulière est obtenue en tronquant le polynôme*

$$b_0 + P_0(x)b_1 + \cdots + [P_0(x)]^n b_n$$

à l'ordre n*.*

Démonstration. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$, la fonction $g \circ f$ est bien définie au voisinage de 0. Pour x voisin de 0, on pose $h(x) = f(x) - a_0$. Comme $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, on a

$$(g \circ f)(x) = g(a_0 + h(x)) = b_0 + b_1 h(x) + b_2 h(x)^2 + \cdots + b_n h(x)^n + \circ_0(h(x)^n).$$

Ainsi,

$$(g \circ f)(x) = b_0 + b_1 h(x) + b_2 h(x)^2 + \cdots + b_n h(x)^n + \circ_0(x^n)$$

puisque $h(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \circ_0(x^n)$. Enfin, comme h admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par $h(x) = P_0(x) + \circ_0(x^n)$, on en déduit que la fonction $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est obtenue en tronquant à l'ordre n le polynôme $b_0 + P_0(x) b_1 + \cdots + [P_0(x)]^n b_n$. $\square$

Remarquons que cette démonstration donne un moyen de calculer le développement limité de la fonction composée de deux fonctions.

Exemple 2.18 *Les fonctions sinus et exponentielle admettent en* 0 *pour développements limités :*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ_0(x^4) \quad et \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

Comme $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$*, on obtient donc le développement limité d'ordre* 4 *en* 0 *suivant pour la fonction* $h : x \mapsto e^{\sin(x)}$*,*

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + \circ(x^4) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3\right) + \frac{1}{24}(x^4) + \circ(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \circ(x^4). \end{aligned}$$

Lemme 2.19 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* g *une fonction dérivable au voisinage de* 0*.*

$$Si\ g'(x) = \circ(x^n) \quad alors \quad g(x) - g(0) = \circ(x^{n+1})$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse, $\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{x^n} = 0$. Donc,
il existe $\eta > 0$ tel que si $|x| < \eta$, on a $|g'(x)| < \varepsilon |x^n|$.
Si $x > 0$, appliquons l'inégalité des accroissements finis dans l'intervalle $[0, x]$,
pour $0 \le x < \eta$ on obtient $|g(x) - g(0)| \le \varepsilon x^{n+1}$.
De la même manière, si $-\eta < x < 0$, on obtient $|g(x) - g(0)| \le \varepsilon |x|^{n+1}$. Donc pour $|x| < \eta$, on a bien $|g(x) - g(0)| \le \varepsilon |x|^{n+1}$. Ce qui montre que $g(x) - g(0) = \circ(x^{n+1})$. $\square$

Proposition 2.20 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0. Si f' admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ en 0 dont la partie régulière est la primitive de P qui vaut $f(0)$ en 0. Autrement dit,*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)dt + \circ(x^{n+1}).$$

Démonstration. Posons $g(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x P(t)dt$. Par hypothèse, on a

$$g'(x) = f'(x) - P(x) = \circ(x^n).$$

Comme $g(0) = 0$, le lemme 2.19 montre que $g(x) = \circ(x^{n+1})$. D'où

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)dt + \circ(x^{n+1}).$$

$\square$

Remarque 2.21 *L'existence d'un* $\mathrm{DL_n}(0)$ *de f n'implique pas forcément l'existence d'un* $\mathrm{DL_{n-1}}(0)$ *de f'. En effet la fonction $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ admet un* $\mathrm{DL_1}(0)$ *qui s'écrit $f(x) = \circ(x)$. Mais*

$$f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

n'admet pas de $\mathrm{DL_0}(0)$.

2.2 Utilisations des développements limités

Utilisation pour la recherche d'équivalents

Définition 2.22 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction Λ définie sur $V \setminus \{x_0\}$ telle que,*

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\} \quad f(x) = \Lambda(x)g(x) \quad et \quad \lim_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1.$$

On note $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f \sim g$ au voisinage de x_0.

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition 2.22.

Proposition 2.23 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Proposition 2.24 *Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL_n(x_0)}$ de partie régulière*

$$a_\nu (x - x_0)^\nu + \cdots + a_n (x - x_0)^n \quad \text{‘}avec\, a_\nu \neq 0.$$

Alors

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu (x - x_0)^\nu$$

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$f(x) = a_\nu (x - x_0)^\nu + \cdots + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a_\nu (x - x_0)^\nu} &= \lim_{x \to x_0} 1 + \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}(x - x_0) + \cdots + \frac{a_n}{a_\nu}(x - x_0)^{n-\nu} + \frac{1}{a_\nu}(x - x_0)^{n-\nu}\varepsilon(x - x_0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

ce qui montre que $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu (x - x_0)^\nu$. □

Comportement local d'une fonction au voisinage d'un point critique

Proposition 2.25 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. Supposons que f admette un $\mathrm{DL_p(x_0)}$ de la forme*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha (x - x_0)^p + \circ((x - x_0)^p) \quad avec\, \alpha \neq 0 \; et\, p \geq 2.$$

Alors

1. *si p est pair et $\alpha > 0$, alors x_0 est un minimum local ;*
2. *si p est pair et $\alpha < 0$, alors x_0 est un maximum local ;*
3. *si p est impair, x_0 n'est ni un minimum, ni un maximum.*

Démonstration. Si p est pair et $\alpha > 0$, alors le fait que $\lim\limits_{x \to x_0} \circ((x - x_0)^p) = 0$, assure l'existence d'un $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$, on a $| \circ ((x - x_0)^p)| < \frac{\alpha}{4}(x - x_0)^p$. Donc, pour $|x - x_0| < \eta$, on obtient

$$0 < \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p < \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p + \circ((x - x_0)^p)$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \alpha(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) \\ &\geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) \\ &\geq f(x_0) \end{aligned}$$

Le deuxième cas se ramène au premier en considérant $-f$. Dans le troisième cas, supposons par exemple que $\alpha > 0$. On a alors, en suivant une démarche analogue

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) > f(x_0)$$

pour $0 < x-x_0 < \eta$, ce qui interdit d'avoir un maximum local ; et lorsque $-\eta < x-x_0 < 0$

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) < f(x_0)$$

ce qui interdit d'avoir un minimum local. □

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 2.26 *Soit f une fonction admettant un développement limité en x_0 de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_p(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p)$$

où p est le plus petit entier ≥ 2 tel que a_p soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est $y = a_0 + a_1(x-x_0)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $a_p(x-x_0)^p$.

Position d'une courbe par rapport à son asymptote

Proposition 2.27 *On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet un développement limité en ∞ :*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_p}{x^p} + \circ(\frac{1}{x^p})$$

où p est le plus petit entier ≥ 2 tel que a_p soit non nul. Alors la droite $y = a_0x + a_1$ est une asymptote à la courbe de f en ∞ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$,c-à-d le signe de $\frac{a_p}{x^p}$.

Exemple 2.28 *Soit* $f(x) = \sqrt{x + x^2} e^{\frac{1}{x}}$. *Montrons que* f *admet une asymptote en* $+\infty$. *En effet, posons* $h = \frac{1}{x}$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= hf(\frac{1}{h}) = h\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2}} e^h \\
&= h\sqrt{\frac{1}{h^2}(h+1)} e^h = \frac{h}{|h|}\sqrt{h+1} e^h \\
&= \sqrt{h+1} e^h = (1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8})(1 + h + \frac{h^2}{2}) + \circ(h^2) \\
&= 1 + \frac{3}{2}h + \frac{7}{8}h^2 + \circ(h^2)
\end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = \frac{3}{2} + x + \frac{7}{8x} + \circ(\frac{1}{x})$$

Donc la courbe admet en $+\infty$ *l'asymptote d'équation* $y = \frac{3}{2} + x$. *Comme* $\frac{7}{8x}$ *est positif au voisinage de* $+\infty$, *la courbe est en dessus de son asymptote.*