Chapitre 2

Les développements limités

Définition 2.1 (Développement limité d'une fonction en 0**)** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* f *une fonction définie au voisinage de* 0*. On dit que* f *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* 0 *(on note de façon abrégée* $\mathrm{DL}_n(0)$*) s'il existe un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré au plus égale à* n *tel que*

$$f(x) = P(x) + \circ_0(x^n).$$

La fonction polynomiale P *est appelée partie régulière du développement limité d'ordre* n *en* 0 *de* f*.*

Exemple 2.2

- *Les polynômes réels admettent des développements limités à tous les ordres. Par exemple, le polynôme* $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^3$ *admet pour développement limité en* 0 *:*
  - $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + \circ_0(x^2)$ *développement limité à l'ordre* 2 *en* 0*.*
  - $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^3 + \circ_0(x^5)$ *développement limité à l'ordre* 5 *en* 0*.*
- *On a*

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$*, le* $\mathrm{DL_n}(0)$ *de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ *est* $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ *;*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

Définition 2.3 (Développement limité d'une fonction en x_0**)** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* f *une fonction définie au voisinage de* x_0*. On dit que* f *admet un développement limité* *d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égale à n tel que*

$$f(x) = P(x) + \circ_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Remarque 2.4 *Dans la pratique, on utilise surtout les développements limités en* 0. *En fait si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 de la forme*

$$f(x) = P(x) + \circ_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors par le changement de variable $h = x - x_0$ on se ramène à un développement limité en 0

$$f(x_0 + h) = P(x_0 + h) + \circ_0(h^n).$$

Proposition 2.5 (Unicité du développement limité) *Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en* 0*, celui-ci est unique.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons que f admette en 0 deux développements limités d'ordre n distincts. Alors il existe deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus n tels que

$$f(x) = P_1(x) + \circ_0(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = P_2(x) + \circ_0(x^n).$$

Donc

$$P_1(x) - P_2(x) = \circ_0(x^n).$$

Écrivant

$$P_1(x) - P_2(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

Comme la fonction $x \mapsto x^n$ ne s'annule pas et $P_1(x) - P_2(x) = \circ_0(x^n)$, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{P_1(x) - P_2(x)}{x^n} = 0 \tag{2.1}$$

ou encore

$$\lim_{x \to 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^n} = 0$$

ce qui est impossible puisque $P_1(x) - P_2(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \neq 0$. $\square$

Proposition 2.6 *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en* 0 *de partie régulière P.*

- *Si f est paire alors la fonction polynomiale P est paire.*
- *Si f est impaire alors la fonction polynomiale P est impaire.*

Démonstration. Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors il existe un voisinage V de 0 et une fonction ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme V est un voisinage de 0, il existe $\eta > 0$ tel que $]-\eta, \eta[\subseteq V$. Pour tout $x \in]-\eta, \eta[\setminus\{0\}$ on a

$$f(-x) = P(-x) + (-1)^n x^n \varepsilon(-x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

où la fonction ε_1 est définie sur $]-\eta, \eta[\setminus\{0\}$ par $\varepsilon_1(x) = (-1)^n\varepsilon(-x)$ et vérifie $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Ainsi

- Si f est paire alors pour tout $x \in]-\eta, \eta[$ on a $f(-x) = f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0 (Proposition 2.5), on en déduit que $P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, et par conséquent $P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si f est impaire alors pour tout $x \in]-\eta, \eta[$ on a $f(-x) = -f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0 (Proposition 2.5), on en déduit que $P(-x) = -P(x)$ pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, et par conséquent $P(-x) = -P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

Proposition 2.7 *Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \circ_0(x^n)$$

alors f est continue ou prolongeable par continuité en 0. Plus précisément, il existe un voisinage V de 0 tel que la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in V \setminus \{0\} \\ a_0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0. De plus $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de nombre dérivé a_1.

Démonstration. La fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, donc il existe un voisinage V de 0 et une fonction ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in V \setminus \{0\} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n = a_0$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n = a_0$$

ce qui montre que la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in V \setminus \{0\} \\ a_0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est continue en 0.

Pour tout $x \in V \setminus \{0\}$, on a $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$. Comme $n \geq 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - a_0}{x} = \lim_{x \to 0^+} a_1 + \cdots + a_n x^{n-1} + \varepsilon(x) x^{n-1} = a_1$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - a_0}{x} = \lim_{x \to 0^-} a_1 + \cdots + a_n x^{n-1} + \varepsilon(x) x^{n-1} = a_1.$$

Par suite la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de nombre dérivé a_1. $\square$

Remarque 2.8 *Attention ! Même lorsque $n \geq 2$, l'existence d'un développement limité d'ordre n n'assure pas l'existence de $f''(0)$. Par exemple, considérons la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) & \textit{si } x \neq 0 \\ 1 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 2\cos(\frac{1}{x^2})$$

Donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 car f' n'est pas continue à gauche de 0 (cela est dû au terme $2\cos(\frac{1}{x^2})$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 0). Pourtant la fonction f vérifie

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \circ_0(x^2).$$

$\square$

Exemple 2.9 *Le théorème de Taylor-Young permet d'obtenir le développement limité d'ordre n en 0 de plusieurs fonctions usuelles :*

- *Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(0) = 1$. On en déduit que*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ_0(x^n).$$

- *Considérons la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\cos(x)^{(k)} = \cos(x + k\frac{\pi}{2}).$$

En particulier,

$$\cos(0)^{(k)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \circ_0(x^{2p+1}).$$

- *Considérons la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sin(x)^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2}).$$

En particulier,

$$\sin(0)^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \circ_0(x^{2p+2}).$$

- *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)} = \alpha.(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. On en déduit que*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha.(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ_0(x^n).$$

Exercice 2.10

1. *Donner le développement limité de la fonction* $x \mapsto 1 + x - x^4$ *au voisinage de* 0 *d'ordre* 2 *et d'ordre* 5.
2. *Donner le développement limité de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ *au voisinage de* 0 *d'ordre* 3.
3. *Donner le développement limité de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *au voisinage de* 1 *d'ordre* 3.

La notion de développement limité possède pour généralisation naturelle les notions de développements limités à gauche ou à droite. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ n'est pas dérivable en 0 donc n'admet pas en 0 de développement limité d'ordre supérieur à 1. Remarquons que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et que les fonctions $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ admettent pour développement limité d'ordre n en 0 respectivement

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \circ(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \circ(x^n)$$

Ces considérations motivent la définition suivante.

Définition 2.11

— *On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n à gauche de 0 s'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un réel η strictement négatif et une application ε définie sur $]\eta, 0[$ tels que pour tout $x \in]\eta, 0[$*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \textit{avec} \quad \lim_{x \to 0^-} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f(x) = P(x) + \circ_{0^-}(x^n)$.

— *On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n à droite de 0 s'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un réel η strictement positif et une application ε définie sur $]0, \eta[$ tels que pour tout $x \in]0, \eta[$*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \textit{avec} \quad \lim_{x \to 0^+} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f(x) = P(x) + \circ_{0^+}(x^n)$

Exemple 2.12 *Comme* $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$ *, on obtient*

$$\frac{\sin(x)}{|x|} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + \circ_{0^+}(x^4)$$

$$\frac{\sin(x)}{|x|} = -1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} + \circ_{0^-}(x^4)$$

Définition 2.13 (Développement limité au voisinage de l'infini) *On dit qu'une fonction f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si la fonction $t \mapsto f(\frac{1}{t})$ admet un développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en 0. Ce développement limité généralisé est donné par*

$$f(x) = P(\frac{1}{x}) + \frac{\varepsilon(x)}{x^n} \quad avec \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0 \quad (resp., \lim_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0).$$

On note $f(x) = P(\frac{1}{x}) + \circ_{+\infty}(\frac{1}{x^n})$ resp., $f(x) = P(\frac{1}{x}) + \circ_{-\infty}(\frac{1}{x^n})$

Exemple 2.14 *Calculons le développement limité généralisé d'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Pour cela, considérons la fonction g définie par*

$$g(t) = f(1/t).$$

On a

$$g(t) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t} + 1} = \frac{1}{1+t}$$

et le développement limité d'ordre 3 en 0 de g est $g(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \circ(t^3)$. On en déduit que f admet pour développement limité généralisé à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \circ_{+\infty}(\frac{1}{x^3}).$$

2.1 Opérations sur les développements limités

Lorsque la fonction f a une expression un peu plus compliquée, le théorème de Taylor-Young conduit rapidement à des calculs longs et compliqués.
Comme on a vu, on peut toujours se ramener d'un développement limité en un point quelconque $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ à un développement limité en 0. C'est pour quoi, on expliquera uniquement les opérations sur les développements limités en 0.

Proposition 2.15 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités de même ordre n en 0, de parties régulières respectives P et Q.*

1. *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $\alpha P + \beta Q$.*
2. *La fonction $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est obtenue en conservant les monômes de degré au plus égal à n du polynôme $P \times Q$.*
3. *Si $g(0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est le quotient de la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q.*

Démonstration. Les deux premières assertions sont des conséquences directs de la définition 2.1 et de la proposition 2.5.
Montrons l'assertion 3. Par hypothèse, f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P, donc il existe un voisinage V_1 de 0 et une fonction ε_1 définie sur $V_1 \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V_1 \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Puisque g admet un développement limité en 0, d'après la proposition 2.7, on peut supposer que g est continue en 0. De plus, comme $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) \neq 0$, il existe un voisinage V_2 de 0 sur lequel g ne s'annule pas. D'autre part, il existe un voisinage V_3 de 0 et une fonction ε_2 définie sur $V_3 \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V_3 \setminus \{0\}$

$$g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

On a $Q(0) = g(0) \neq 0$, on peut donc effectuer la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de P par Q ; il existe $(U, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = Q \times U + X^{n+1} \times R \quad \text{avec } \deg(U) \leq n.$$

Ainsi pour tout $x \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{P(x)+x^n\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} = \frac{Q(x)U(x)+x^{n+1}R(x)+x^n\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} \\
&= \frac{Q(x)U(x)+x^nU(x)\varepsilon_2(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} + \frac{-x^nU(x)\varepsilon_2(x)+x^{n+1}R(x)+x^n\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} \\
&= U(x)+x^n\frac{-U(x)\varepsilon_2(x)+xR(x)+\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$ et $Q(0) \neq 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-U(x)\varepsilon_2(x)+xR(x)+\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)} = 0$. On en déduit que

$$\forall x \in V_1 \cap V_2 \cap V_3 \quad \frac{f(x)}{g(x)} = U(x)+x^n\varepsilon_3(x) \quad \text{avec} \quad \deg(U) \leq n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$$

où $\varepsilon_3(x) = \frac{-U(x)\varepsilon_2(x)+xR(x)+\varepsilon_1(x)}{Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)}$. Ce qui montre que la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière U. □

Exemple 2.16

- *D'après l'exemple 2.9, les fonctions sinus et cosinus admettent pour développements limités en* 0 *à l'ordre* 3*,*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \circ_0(x^3) \quad \textit{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \circ_0(x^3)$$

Donc les développements limités à l'ordre 3 *en* 0 *pour les fonctions* $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ *et* $x \mapsto \sin(x).\cos(x)$ *s'obtiennent de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
\sin(x)+\cos(x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+\circ_0(x^3) \\
&= 1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\circ_0(x^3); \\
\sin(x)\times\cos(x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}\right).\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+\circ_0(x^3) \\
&= x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{12}+\circ_0(x^3) \\
&= x-\frac{2x^3}{3}+\circ_0(x^3) \quad (\textit{car } \tfrac{x^5}{12} = \circ_0(x^3)).
\end{aligned}$$

- *Déterminons le développement limité d'ordre* 3 *en* 0 *de la fonction* $f : x \mapsto \frac{x+2}{e^x}$*.*

On a

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ_0(x^3)$$

Puisque $e^0 \neq 0$, *on peut effectuer la division par puissance croissante de* $x+2$ *par* $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

$$
\begin{array}{r|l}
\;2+x & 1+\;x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} \\
-\;\;2+2x+x^2+\frac{x^3}{3} & \qquad 2-x+\frac{1}{6}x^3 \\
\hline
-x-x^2-\frac{x^3}{3} & \\
-\;\;-x-x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6} & \\
\hline
\frac{1}{6}x^3+\frac{x^4}{6} & \\
-\;\;\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{36}x^6 & \\
\hline
-\frac{1}{12}x^5-\frac{1}{36}x^6 &
\end{array}
$$

Le développement limité d'ordre 3 *en* 0 *de la fonction* f *est donc*

$$\frac{x+2}{e^x} = 2 - x + \frac{1}{6}x^3 + \circ_0(x^3)$$

$\square$

Proposition 2.17 *Soit* f *une fonction définie au voisinage de* 0, *admettant un développement limité d'ordre* n *en* 0 *:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \circ_0(x^n) = a_0 + P_0(x) + \circ_0(x^n)$$

et soit g *une fonction définie au voisinage de* a_0, *admettant un développement limité d'ordre* n *en* a_0 *:*

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a_0) + b_2(x-a_0)^2 + \cdots + b_n(x-a_0)^n + \circ_{a_0}((x-a_0)^n)$$

ou encoure

$$g(a_0+h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \cdots + b_nh^n + \circ_0(h^n)$$

alors $g \circ f$ *admet un développement limité d'ordre* n *en* 0, *dont la partie régulière est obtenue en tronquant le polynôme*

$$b_0 + P_0(x)b_1 + \cdots + [P_0(x)]^n b_n$$

à l'ordre n.

Démonstration. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a_0$, la fonction $g\circ f$ est bien définie au voisinage de 0. Pour x voisin de 0, on pose $h(x) = f(x) - a_0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, on a

$$(g\circ f)(x) = g(a_0 + h(x)) = b_0 + b_1 h(x) + b_2 h(x)^2 + \cdots + b_n h(x)^n + \circ_0(h(x)^n).$$

Ainsi,

$$(g\circ f)(x) = b_0 + b_1 h(x) + b_2 h(x)^2 + \cdots + b_n h(x)^n + \circ_0(x^n)$$

puisque $h(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \circ_0(x^n)$. Enfin, comme h admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par $h(x) = P_0(x) + \circ_0(x^n)$, on en déduit que la fonction $g\circ f$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est obtenue en tronquant à l'ordre n le polynôme $b_0 + P_0(x)b_1 + \cdots + [P_0(x)]^n b_n$. $\square$

Remarquons que cette démonstration donne un moyen de calculer le développement limité de la fonction composée de deux fonctions.

Exemple 2.18 *Les fonctions sinus et exponentielle admettent en* 0 *pour développements limités :*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ_0(x^4) \quad \textit{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$*, on obtient donc le développement limité d'ordre* 4 *en* 0 *suivant pour la fonction* $h : x \mapsto e^{\sin(x)}$*,*

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + \circ(x^4) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3\right) + \frac{1}{24}(x^4) + \circ(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \circ(x^4). \end{aligned}$$

Lemme 2.19 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* g *une fonction dérivable au voisinage de* 0*.*

$$\textit{Si } g'(x) = \circ(x^n) \quad \textit{alors} \quad g(x) - g(0) = \circ(x^{n+1})$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g'(x)}{x^n} = 0$. Donc,
il existe $\eta > 0$ tel que si $|x| < \eta$, on a $|g'(x)| < \varepsilon |x^n|$.
Si $x > 0$, appliquons l'inégalité des accroissements finis dans l'intervalle $[0, x]$,
pour $0 \le x < \eta$ on obtient $|g(x) - g(0)| \le \varepsilon x^{n+1}$.
De la même manière, si $-\eta < x < 0$, on obtient $|g(x) - g(0)| \le \varepsilon |x|^{n+1}$. Donc pour $|x| < \eta$, on a bien $|g(x) - g(0)| \le \varepsilon |x|^{n+1}$. Ce qui montre que $g(x) - g(0) = \circ(x^{n+1})$. $\square$

Proposition 2.20 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0. Si f' admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ en 0 dont la partie régulière est la primitive de P qui vaut $f(0)$ en 0. Autrement dit,*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)dt + \circ(x^{n+1}).$$

Démonstration. Posons $g(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x P(t)dt$. Par hypothèse, on a

$$g'(x) = f'(x) - P(x) = \circ(x^n).$$

Comme $g(0) = 0$, le lemme 2.19 montre que $g(x) = \circ(x^{n+1})$. D'où

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)dt + \circ(x^{n+1}).$$

$\square$

Remarque 2.21 *L'existence d'un* $\mathrm{DL_n}(0)$ *de f n'implique pas forcément l'existence d'un* $\mathrm{DL_{n-1}}(0)$ *de f'. En effet la fonction $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ admet un* $\mathrm{DL_1}(0)$ *qui s'écrit $f(x) = \circ(x)$. Mais*

$$f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

n'admet pas de $\mathrm{DL_0}(0)$.

2.2 Utilisations des développements limités

Utilisation pour la recherche d'équivalents

Définition 2.22 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction Λ définie sur $V \setminus \{x_0\}$ telle que,*

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\} \quad f(x) = \Lambda(x)g(x) \quad et \quad \lim_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1.$$

On note $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f \sim g$ au voisinage de x_0.

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition 2.22.

Proposition 2.23 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Proposition 2.24 *Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL_n(x_0)}$ de partie régulière*

$$a_\nu(x-x_0)^\nu + \cdots + a_n(x-x_0)^n \quad \text{'avec } a_\nu \neq 0.$$

Alors

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu(x-x_0)^\nu$$

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$f(x) = a_\nu(x-x_0)^\nu + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a_\nu(x-x_0)^\nu} &= \lim_{x \to x_0} 1 + \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}(x-x_0) + \cdots + \frac{a_n}{a_\nu}(x-x_0)^{n-\nu} + \frac{1}{a_\nu}(x-x_0)^{n-\nu}\varepsilon(x-x_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu(x-x_0)^\nu$. □

Comportement local d'une fonction au voisinage d'un point critique

Proposition 2.25 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. Supposons que f admette un $\mathrm{DL_p(x_0)}$ de la forme*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \text{ et } p \geq 2.$$

Alors

1. *si p est pair et $\alpha > 0$, alors x_0 est un minimum local ;*
2. *si p est pair et $\alpha < 0$, alors x_0 est un maximum local ;*
3. *si p est impair, x_0 n'est ni un minimum, ni un maximum.*

Démonstration. Si p est pair et $\alpha > 0$, alors le fait que $\lim_{x \to x_0} \circ((x-x_0)^p) = 0$, assure l'existence d'un $\eta > 0$ tel que si $|x-x_0| < \eta$, on a $|\circ((x-x_0)^p)| < \frac{\alpha}{4}(x-x_0)^p$. Donc, pour $|x-x_0| < \eta$, on obtient

$$0 < \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p < \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p)$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \alpha(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) \\ &\geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) \\ &\geq f(x_0) \end{aligned}$$

Le deuxième cas se ramène au premier en considérant $-f$. Dans le troisième cas, supposons par exemple que $\alpha > 0$. On a alors, en suivant une démarche analogue

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) > f(x_0)$$

pour $0 < x - x_0 < \eta$, ce qui interdit d'avoir un maximum local ; et lorsque $-\eta < x - x_0 < 0$

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p) < f(x_0)$$

ce qui interdit d'avoir un minimum local. □

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 2.26 *Soit f une fonction admettant un développement limité en x_0 de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_p(x-x_0)^p + \circ((x-x_0)^p)$$

où p est le plus petit entier ≥ 2 tel que a_p soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est $y = a_0 + a_1(x-x_0)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $a_p(x-x_0)^p$.

Position d'une courbe par rapport à son asymptote

Proposition 2.27 *On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet un développement limité en ∞ :*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_p}{x^p} + \circ(\frac{1}{x^p})$$

où p est le plus petit entier ≥ 2 tel que a_p soit non nul. Alors la droite $y = a_0x + a_1$ est une asymptote à la courbe de f en ∞ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$, c-à-d le signe de $\frac{a_p}{x^p}$.

Exemple 2.28 *Soit* $f(x) = \sqrt{x + x^2}e^{\frac{1}{x}}$. *Montrons que* f *admet une asymptote en* $+\infty$. *En effet, posons* $h = \frac{1}{x}$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= hf(\frac{1}{h}) = h\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2}}e^h \\
&= h\sqrt{\frac{1}{h^2}(h+1)}e^h = \frac{h}{|h|}\sqrt{h+1}e^h \\
&= \sqrt{h+1}e^h = (1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8})(1 + h + \frac{h^2}{2}) + \circ(h^2) \\
&= 1 + \frac{3}{2}h + \frac{7}{8}h^2 + \circ(h^2)
\end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = \frac{3}{2} + x + \frac{7}{8x} + \circ(\frac{1}{x})$$

Donc la courbe admet en $+\infty$ *l'asymptote d'équation* $y = \frac{3}{2} + x$. *Comme* $\frac{7}{8x}$ *est positif au voisinage de* $+\infty$, *la courbe est en dessus de son asymptote.*

Chapitre 3

Courbes paramétrées

Définition 3.1 *Une courbe paramétrée est un couple (D, f) où D est une partie de $\mathbb{R}$ et $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*
L'ensemble $\{f(t)\ , t \in D\}$ est appelé support de (D, f).

Remarque 3.2 *Écrivons $f(t) = M(t) = (x(t), y(t))$. Alors dans un plan $\mathbb{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe paramétrée (D, f) décrit l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan $\mathbb{P}$ tels que (x, y) dépendent de paramètre t :*

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Physiquement, cela s'interprète comme la trajectoire d'un point mobile $M(t)$ en fonction du temps t.

Exemples 3.3

- *Le couple $D = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(t) = (t, at + b)$ définie une courbe paramétrée dont le support est la droite d'équation $y = ax + b$.*
- *Le système* $\begin{cases} x = \cos(t) \\ \qquad\qquad t \in [0, 2\pi[\\ y = \sin(t) \end{cases}$ *définit la courbe paramétrée dont le support est la cercle trigonométrique.*
- *Le système* $\begin{cases} x = (1-t)x_A + tx_B \\ \qquad\qquad t \in [0, 1] \\ y = (1-t)y_A + ty_B \end{cases}$ *définit la courbe paramétrée dont le support est le segment $[A, B]$.*

Remarque 3.4

- *Des courbes paramétrées différentes peuvent avoir un même support. C'est par exemple le cas des courbes :*

$$\begin{array}{rcc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t),\sin(t)) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rcc} [0,4\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t),\sin(t)) \end{array}$$

  dont le support est un cercle, parcouru une seule fois pour la première paramétrisation et deux fois pour l'autre.

- *La paramétrisation n'est pas unique. En effet, si $\psi : I \longrightarrow D$ une bijection, alors $(I, f\circ\psi)$ et (D,f) ont le même support et définissent la même courbe.*

3.1 Étude générale d'une courbe paramétrée

3.1.1 Réduction de domaine d'étude

Soit (D,f) une courbe paramétrée. Le domaine de définition de la courbe (D,f) est le domaine de définition D_f de f qui est l'intersection des ensembles de définition de $x(t)$ et $y(t)$.

La première étape d'étude de f consiste à réduire le domaine d'étude en s'appuyant sur une périodicité ou/et des symétries. Plusieurs cas sont possibles. La liste suivante n'est pas exhaustive.

- Cas où les fonctions x et y sont périodiques de période T, c-à-d pour tout $t \in D_f$

$$t-T\in D_f, \quad t+T\in D_f, \quad x(t+T)=x(t) \quad \text{et} \quad y(t+T)=y(t).$$

  Donc on peut alors restreindre l'étude à l'intersection de D_f avec un intervalle de longueur T, et on obtient ainsi toute la courbe.

- Cas où D_f est symétrique par rapport à 0 et où les fonctions x et y sont paires. Alors pour tout $t\in D_f$, $M(-t)=M(t)$. Donc on peut alors restreindre l'étude à $D_f\cap\mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe qui est par courue deux fois.

- Cas où D_f est symétrique par rapport à 0 et où les fonctions x et y sont impaires. Alors pour tout $t\in D_f$, $M(-t)$ est le symétrique central du point $M(t)$ par rapport à O. Donc on peut alors restreindre l'étude à $D_f\cap\mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant l'arc par une symétrie par rapport à O.

- Cas où D_f est symétrique par rapport à 0 et où la fonction x est paire et la fonction y est impaire. Alors pour tout $t \in D_f$ le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à Ox. D'où on peut alors restreindre l'étude à $D_f \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant l'arc par une symétrie par rapport à Ox.
- Cas où D_f est symétrique par rapport à 0 et où la fonction x est impaire et la fonction y est paire. Alors pour tout $t \in D_f$ le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à Oy. Donc on peut alors restreindre l'étude à $D_f \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant l'arc par une symétrie par rapport à Oy.
- Cas où D_f est symétrique par rapport à 0 et où $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$. Alors pour tout $t \in D_f$ le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donc on peut alors restreindre l'étude à $D_f \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant l'arc par une symétrie par rapport à $y = x$.
- Cas où D_f est symétrique par rapport à 0 et où $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$. Alors pour tout $t \in D_f$ le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = -x$. Donc on peut alors restreindre l'étude à $D_f \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe en complétant l'arc par une symétrie par rapport à $y = -x$.
- Cas où D_f est symétrique par rapport à $\frac{\alpha}{2}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, c-à-d
$$\forall t \in D_f, \quad \alpha - t \in D_f$$
et où $\begin{cases} x(\alpha - t) = x(t) \\ y(\alpha - t) = y(t) \end{cases}$. Alors pour tout $t \in D_f$, le point $M(\alpha - t)$ coïncide avec le point $M(t)$. Donc on peut alors restreindre l'étude à $D_f \cap [\frac{\alpha}{2}, +\infty[$, et on obtient toute la courbe qui est par courue deux fois.

Exemple 3.5 *Considérons la courbe paramétrée* $t \longmapsto (\sin(2t), \sin(3t))$, $t \in \mathbb{R}$.

- *La fonction x est périodique de période $T_x = \frac{2\pi}{2} = \pi$ et la fonction y est également périodique, de période $T_y = \frac{2\pi}{3}$. Le rapport entre ces deux périodes est*
$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} = \frac{2}{3}$$
C'est un nombre rationnel, il existe donc une période commune T entre x et y qui est donnée par
$$T = 3T_y = 2T_x = 2\pi$$

On peut donc se réduire à l'étude de la courbe sur un domaine de longueur 2π. Ainsi on obtient la courbe complète quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

- *Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.*
- *Pour tout $t \in [0, \pi]$,*

$$\begin{cases} x(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = -\sin(2t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(3\pi - 3t) = -\sin(3t) = -y(t) \end{cases}$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on effectue la réflexion d'axe Oy, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

3.1.2 Points simples, points multiples

Définition 3.6 *Soit (D, f) une courbe paramétrée et soit A un point du plan. La multiplicité du point A par rapport à la courbe (D, f) est le nombre $\mathrm{Card}(f^{-1}(A))$.*
Si la multiplicité du A est égale à 2, A est dit double.

Remarque 3.7 *Pour trouver les points doubles d'une courbe f, on cherche les couples $(u, v) \in D_f^2$ tels que*

$$u < v \quad \textit{et} \quad M(v) = M(u).$$

Exemple 3.8 *Déterminer les points doubles de la courbe $(\mathcal{C})$ définie paramétriquement par*

$$\begin{cases} x = t - \frac{1}{t^2} \\ \qquad\qquad\qquad t \in \mathbb{R}^* \\ y = t + t^2 \end{cases}$$

Cherchons $u < v$ tels que $M(u) = M(v)$. Les nombres u et v vérifient

$$\begin{cases} u - \frac{1}{u^2} = v - \frac{1}{v^2} \\ u + u^2 = v + v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (u - v)(1 + \frac{u+v}{u^2v^2}) = 0 \\ (u - v)(1 + v + u) = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit

$$\begin{cases} u + v = -1 \\ uv = \pm 1 \end{cases}$$

Donc u et v sont solution de $r^2 + r \pm 1 = 0$. D'où

$$u = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < v = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Le point double est donc $A = f(u) = f(v) = (\frac{2+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}, 1)$. $\square$

3.2 Étude locale d'une courbe paramétrée

Définition 3.9 *Soit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathcal{D}$, une courbe paramétrée et soit $t_0 \in \mathcal{D}$.*

- *On dit que la courbe est continue en t_0 si et seulement si les fonctions x et y le sont.*
- *On dit que la courbe est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions x et y le sont. On note $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. Les dérivées d'ordre k sont définies par $f^{(k)}(t_0) = (x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0))$ quand elles existent. On dit que la courbe est de classe C^k ssi x et y sont de classe C^k.*

En se basant sur les développements de Taylor-Young de x et y, on obtient

Proposition 3.10 *Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle ouvert I contenant t_0. Alors il existe une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$ et que*

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$

pour tout $t \in I$.

Définition 3.11 *On dira que la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ si la droite $(M(t_0)M(t))$ a une limite quant $t \to t_0$. D'une manière équivalente si*

$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{||\overrightarrow{M(t_0)M(t)}||} = \pm \lim_{t \to t_0^-} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{||\overrightarrow{M(t_0)M(t)}||}$$

car, selon l'orientation, deux vecteurs unitaires dirigent la droite $(M(t_0)M(t))$ sont possibles.

Points réguliers et singuliers

Définition 3.12 *Soit $M(t_0)$ un point de la courbe paramétrée (D, f). Le point $M(t_0)$ est dit régulier si*

$$f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

Un point non régulier est dit singulier ou stationnaire.

Proposition 3.13 *Soit $M(t_0)$ un point d'une courbe paramétrée (D, f) de classe $\mathcal{C}^k$. Alors*

1. *Si $M(t_0)$ est un point régulier, alors la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $f'(t_0) = M'(t_0)$.*
2. *Si $M(t_0)$ est un point singulier, alors la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $f^{(p)}(t_0) = M^{(p)}(t_0)$, où p est le plus petit entier tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$.*

Démonstration. Soit $q = \min\{i \in \{1, \cdots, k\} \mid f^{(i)}(t_0) \neq 0\}$. Par la formule de Taylor-Young on obtient

$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} M^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon(t), \quad \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0^+} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{||\overrightarrow{M(t_0)M(t)}||} &= \lim_{t \to t_0^+} \frac{(t-t_0)^q (M^{(q)}(t_0) + q!\varepsilon(t))}{|t-t_0|^q ||M^{(q)}(t_0) + q!\varepsilon(t)||} \\ &= \frac{M^{(q)}(t_0)}{||M^{(q)}(t_0)||} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0^-} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{||\overrightarrow{M(t_0)M(t)}||} &= \lim_{t \to t_0^-} \frac{(t-t_0)^q (M^{(q)}(t_0) + q!\varepsilon(t))}{|t-t_0|^q ||M^{(q)}(t_0) + q!\varepsilon(t)||} \\ &= (-1)^q \frac{M^{(q)}(t_0)}{||M^{(q))}(t_0)||} \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat □

Remarque 3.14 *Dans tous les cas, le premier vecteur drivée non nul $f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente en $M(t_0)$.*
Pour avoir l'équation cartésienne de la tangente, on remarque que M appartient à la tangente veut dire que les vecteurs $\overrightarrow{M(t_0)M}$ et $f^{(p)}(t_0)$ sont liés. Ce qui donne

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x^{(p)}(t_0) \\ y - y(t_0) & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y^{(p)}(t_0)(x - x(t_0)) - x^{(p)}(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

où (x, y) sont les coordonnées de point M.

Allure de la courbe au voisinage d'un point $M(t_0)$

On se propose de préciser l'allure de la courbe au voisinage de t_0. On supposera que f est k-fois dérivable et qu'il existe deux vecteurs dérivées successifs indépendants au voisinage de t_0. On pose

$$p = \min\{1 \leq i \leq k \mid f^{(i)}(t_0) \neq 0\} \quad \text{et} \quad q = \min\{p < i \leq k \mid f^{(i)}(t_0) \, \text{soit indépendant de} \, f^p(t_0)\}$$

La formule de Taylor-Young d'ordre q, autour de t_0 :

$$M(t) = M(t_0) + \sum_{i=p}^{q-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} f^{(i)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon(t), \ \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$$

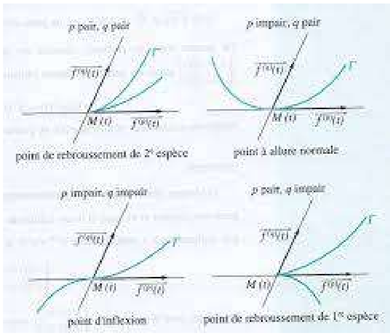
Comme pour tout $p+1 \leq i \leq q-1$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(i)}(t_0) = \lambda_i f^{(p)}(t_0)$,

$$M(t) - M(t_0) \quad = \quad (\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{t-t_0}{(p+1)!} + \cdots + \lambda_{q-1} \frac{(t-t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!})(t-t_0)^p f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0)$$

Notons $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$. Alors

$$X(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad Y(t) \underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

En particulier, $X(t)$ et $(t-t_0)^p$ ont le même signe près de t_0, et $Y(t)$ et $(t-t_0)^q$ ont le même signe près de t_0. Suivant la parité des entiers p et q, la courbe ne peut donc avoir au voisinage du point $M(t_0)$ que l'une des quatre allures suivantes



Exemple 3.15 *Étudier la courbe suivante au voisinage de $t_0 = 0$:*

$$\begin{cases} x = e^t - 1 - t \\ y = t^3 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \circ(t^3) \\ y = t^3 \end{cases}$$

Alors

$$f(0) = (0,0), \ f'(0) = (0,0) \ f^{(2)}(1,0) \ et \quad f^{(3)} = (1,6)$$

On voit que $f^{(2)}(0)$ et $f^{(3)}(0)$ sont libres, donc

$$p = 2 \quad et \quad q = 3$$

Donc $M(0)$ est un point de rebroussement de 1^e espèce

Branches infinies

Définition 3.16 *On dit que (I, f) ou $(\mathcal{C})$ admet une branche infinie en t_0 si* $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$

On distingue alors les cas suivants.

1. Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \ell$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, alors $(\mathcal{C})$ admet une asymptote d'équation $x = \ell$ au voisinage de t_0.
2. Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \ell$, alors $(\mathcal{C})$ admet une asymptote d'équation $y = \ell$ au voisinage de t_0.
3. Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ et
   (a) Si $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction Oy, au voisinage de t_0.
   (b) Si $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction Ox, au voisinage de t_0.
   (c) Si $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$ et
      i. Si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$, alors $(\mathcal{C})$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, au voisinage de t_0.
      ii. Si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$, au voisinage de t_0.
      iii. Si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t)$ n'existe pas, alors on ne peut pas conclure.
   (d) Si $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ n'existe pas, alors on ne peut pas conclure.

Edude d'une courbe paramétrée :

Le plan d'étude d'une courbe paramétrée est le suivant

1. Détermination du domaine de définition et réduire le domaine d'étude si possible ;
2. Dresser un tableau de variations de x et de y ;
3. Étude des asymptotes ;
4. Étude des points singuliers, calcul de quelques tangentes ;
5. Détermination des points doubles ;

6. Représentation graphique.

Exemple 3.17 *On considère la courbe paramétrée f définie par*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1-t^2} \\ \\ y(t) = \frac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Comme la fonction x est paire et la fonction y est impaire, on peut se contenter de faire l'étude sur $D_e = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Pour tout $t \in D_e$, on a

$$x'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$$

et

$$y'(t) = \frac{3t^2(1-t^2) + 2t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$$

On obtient, d'après calcul des limites le tableau de variations suivant :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty \; \Vert \; -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2} \; \Vert \; \frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty \; \Vert \; -\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$
y'	0	$+$		$+$	0	$-$	

On a

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \iff t = 0$$

Donc $M(0)$ est le seul point stationnaire de la courbe.

Au voisinage de 0, on a

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 + \circ(t^3) \\ y(t) = t^3 + \circ(t^3) \end{cases}$$

Comme les vecteurs $f^{(2)} = (2,0)$ *et* $f^{(3)}(0) = (0,6)$ *sont libres,* $p = 2$ *et* $q = 3$ *et donc* $M(0)$ *est un point de rebroussement de* 1^{er} *espèce.*

Remarquons que la courbe présente trois branches infinies :

- *En* 1 *: On a*

$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{t^3}{1-t^2}}{\frac{1}{1-t^2}} = \lim_{t\to 1} t^3 = 1$$

  et

$$\lim_{t\to 1} y(t) - x(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t^3}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{1-t^2} = -\frac{3}{2}$$

  donc la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ *est asymptote à la courbe au voisinage de* 1*.*
  Ensuite :

$$y(t) - (x(t) - \frac{3}{2}) = \frac{t^3}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} + \frac{3}{2} = \frac{-2t^2+t+1}{2(1+t)} = \frac{-(t-1)(t+\frac{1}{2})}{t+1}$$

  est positif pour $t < 1$ *et négatif pour* $t > 1$*. On en déduit que la courbe est au dessus de son asymptote lorsque t tend vers* 1^- *et au dessous lorsque tend vers* 1^+*.*

- *En* $+\infty$ *: On a*

$$\lim_{t\to +\infty} x(t) = 0 \quad et \quad \lim_{t\to +\infty} y(t) = -\infty$$

  donc l'axe des ordonnées est asymptote de la courbe en $+\infty$*.*

On obtient le tracé suivant