Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Filière : Tronc commun MIP

Module : M135

==

ANALYSE 3 :
Fonctions de plusieurs variables
et calcul des intégrales multiples

Exercices corrigés

==

Professeur : S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2021/2022

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Filière : Tronc commun MIP

Module : M135

==

ANALYSE 3 :
Fonctions de plusieurs variables
et calcul des intégrales multiples

Exercices corrigés

==

Professeur : S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2021/2022

Table des matières

1 **Notions Topologiques dans $\mathbb{R}^n$** 3

2 **Fonctions de plusieurs variables réelles** 25

3 **Calculs des intégrales doubles et triples** 56

Chapitre 1

Notions Topologiques dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1.1. Pour deux éléments $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire de x et y par

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

1. Montrer que $(x|x)\lambda^2 + 2\lambda(x|y) + (y|y) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$(x|y)^2 \leq (x|x)\,(y|y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Solution. 1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(x|x)\lambda^2 + 2\lambda(x|y) + (y|y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\lambda^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda^2\, x_i^2 + 2\lambda\, x_i\, y_i + y_i^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i + y_i)^2 \geq 0\end{aligned}$$

2. Pour tous éléments x et y fixés dans $\mathbb{R}^n$, le polynôme $P(\lambda) = (x|x)\lambda^2 + 2\lambda(x|y) + (y|y)$, dont le degré est 2, est toujours positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors son discriminant Δ est négatif, c'est-à-dire, $\Delta = 4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0$. D'où le résultat de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1.2. 1. Montrer que $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

2. Plus généralement, pour $p \in [1, +\infty[$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $\| \|_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Indication : Utiliser l'inégalité de Minkowski suivante

$$(|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

pour tous réels $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

3. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$ les normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.
4. Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

Solution. 1. ★ L'application $\| \ \|_1 : x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est bien définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Vérifie-t-elle les 3 propriétés d'une norme ?

$i)$ La séparation : Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ \Leftrightarrow & \ x_i = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

$ii)$ L'homogénéité : Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| \, |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1 .$$

$iii)$ L'inégalité triangulaire : Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 = & \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\ \leq & \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) \\ \leq & \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \textstyle\sum_{i=1}^{n} |y_i| \\ \|x + y\|_1 \leq & \ \|x\|_1 + \|y\|_1 . \end{aligned}$$

Donc, $\| \ \|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

★ L'application $\| \ \|_2$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est positive. Vérifie-t-elle les 3 propriétés d'une norme ?

$i)$ La séparation : Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^2 = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ \Leftrightarrow & \ x_i = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

$ii)$ L'homogénéité : Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_2 = & \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ = & \ |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|_2 . \end{aligned}$$

$iii)$ L'inégalité triangulaire : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante "à vérifier" :

$$< x|y >^2 \leq < x|x >< y|y > \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

où $< x|y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ est le produit scalaire entre x et y. En particulier,

$$< x|x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_2^2 \text{ et } < y|y >= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|y\|_2^2,$$

donc, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est équivalente à

$$| < x|y > | \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$

Alors, pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 = & \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
= & \|x\|_2^2 + 2 < x|y > + \|y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2| < x|y > | + \|y\|_2^2 \\
\leq & \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \, \|y\|_2 + \|y\|_2^2 \quad \text{(D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
\|x+y\|_2^2 \leq & (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

Ce qui implique l'inégalité triangulaire

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Finalement, l'application $\| \ \|_2$ vérifie bien les 3 conditions d'une norme. Donc, $\| \ \|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

★ L'application $\| \ \|_\infty$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$ est positive. Vérifie-t-elle les 3 propriétés d'une norme ?

i) La séparation : Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow & \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
\Leftrightarrow & \ x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

ii) L'homogénéité : Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |\lambda x_i| = \sup_{i=1,\dots,n} |\lambda| \, |x_i| = |\lambda| \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

iii) L'inégalité triangulaire : Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty = & \sup_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \\
\leq & \sup_{i=1,\dots,n} (|x_i| + |y_i|) \\
\leq & \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| + \sup_{i=1,\dots,n} |y_i| \\
\|x+y\|_\infty \leq & \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc, $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. Par définition, l'application $\| \ \|_p$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est positive. Vérifie-t-elle les 3 propriétés d'une norme ?

$i)$ La séparation : Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 0 \\ \Leftrightarrow |x_i| = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

$ii)$ L'homogénéité : Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \|x\|_p.\end{aligned}$$

$iii)$ L'inégalité triangulaire : Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= (|x_1 + y_1|^p + |x_2 + y_2|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \leq (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} &+ (|y_1|^p + |y_2|^p + \cdots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Inég. de Minkowski)}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.\end{aligned}$$

Finalement, l'application $\| \ \|_p$ vérifie bien les 3 conditions d'une norme. Donc, $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrons que les deux normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \beta \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| = \sup(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = |x_{i_0}|.$$

On a $|x_{i_0}|^p \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p$, alors

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| = (|x_{i_0}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$, et par suite on peut choisir $\alpha = 1$.
Maintenant, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $|x_i| \leq \|x\|_\infty$. Alors,

$$|x_i|^p \leq \|x\|_\infty^p, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^p,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n\|x\|_\infty^p,$$

ce qui implique que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (n\|x\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquence, $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$. Alors, on peut prendre $\beta = n^{\frac{1}{p}}$. Finalement, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui signifie que les deux normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. D'après la question précédente, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty, \ \forall p \in [1, +\infty[.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \lim_{p\to\infty} \left(n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty\right).$$

Or $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty$ et $\lim\limits_{p\to\infty} \left(n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty\right) = \left(\lim\limits_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}}\right)\|x\|_\infty = \|x\|_\infty$ puisque $\lim\limits_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = \lim\limits_{p\to\infty} \exp(\frac{1}{p}\ln n) = 1$. Par suite,

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Exercice 1.3. Soit d l'application définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^n, d)$ est un espace métrique.
2. La distance d est-elle associée à une norme ?

Solution. 1. L'application d est bien définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Vérifie-t-elle les trois propriétés d'une distance ?
La séparation et la symétrie sont évidentes à vérifier par construction de l'applicatin d. Pour l'inégalité triangulaire, en prenant trois points x, y et z dans $\mathbb{R}^n$, on discute deux cas possibles :
★ Si $x = y$, alors $d(x,y) = 0$, ce qui implique que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.
★ Si $x \neq y$, alors $d(x,y) = 1$ et ($z \neq x$ ou $z \neq y$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$), ce qui signifie que $d(x,y) = 1$ et ($d(x,z) = 1$ ou $d(z,y) = 1$). Donc $d(x,y) = 1$ et ($d(x,z) + d(z,y) \geq 1$), d'où $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.
Par conséquent, d est une distance sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, $(\mathbb{R}^n, d)$ est un espace métrique, appelé l'espace métrique discret et la d est dite distance discrète.

2. Supposons que la distance discrète d est induite par une norme N sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il existe une norme N telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = N(x-y)$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $d(x,0) = N(x)$. Ce qui entraine que
$$d(2x,0) = N(2x) = 2N(x) = 2d(x,0).$$
Or $x \neq 0$ et $2x \neq 0$, c'est-à-dire, $d(x,0) = d(2x,0) = 1$, alors $1 = 2 \times 1$ qui est une contradiction. Par conséquent, la distance d n'est associée à aucune norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.4. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Vérifier que l'application d définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d(x,y) = \|x-y\|$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$ (la distance d est dite associée à la norme $\| \ \|$).
2. Montrer que l'application d' définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d'(x,y) = \sqrt{||x-y||}$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$. Est-elle associée à une norme ?
3. Soit N une norme sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $N(x) = \alpha\, |x|$.

Solution. 1. L'application d définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d(x,y) = \|x-y\|$ est une application positive bien définie. Vérifie-t-elle les 3 propriétés d'une distance ?

i) La séparation : Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow x = y.$$

ii) La symétrie : Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a
$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$$

iii) L'inégalité triangulaire : Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\begin{aligned} d(x,y) = &\ \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \\ \leq &\ \|x-z\| + \|z-y\| \\ d(x,y) \leq &\ d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Donc, d est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2. Par définition, l'application d' définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ est positive. vérifie-elle les 3 propriétés d'une distance ?

i) La séparation : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, puisque d est une distance.

ii) La symétrie : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)} = \sqrt{d(y,x)} = d'(y,x)$.

iii) L'inégalité triangulaire : Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et puisque d est une distance, on a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Or la fonction usuelle de la racine $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante, alors on a $\sqrt{d(x,y)} \leq \sqrt{d(x,z) + d(z,y)}$. En utilisant le fait que $\sqrt{t+t'} \leq \sqrt{t} + \sqrt{t'}$ (à vérifier), on déduit que $\sqrt{d(x,z) + d(z,y)} \leq \sqrt{d(x,z)} + \sqrt{d(z,y)}$. Par conséquence, $\sqrt{d(x,y)} \leq \sqrt{d(x,z)} + \sqrt{d(z,y)}$. D'où $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$.

Finalement, l'application d' vérifie bien les 3 conditions d'une distance. Donc, d' est une distance sur $\mathbb{R}^n$.
Supposons que cette distance d' est induite par une norme N sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il existe une norme N telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d'(x,y) = N(x-y)$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $d'(x,0) = N(x)$. Ce qui entraine que

$$\sqrt{2}\sqrt{||x||} = \sqrt{2||x||} = \sqrt{||2x||} = d'(2x,0) = N(2x) = 2N(x) = 2d'(x,0) = 2\sqrt{||x||},$$

qui est une contradiction puisque le vecteur x est non nul. Par conséquent, la distance d' n'est associée à aucune norme sur $\mathbb{R}^n$.

3. Soit N une norme sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$N(x) = N(x \times 1) = |x|\, N(1) = \alpha\, |x|, \quad \text{où} \quad \alpha = N(1) > 0.$$

Exercice 1.5. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$N(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Prouver que les normes N et $\|\ \|_2$ sont équivalentes.
3. Déterminer et dessiner les boules fermées unitées pour les normes N et $\|\ \|_2$.

Solution. 1. Pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $N(X) = N(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \geq 0$. Reste à montrer que l'application N satisfait les 3 propriétés d'une norme sur $\mathbb{R}^2$. Pour simplifier les calculs, on peut remarquer que $N(x,y) = \|(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})\|_2$ et on utilise le fait que $\|\ \|_2$ est une norme.

$i)$ La séparation : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} N(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = 0 &\Leftrightarrow \|(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})\|_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) = (0,0) \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

$ii)$ L'homogénéité : Pour tous $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} N(\lambda X) &= N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \|(\frac{\lambda x}{a}, \frac{\lambda y}{b})\|_2 \\ &= \|\lambda(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})\|_2 = |\lambda|\|(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})\|_2 = |\lambda| N(x,y) = |\lambda| N(X). \end{aligned}$$

Alors $N(\lambda X) = |\lambda| X, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2$.

$iii)$ L'inégalité triangulaire : Pour tous $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} N(X + X') &= N((x,y) + (x',y')) = N(x + x', y + y') \\ &= \|(\frac{x+x'}{a}, \frac{y+y'}{b})\|_2 = \|(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) + (\frac{x'}{a}, \frac{y'}{b})\|_2 \\ &\leq \|(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})\|_2 + \|(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{b})\|_2 \\ &= N(x,y) + N(x',y') \\ &= N(X) + N(X'). \end{aligned}$$

Finalement, l'application N vérifie bien les 3 conditions d'une norme. Donc, N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Posons $\alpha = \max(a, b)$ et $\beta = \min(a, b)$, alors

$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{\beta},$$

ce qui entraine que

$$\frac{x^2}{\alpha^2} \leq \frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{\beta^2} \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{\alpha^2} \leq \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{y^2}{\beta^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Par sommation terme à terme on obtient

$$\frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{\beta^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

et par suite

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{\alpha^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{\beta^2}}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{\alpha}\|(x, y)\|_2 \leq N(x, y) \leq \frac{1}{\beta}\|(x, y)\|_2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce qui signifie que les deux normes N et $\|\ \|_2$ sont équivalentes.

3. Pour la norme $\|\ \|_2$, la boule fermée unité est $B'_{\|\ \|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et on a

$$\begin{aligned} B'_{\|\ \|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = B'_{\|\ \|_2}((0,0), 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ \|(x, y)\|_2 \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

qui représente le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

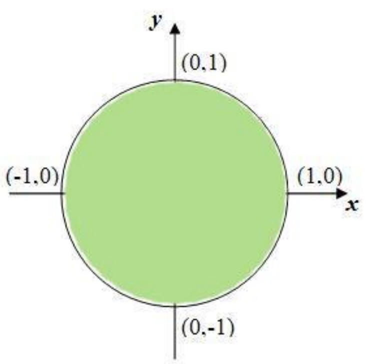


FIGURE 1.1 – Boule fermée unité pour la norme $\|\ \|_2$

Pour la norme N, la boule fermée unité est $B'_N(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et on a

$$\begin{aligned} B'_N(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = B'_N((0,0), 1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ N(x,y) \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, \end{aligned}$$

qui représente l'ellipse de centre $(0,0)$ et de demi-axes a et b.

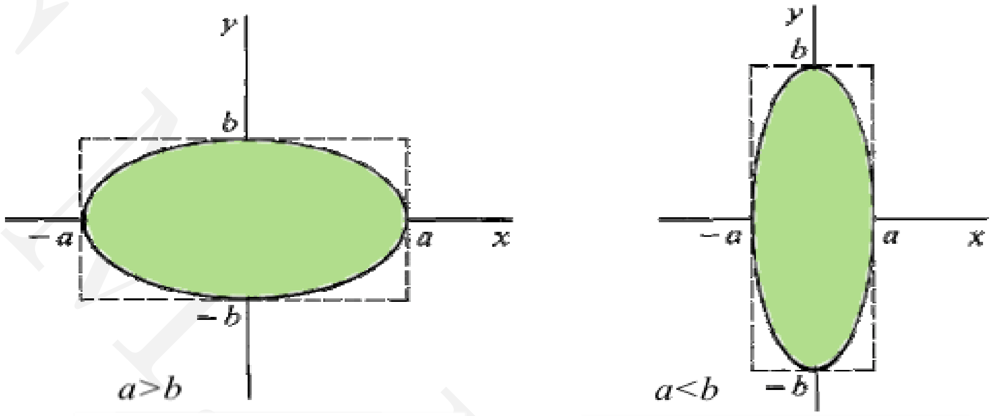


FIGURE 1.2 – Boule fermée unité pour la norme N

Exercice 1.6. 1. Montrer que l'application $\| \ \|_2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est une norme.

2. Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$N(x,y,z) = \|(x,y)\|_2 + |z|.$$

(a) Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$. Donner la distance associée à N.

(b) Montrer que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^3$.

***Solution*.** 1. L'application $\| \ \|_2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ est positive. Vérifie-t-elle les 3 propriétés d'une norme ?

$i)$ La séparation : Pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \|X\|_2 = \|(x,y)\|_2 = 0 \Leftrightarrow &\ \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\ x = y = 0 \Leftrightarrow X = (0,0). \end{aligned}$$

$ii)$ L'homogénéité : Pour tous $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\|\lambda X\|_2 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_2 = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \|X\|_2.$$

iii) L'inégalité triangulaire : Soient $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_2^2 = & \ (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 \\ = & \ x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) + y_1^2 + y_2^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\|X\|_2 + \|Y\|_2)^2 = & \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^2 \\ = & \ x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}.\end{aligned}$$

Alors, il suffit de comparer $x_1y_1 + x_2y_2$ et $\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$. Pour cela calculons

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^2 - (x_1y_1+x_2y_2)^2 = & \ (x_1^2+x_2^2)\,(y_1^2+y_2^2) - (x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2\,x_1y_1x_2y_2) \\ = & \ (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Donc on a

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

Ce qui implique

$$\|X+Y\|_2^2 \leq (\|X\|_2 + \|Y\|_2)^2 .$$

D'où le résultat.

Remarque : Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ ou plus généralement dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante "à vérifier" :

$$< x|y >^2 \leq < x|x >< y|y > \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

où $< x|y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ est le produit scalaire entre x et y. En particulier,

$$< x|x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_2^2 \text{ et } < y|y >= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|y\|_2^2,$$

donc, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est équivalente à

$$| < x|y > | \leq \|x\|_2\, \|y\|_2.$$

Alors, pour tous $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 = & \ (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 \\ = & \ x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1y_1+x_2y_2) + y_1^2 + y_2^2 = \|x\|_2^2 + 2 < x|y > + \|y\|_2^2 \\ \leq & \ \|x\|_2^2 + 2| < x|y > | + \|y\|_2^2 \\ \leq & \ \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\,\|y\|_2 + \|y\|_2^2 \quad \text{(D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ \|x+y\|_2^2 \leq & \ (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2\end{aligned}$$

Ce qui implique l'inégalité triangulaire

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, l'application $\| \ \|_2$ vérifie bien les 3 conditions d'une norme. Donc, $\| \ \|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) L'application $N : (x, y, z) \longmapsto \|(x, y)\|_2 + |z|$ est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Puisque $\| \ \|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, alors on a

$i)$ Pour la séparation de N : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} N(x, y, z) = 0 &\Leftrightarrow \|(x, y)\|_2 + |z| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|(x, y)\|_2 = 0 \text{ et } |z| = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ et } z = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

$ii)$ Pour l'homogénéité de N : Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda(x, y, z)) &= N(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \|(\lambda x, \lambda y)\|_2 + |\lambda z| \\ &= |\lambda|\|(x, y)\|_2 + |\lambda||z| \\ &= |\lambda| \left(\|(x, y)\|_2 + |z|\right) \\ &= |\lambda| N(x, y, z). \end{aligned}$$

$iii)$ Pour l'inégalité triangulaire de N : Pour tous $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} N((x, y, z) + (x', y', z')) &= N(x + x', y + y', z + z') \\ &= \|(x + x', y + y')\|_2 + |z + z'| \\ &= \|(x, y) + (x', y')\|_2 + |z + z'| \\ &\leq \|(x, y)\|_2 + \|(x', y')\|_2 + |z| + |z'| \\ &\leq \|(x, y)\|_2 + |z| + \|(x', y')\|_2 + |z'| \\ &\leq N(x, y, z) + N(x', y', z'). \end{aligned}$$

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} \|(x, y, z)\|_\infty &= \sup(|x|, |y|, |z|) \\ &\leq \sup(|x|, |y|) + |z| \\ &\leq \|(x, y)\|_2 + |z| = N(x, y, z) \end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} N(x, y, z) &= \|(x, y)\|_2 + |z| \\ &\leq \sqrt{2} \sup(|x|, |y|) + \sup(|x|, |y|, |z|) \\ &\leq (\sqrt{2} + 1)\|(x, y, z)\|_\infty. \end{aligned}$$

c'est à dire $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\|(x, y, z)\|_\infty \leq N(x, y, z) \leq (\sqrt{2} + 1)\|(x, y, z)\|_\infty$. Ce qui signifie que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.7. Soient N_1 et N_2 deux normes **équivalentes** sur $\mathbb{R}^n$.

1. Prouver que N_1 et N_2 définissent la même topologie sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, la notion d'ouvert ne change pas entre les deux normes.
2. Même question pour la convergence d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $N_1 = N_2$ si et seulement si $B'_{N_1}(0_E, 1) = B'_{N_2}(0_E, 1)$.

Solution. 1. N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$, alors il existe deux réels strictement positifs $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour la norme N_1, est-t-il ouvert pour la norme N_2?
Soit $a \in \theta$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_{N_1}(a, r) \subset \theta$. Pour tout $x \in B_{N_2}(a, \alpha\, r)$, on a $N_2(x-a) < \alpha\, r$. D'après l'équivalence entre N_1 et N_2, on a $\alpha\, N_1(x-a) \leq N_2(x-a) < \alpha\, r$, ce qui implique que $N_1(x-a) < r$, c'est-à-dire, $x \in B_{N_1}(a, r)$. Par suite $B_{N_2}(a, \alpha\, r) \subset B_{N_1}(a, r) \subset \theta$. D'où θ reste ouvert dans $\mathbb{R}^n$ pour la norme N_2.
Réciproquement, Soit θ' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour la norme N_2, est-t-il ouvert pour la norme N_1?
Soit $a \in \theta'$, alors il existe $r' > 0$ tel que $B_{N_2}(a, r') \subset \theta'$. Pour tout $x \in B_{N_1}(a, \frac{r'}{\beta})$, on a $N_1(x-a) < \frac{r'}{\beta}$. D'après l'équivalence entre N_1 et N_2, on a $N_2(x-a) \leq \beta N_1(x-a) < \beta\, \frac{r'}{\beta}$, ce qui implique que $N_2(x-a) < r'$, c'est-à-dire, $x \in B_{N_2}(a, r')$. Par suite $B_{N_1}(a, \frac{r'}{\beta}) \subset B_{N_2}(a, r') \subset \theta'$. D'où θ' reste ouvert dans $\mathbb{R}^n$ pour la norme N_1.

2. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers l pour la norme N_1, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0 \ \text{ on a } \ N_1(x_k - l) < \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Ce qui implique que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0 \ \text{ on a } \ \beta N_1(x_k - l) < \varepsilon.$$

D'après l'équivalence entre les deux normes N_1 et N_2, on a $N_2(x_k - l) \leq \beta N_1(x_k - l)$ et par suite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0 \ \text{ on a } \ N_2(x_k - l) < \varepsilon.$$

Ce qui signifie que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l pour la norme N_2.
Réciproquement, Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers l pour la norme N_2, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0 \ \text{ on a } \ N_2(x_k - l) < \alpha\varepsilon.$$

D'après l'équivalence entre les deux normes N_1 et N_2, on a $\alpha N_1(x_k - l) \leq N_2(x_k - l)$ et par suite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0 \ \text{ on a } \ \alpha N_1(x_k - l) < \alpha\varepsilon.$$

c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0 \ \text{ on a } \ N_1(x_k - l) < \varepsilon.$$

Ce qui signifie que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l pour la norme N_1. D'où la notion de la convergence ne change pas si on change une norme par une autre norme équivalente.

Exercice 1.8. Soit I un ensemble et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\cup_{i\in I} O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Si I est fini, montrer que $\cap_{i\in I} O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Déduire que toute intersection de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et que toute union finie de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
4. Déterminer $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}]1 - \dfrac{1}{k}; 1 + \dfrac{1}{k}[$. Comparer ce résultat avec la question 2.

Solution. Soient $(\theta_i)_{i\in I}$ et $(F_j)_{j\in J}$ deux familles d'ouverts et fermés respectivement.

1. Montrons que $\theta = \cup_{i\in I}\theta_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour n'importe quel ensemble d'indices I. Si $\theta = \emptyset$, ie, $\theta_i = \emptyset$ pour tout $i \in I$, alors θ est ouvert. Sinon, soit $a \in \theta$ alors il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in \theta_{i_0}$. Comme θ_{i_0} est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \theta_{i_0} \subset \theta$, d'où θ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Si I est fini, montrons que $\theta' = \cap_{i\in I}\theta_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \theta'$ alors $a \in \theta_i$ pour tout $i \in I$. Or les parties θ_i sont tous des ouverts, alors il existe $r_i > 0$ tel que $B(a,r_i) \subset \theta_i$. En choisissant $r = \inf_{i\in I} r_i = \min_{i\in I} r_i$ (I est fini) on a $B(a,r) \subset B(a,r_i)$ pour tout $i \in I$. D'où $B(a,r) \subset \theta_i$, $\forall i \in I$, c'est-à-dire $B(a,r) \subset \cap_{i\in I}\theta_i = \theta'$, ce qui implique que θ' est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. ★ En posant $F = \cap_{j\in J}F_j$, on a
$$\complement_{\mathbb{R}^n}^{F} = \mathbb{R}^n\backslash F = \mathbb{R}^n\backslash(\cap_{j\in J}F_j) = \cup_{j\in J}(\mathbb{R}^n\backslash F_j) = \cup_{j\in J}\complement_{\mathbb{R}^n}^{F_j}.$$
Comme les parties $\complement_{\mathbb{R}^n}^{F_j}$ sont des ouverts, alors $\cup_{j\in J}\complement_{\mathbb{R}^n}^{F_j}$ est un ouvert d'après *i)*, c'est-à-dire, $\complement_{\mathbb{R}^n}^{F}$ est un ouvert. D'où $F = \cap_{j\in J}F_j$ est un fermé.
★ Si J est fini, on pose $F = \cup_{j\in J}F_j$. On a
$$\complement_{\mathbb{R}^n}^{F} = \mathbb{R}^n\backslash F = \mathbb{R}^n\backslash(\cup_{j\in J}F_j) = \cap_{j\in J}(\mathbb{R}^n\backslash F_j) = \cap_{j\in J}\complement_{\mathbb{R}^n}^{F_j}.$$
Comme les parties $\complement_{\mathbb{R}^n}^{F_j}$ sont des ouverts, alors $\cap_{j\in J}\complement_{\mathbb{R}^n}^{F_j}$ est un ouvert d'après *ii)*, c'est-à-dire, $\complement_{\mathbb{R}^n}^{F}$ est un ouvert. D'où $F = \cup_{j\in J}F_j$ est un fermé.
4. On a $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}]1-\frac{1}{k};1+\frac{1}{k}[=\{1\}$. En effet, $1\in]1-\frac{1}{k};1+\frac{1}{k}[$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, et réciproquement si $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}]1-\frac{1}{k};1+\frac{1}{k}[$, alors $1-\frac{1}{k} < a < 1+\frac{1}{k}$, et par passage à la limite on déduit que $a = 1$. Comme $\{1\}$ n'est pas ouvert, alors la réunion quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement ouvert.

Exercice 1.9. 1. Montrer que toute boule ouverte (resp. boule fermée) dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert (resp. fermé).

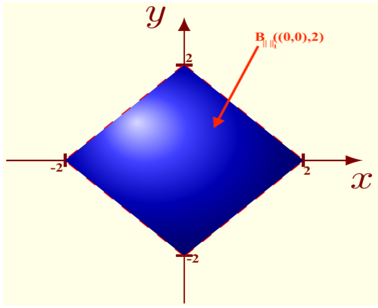
2. Déterminer la nature topologique (ouvert, fermé ou compact) des ensembles :

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/|x| + |y| \leq 2\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$,
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/0 < x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$,
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/0 \leq x+y+z \leq 1\}$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e^x\}$,
$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}$,
$\Delta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$, $\Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\}$.

Solution. 1. Soit $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n/\|x-a\| < r\}$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in B(a,r)$, on a $\|x-a\| < r$, c'est-à-dire, $r - \|x-a\| > 0$. Choisissons alors $0 < \varepsilon < r - \|x-a\|$ et montrons que $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$. En effet, pour tout $y \in B(x,\varepsilon)$ on a $\|y-x\| < \varepsilon < r - \|x-a\|$, alors $\|y-x\| + \|x-a\| < r$. D'où, $\|y-a\| = \|y-x+x-a\| \leq \|y-x\| + \|x-a\| < r$. C'est-à-dire, $y \in B(a,r)$ et par suite, la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Soit maintenant $B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n/\|x-a\| \leq r\}$ une boule fermée de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in [B'(a,r)]^C$ "le complémentaire de la boule fermée", on a $\|x-a\| > r$, c'est-à-dire, $\|x-a\| - r > 0$. Choisissons alors $0 < \varepsilon < \|x-a\| - r$ et montrons que $B(x,\varepsilon) \subset [B'(a,r)]^C$. En effet, pour tout $y \in B(x,\varepsilon)$ on a $\|y-x\| < \varepsilon < \|x-a\| - r$, donc $\|x-a\| - \|y-x\| > r$.

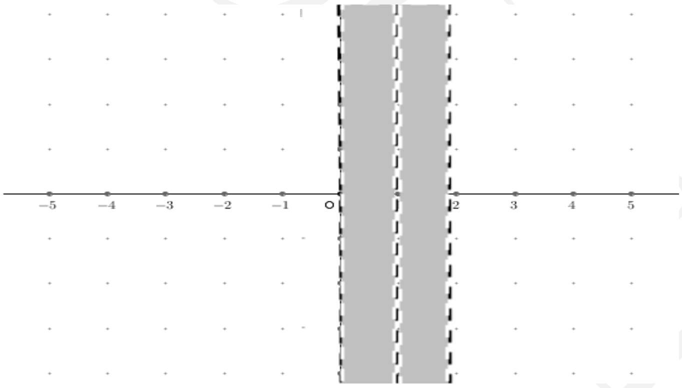
Or, $\|x-a\| = \|x-y+y-a\| \leq \|x-y\|+\|y-a\|$, alors, $\|y-a\| \geq \|x-a\|-\|y-x\| > r$, c'est-à-dire, $y \in [B'(a,r)]^C$ et par suite, $[B'(a,r)]^C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, d'où la boule fermée $B'(a,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

2. $\star$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x|+|y| \leq 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y)\|_1 \leq 2\} = B'_{\|\ \|_1}((0,0),2)$.



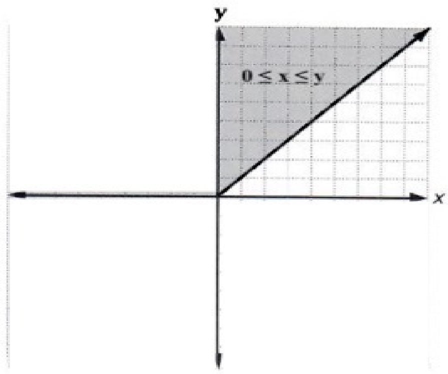
La partie A est-elle ouverte ? Il existe un point $(a,b) \in A$ (on peut choisir $(a,b) = (2,0)$) tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $B_{\|\ \|_\infty}((2,0),\varepsilon) \not\subseteq A$. En effet, $(2+\frac{\varepsilon}{2},0) \in B_{\|\ \|_\infty}((2,0),\varepsilon)$, mais $(2+\frac{\varepsilon}{2},0) \notin A$.
La partie A est-elle fermée ? A est la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 2 pour la norme $\|\ \|_1$, donc c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Elle est aussi bornée, puisque $\|(x,y)\|_1 \leq 2$ pour tout $(x,y) \in A$. Alors, A est un compact.

$\star$ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x-1 < 0 \text{ ou } 0 < x-1 < 1\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0,1[\cup]1,2[\}$



B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(a,b) \in B$, on a $a \in]0,1[\cup]1,2[$. Or $]0,1[\cup]1,2[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset]0,1[\cup]1,2[$. Montrons que $B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((a,b),\varepsilon) \subset B$. Soit $(x,y) \in B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((a,b),\varepsilon)$, alors $\|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \varepsilon$, c'est-à-dire, $\|(x-a,y-b)\|_\infty < \varepsilon$. Donc, $|x-a| < \varepsilon$, ce qui entraine que $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, d'où $x \in]0,1[\cup]1,2[$ et par suite $(x,y) \in B$. Alors, pour tout $(a,b) \in B$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((a,b),\varepsilon) \subset B$, ce qui signifie que B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Maintenant, est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$? Remarquons que $(\frac{1}{n},0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans B qui converge vers $(0,0)$ (à vérifier), mais la limite $(0,0) \notin B$. Alors cette partie n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$. Donc B n'est pas aussi compact.

$\star$ $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$



La partie C n'est pas ouvert. En effet, le point $(0,0) \in C$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\|\ \|_\infty}((0,0),\varepsilon) \nsubseteq C$, puisque $(-\frac{\varepsilon}{2},0) \in B_{\|\ \|_\infty}((0,0),\varepsilon)$ et $(-\frac{\varepsilon}{2},0) \notin C$. D'où, la partie C n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
Par contre, C est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans C qui converge vers une limite (a,b). Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
Comme $(x_n,y_n) \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$0 \leq x_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n,$$

c'est-à-dire,

$$0 \leq a \leq b.$$

Ce qui entraine que $(a,b) \in C$, et par suite la partie C est fermée dans $\mathbb{R}^2$. Même si elle est fermée, elle n'est pas compact car C est non bornée. En effet, pour tout $M > 0$ il existe $(x,y) \in C$ tel que $\|(x,y)\|_\infty > M$. Il suffit de choisir par exemple $(x,y) = (M, M+1)$.

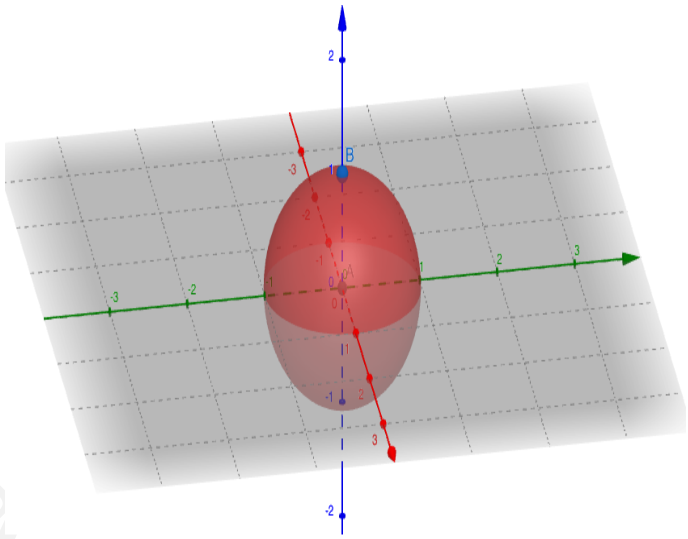
$\star$ $$\begin{aligned} D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < \|(x,y,z)\|_2^2 \leq 1\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < \|(x,y,z)\|_2 \leq 1\} \\ &= B'_{\|\ \|_2}((0,0,0),1) \setminus \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

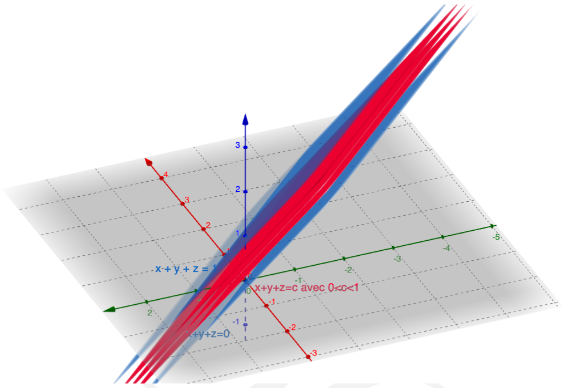
La partie D est la boule unité fermée privée de son centre. Elle n'est pas ouvert. Il suffit de trouver un point de D tel que toute boule de centre ce point n'est pas inclue dans D. le point $(0,0,1) \in D$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\mathbb{R}^3,\|\ \|_2}((0,0,1),\varepsilon) \nsubseteq D$. En effet, on a $(0,0,1+\frac{\varepsilon}{2}) \in B_{\mathbb{R}^3,\|\ \|_2}((0,0,1),\varepsilon)$ mais $(0,0,1+\frac{\varepsilon}{2}) \notin D$.
La partie D n'est pas aussi fermée. Il suffit de trouver une suite dans D qui converge vers une limite, mais cette limite n'appartient pas à D. On considère la suite $(\frac{1}{n},0,0)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset D$, elle converge vers le point $(0,0,0)$, puisque

$$\lim_{n\to\infty} \|(\frac{1}{n},0,0) - (0,0,0)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(\frac{1}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Par contre le point $(0,0,0) \notin D$. La non fermeture de D entraine qu'elle est non compact.

$\star$ $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x+y+z \leq 1\}$.



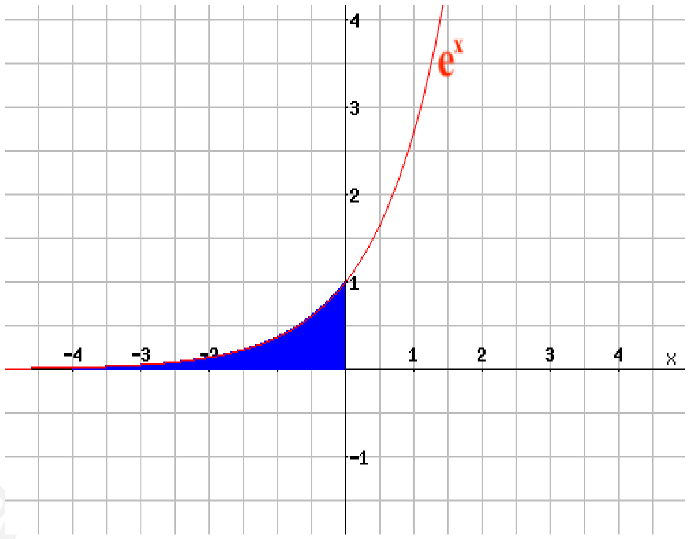


La partie E est évidement fermé. Pour toute suite $(x_k, y_k, z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers une limite (a, b, c), on a $0 \le x_k + y_k + z_k \le 1$. En passant à la limite, on obtient $0 \le \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k + z_k) \le 1$, c'est-à-dire, $0 \le \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty} y_k + \lim_{k\to\infty} z_k \le 1$. D'où, $0 \le a+b+c \le 1$, ce qui implique que $(a, b, c) \in E$. Malgré la fermeture de E, il n'est pas compact puisqu'il n'est pas borné. En effet, pour tout $M > 0$, il existe $(x, y, z) \in E$ tel que $\|(x, y, z)\|_\infty > M$. Il suffit de choisir $(x, y, z) = (-M, M + \frac{1}{2}, 0)$.
La partie E n'est pas ouverte, en utilisant l'origine $(0, 0, 0) \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0) \in B((0, 0, 0), \varepsilon)$ tel que $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0) \notin E$. D'où $B((0, 0, 0), \varepsilon) \nsubseteq E$.

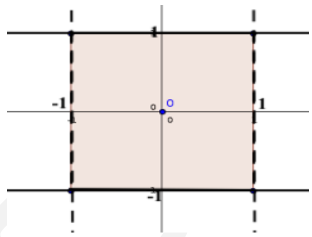
⋆ $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \le 0 \text{ et } 0 \le y \le e^x\}$.

Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers $\ell = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $W_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n \le 0$ et $0 \le y_n \le e^{x_n}$, $\lim(x_n) = x$ et $\lim(y_n) = y$. Par passage à la limite aux deux inégalités, on trouve que $x \le 0$ et $0 \le y \le e^x$, c'est-à-dire que $\ell = (x, y) \in F$. On conclut alors que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-il borné ? Pour tout $M > 0$, il existe $(x, y) \in F$ tel que $\|(x, y\|)_\infty > M$. Il suffit de prendre $(x, y) = (-M - 1, 0)$. Par conséquence, F est non compact.
F est aussi non ouvert d'après l'existence d'un point $(a, b) \in F$ $((a, b) = (0, 0))$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B((0, 0), \varepsilon) \nsubseteq F$, puisque $(\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B((0, 0), \varepsilon)$ mais $(\frac{\varepsilon}{2}, 0) \notin F$.

⋆ $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \le 1\}$



$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\}$$



La partie G n'est pas ouvert. Il suffit de trouver un point de G tel que toute boule de centre ce point n'est pas inclue dans G. le point $(0,1) \in G$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\mathbb{R}^2,\| \|_\infty}((0,1),\varepsilon) \nsubseteq G$. En effet, on a $(0, 1+\frac{\varepsilon}{2}) \in B_{\mathbb{R}^2,\| \|_\infty}((0,1),\varepsilon)$ mais $(0,1+\frac{\varepsilon}{2}) \notin G$.
La partie G n'est pas fermée. Il suffit de trouver une suite dans G qui converge vers une limite, mais cette limite n'appartient pas à G. on considère la suite $(1-\frac{1}{n},0)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle converge vers le point $(1,0)$, puisque

$$\lim_{n\to\infty} \|(1-\frac{1}{n},0)-(1,0)\|_{\| \|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \|(-\frac{1}{n},0)\|_{\| \|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Par contre le point $(1,0) \notin G$.

⋆ $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}$.
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_2 < 2\}$
$= B_{\| \|_2}((0,0),2)$
La partie H est la boule ouverte, pour la norme euclidienne $\| \|_2$, de centre $(0,0)$ et de rayon 2. Alors H est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Est-elle fermée ? La suite $(2-\frac{1}{n},0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans H qui converge vers $(2,0)$, mais cette limite $(2,0) \notin H$. Ce qui implique que H n'est pas fermée.

⋆ $\Delta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$.
On sait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour tous $a < b$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tels que $a < r < b$ et $a < x < b$. Montrons que Δ_1 n'est pas un ouvert

de $\mathbb{R}^2$. Prenons le point $(0,0) \in \Delta_1$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Alors $(x,0) \in B_{\|\ \|_1}((0,0),\varepsilon)$, puisque $\|(x,0)-(0,0)\|_1 < \varepsilon$, mais on a $(x,0) \notin \Delta_1$ et par suite $B_{\|\ \|_1}((0,0),\varepsilon) \nsubseteq \Delta_1$.
La partie Δ_1 est aussi non fermée. En effet, d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Alors $(r_n,0)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans Δ_1 qui converge vers $(\sqrt{2},0)$, mais $(\sqrt{2},0) \notin \Delta_1$. Ce qui entraine que Δ_1 n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$.

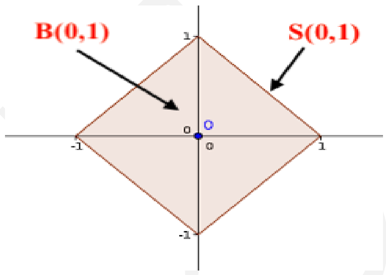
⋆ $\Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$. On a $\Delta_2 = \complement_{\mathbb{R}^2}^{\Delta_1}$. D'après ce qui précède, on a Δ_1 n'est ni ouvert, ni fermé. Alors, il en est de même pour Δ_2, il n'est ni ouvert, ni fermé. Δ_2 n'est pas aussi compact.

Exercice 1.10. 1. Déterminer la nature topologique (ouvert, fermé ou compact) des ensembles :
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/|x|+|y| < 1\}$,
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x < y \leq 1\}$,
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq \sup(|x|,|y|) \text{ et } x^2+y^2 \leq 4\}$.

2. Les ensembles précédents sont-ils convexes ?

Solution. 1. ⋆

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/|x|+|y| < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\|(x,y)\|_1 < 1\} \\ &= B_{\|\ \|_1}((0,0),1) \end{aligned}$$



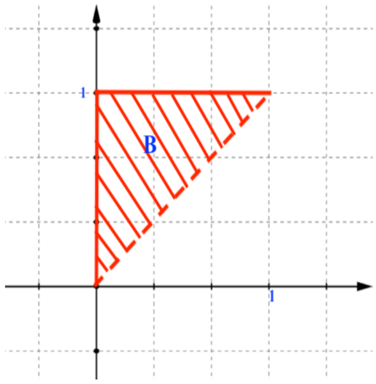
La partie A est-elle ouverte ? A est la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la norme $\|\ \|_1$, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La partie A est-elle fermée ? Remarquons que $(1-\frac{1}{k},0)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans A qui converge vers $(1,0)$ (à vérifier), mais la limite $(1,0) \notin A$. Alors cette partie A n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$. Donc A n'est pas aussi compact. Par contre, elle est bornée, puisque $\|(x,y)\|_1 \leq 1$ pour tout $(x,y) \in A$.

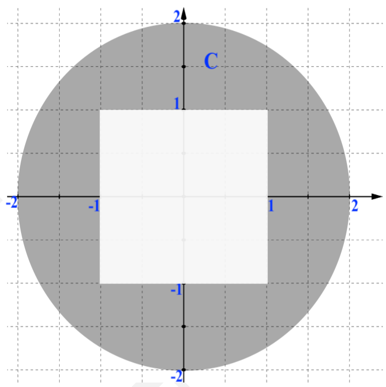
⋆ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq 1\}$.

La partie B n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$. En effet, le point $(0,1) \in B$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\|\ \|_\infty}((0,1),\varepsilon) \nsubseteq B$, puisque $(0,1+\frac{\varepsilon}{2}) \in B_{\|\ \|_\infty}((0,1),\varepsilon)$ et $(0,1+\frac{\varepsilon}{2}) \notin B$.
B est aussi une partie non fermée de $\mathbb{R}^2$. Il suffit de remarquer que la suite $(0,\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans B qui converge vers $(0,0)$ (à vérifier), mais la limite $(0,0) \notin B$. Alors cette partie n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$. Par conséquent B n'est pas compact.

⋆

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq \sup(|x|,|y|) \text{ et } x^2+y^2 \leq 4\}. \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|(x,y)\|_\infty \text{ et } \|(x,y)\|_2^2 \leq 4\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|(x,y)\|_\infty \text{ et } \|(x,y)\|_2 \leq 2\} \\ &= B'_{\|\ \|_2}((0,0),2) \cap \complement_{\mathbb{R}^2}\left[B_{\|\ \|_\infty}((0,0),1)\right] \\ &= B'_{\|\ \|_2}((0,0),2) \backslash B_{\|\ \|_\infty}((0,0),1) \end{aligned}$$





La partie C n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$. En effet, le point $(2,0) \in C$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\|\ \|_\infty}((2,0),\varepsilon) \nsubseteq C$, puisque $(2+\frac{\varepsilon}{2},0) \in B_{\|\ \|_\infty}((2,0),\varepsilon)$ et $(2+\frac{\varepsilon}{2},0) \notin C$. Par contre la partie C est un fermé, puisque $C = B'_{\|\ \|_2}((0,0),2) \cap \complement_{\mathbb{R}^2}\left[B_{\|\ \|_\infty}((0,0),1)\right]$ est l'intersection de deux fermés. De plus, pour tout $(x,y) \in C$ on a $\|(x,y)\|_2 \leq 2$, alors C est borné, ce qui implique que C est compact.

2. $\star$ On a A est la boule ouverte $B_{\|\ \|_1}((0,0),1)$, alors elle est convexe puisque toute boule (ouverte ou fermée) est convexe. En effet, soit $B(a,r)$ une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$. Pour tous x et y dans $B(a,r)$, montrons que le segment $[x,y] \subset B(a,r)$. Soit $z \in [x,y]$, alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $z = t\,x + (1-t)\,y$. On a

$$\begin{aligned} \|z-a\| &= \|t\,x+(1-t)\,y-a\| = \|t\,x+(1-t)\,y-t\,a-(1-t)\,a\| \\ &\leq t\,\|x-a\| + (1-t)\,\|y-a\| \\ &< t\,r + (1-t)\,r \\ &< r. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, $z \in B(a,r)$. D'où $[x,y] \subset B(a,r)$. De même pour une boule fermée.
$\star$ Montrons que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq 1\}$ est convexe. Soient $X = (x,y)$ et $Z = (z,t)$ deux points de B. Pour tout $A = (a,b) \in [X,Z]$, il existe $0 \leq \alpha \leq 1$ tel que $A = \alpha X + (1-\alpha)Z$, c'est-à-dire, $a = \alpha x + (1-\alpha)z$ et $b = \alpha y + (1-\alpha)t$. Comme $0 \leq x < y \leq 1$ et $0 \leq z < t \leq 1$, alors on a, $0 \leq \alpha x < \alpha y \leq 1$ et $0 \leq (1-\alpha)z < (1-\alpha)t \leq 1$. D'où $0 \leq \alpha x + (1-\alpha)z < \alpha y + (1-\alpha)t \leq 1$, c'est-à-dire, $0 \leq a < b \leq 1$, ce qui implique que $A \in B$. Par suite $[X,Z] \subset B$, $\forall X,Z \in B$. $\star$ L'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq \sup(|x|,|y|)$ et $x^2+y^2 \leq 4\}$ est-il convexe ? En prenant les deux points $X = (\frac{3}{2},0)$ et $Y = (-\frac{3}{2},0)$ qui appartiennent à C, on remarque que

$(0,0) \in [X,Y]$ "à vérifier", mais $(0,0) \notin C$. Alors $[X,Y] \nsubseteq C$, c'est-à-dire, C n'est pas convexe.

Exercice 1.11. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement d'un espace métrique (E,d).

1. $x \in \mathring{A}$ si, et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$.
2. $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
3. $x \in \overline{A}$ si, et seulement s'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.
4. A est fermé si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x on a $x \in A$.

***Solution*.**

Si $x \in \mathring{A}$ et $\mathring{A}$ est un ouvert alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A} \subset A$. Réciproquement, $B(x,\varepsilon)$ est un ouvert contenu dans A, alors $B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A}$ et par suite $x \in \mathring{A}$.

Si $x \in \overline{A}$ et par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Alors A est contenu dans $\complement_{\mathbb{R}^n}^{B(x,\varepsilon)}$ qui est fermé. D'où $\overline{A} \subset \complement_{\mathbb{R}^n}^{B(x,\varepsilon)}$ et par suite $x \in \complement_{\mathbb{R}^n}^{B(x,\varepsilon)}$, ce qui contredit le fait que $x \in B(x,\varepsilon)$. Réciproquement et toujours par l'absurde, supposons que $x \in \overline{A}^c$, qui est ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \overline{A}^c \subset A^c$.

Si $x \in \overline{A}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $B(x,\frac{1}{k}) \cap A \neq \emptyset$, c'est-à-dire, il existe $x_k \in B(x,\frac{1}{k}) \cap A$. On peut donc construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A telle que $\|x_k - x\| \leq \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x. Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on a $\|x_k - x\| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire, $x_k \in B(x,\varepsilon)$. D'où $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et par suite $x \in \overline{A}$.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ et supposons que $x \notin A$ donc x est élément de l'ouvert A^c, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A^c$. Or x est la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_k - x\| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$, c'est-à-dire, $x_k \in B(x,\varepsilon) \subset A^c$. D'où $A \cap A^c \neq \emptyset$, ce qui est absurde. Réciproquement, soit $x \in \overline{A}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. On peut donc construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A qui converge vers x, ce qui implique que $x \in A$ et par suite $\overline{A} \subset A$, c'est-à-dire, A est un fermé.

Exercice 1.12. Soit A une partie d'un espace métrique (E,d).

1. Montrer que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.
2. Déduire que A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.

Exercice 1.13.
1. Montrer que toute Sphère de $\mathbb{R}^n$ est un fermé. Est-elle compacte ?
2. Prouver que toute partie finie A de $\mathbb{R}^n$ est fermée. Est-elle compacte ?
3. Montrer que la partie $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$ est compacte dans $\mathbb{R}^2$. Est-elle convexe ?

***Solution*.**

1. Soit $S(a,r)$ une sphère de $\mathbb{R}^n$ pour une norme $\|\ \|$, c'est-à-dire,
$$\begin{aligned} S(a,r) = &\ \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| = r\} \\ = &\ \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| \geq r \text{ et } \|x-a\| \leq r\} \\ = &\ \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| \leq r\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| \geq r\} \\ = &\ B'(a,r) \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| < r\}^C \\ = &\ B'(a,r) \cap \complement_{\mathbb{R}^n}^{B(a,r)} \\ S(a,r) = &\ B'(a,r) \setminus B(a,r) \end{aligned}$$

On a la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert, alors son complémentaire $\complement_{\mathbb{R}^n}^{B(a,r)}$ est un fermé. Comme la boule fermée $B'(a,r)$ est un fermé, alors $B'(a,r) \cap \complement_{\mathbb{R}^n}^{B(a,r)}$ est aussi un fermé de $\mathbb{R}^n$. Par conséquence, la sphère $S(a,r)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$. Est-elle compacte ? En effet, pour tout $x \in S(a,r)$ on a $\|x-a\| = r$. Or, $|\|x\| - \|a\|| \leq \|x-a\|$, alors $\|x\| \leq r + \|a\|$. D'où, il existe $M > 0$ (on peut choisir $M = r + \|a\|$) tel que pour tout $x \in S(a,r)$ on a $\|x\| \leq M$, c'est-à-dire, la sphère $S(a,r)$ est bornée. Par conséquent, elle est compacte.

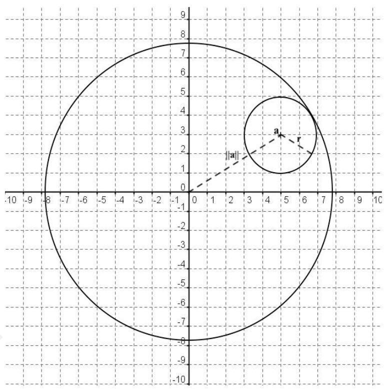


FIGURE 1.3 – Schéma explicative pour l'espace $\mathbb{R}^2$

2. Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^n$, alors $A = \cup_{i=1}^{p} \{a_i\}$. Il suffit de montrer que chaque singleton $\{a_i\}$ est fermé. Soit $\{a\}$ un singleton de $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \{a\}^C$, on a $x \neq a$, c'est-à-dire, $\|x-a\| > 0$, donc il existe ε tel que $0 < \varepsilon < \|x-a\|$. Montrons que $B(x,\varepsilon) \subset \{a\}^C$. En effet, soit $y \in B(x,\varepsilon)$, alors $\|x-y\| < \varepsilon$. Or, $\|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\|$, alors

$$\begin{aligned}
\|y-a\| &\geq \|x-a\| - \|x-y\| \\
&> \|x-a\| - \varepsilon \\
&> 0
\end{aligned}$$

D'où $y \neq a$, c'est-à-dire, $y \in \{a\}^C$. Par conséquence, $\{a\}^C$ est un ouvert, ce qui signifie que le singleton $\{a\}$ est un fermé, et par suite, toute partie fine est fermé comme réunion finie des singletons. Reste à montrer que la partie finie A est bornée pour déduire sa compacité. Soit $M = \sup_{i=1,\ldots,p} \|a_i\|$, alors pour tout point a_i de A on a $\|a_i\| \leq M$, donc la partie A est bornée, et par suite elle est compacte.

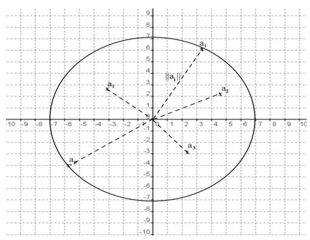


FIGURE 1.4 – Schéma explicative pour l'espace $\mathbb{R}^2$

Exercice 1.14. Étant données deux parties A et B de $\mathbb{R}^n$, on définit leur somme $A+B$ par

$$A+B=\{a+b\ :\ a\in A, b\in B\}.$$

1. Montrer que si A et B sont compacts alors $A+B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A+B$ est fermé.

Exercice 1.15. Soit (E,d) un espace métrique.

1. Soit $a\in E$ et $r>0$. Montrer que $\overline{B(a,r)}\subset B_f(a,r)$. Peut-on affirmer, dans le cas général, que $\overline{B(a,r)}=B_f(a,r)$? (utiliser la distance discrète).
2. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé (en particulier $\mathbb{R}^n$), montrer que $\overline{B(a,r)}=B_f(a,r)$.

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 2.1. Déterminer et dessiner les domaines de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$; **b)** $g(x,y)=\ln(x^2+y+1)$

Exercice 2.2.

1. On se restreint aux fonctions de 2 variables (sans perte de généralité), montrer que
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l \Longrightarrow \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))=\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))=l.$$
2. Étudier la réciproque en utilisant la fonction $f(x,y)=\frac{x\,y}{x^2+y^2}$.

Solution.

1. Supposons que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$, c'est-à-dire,

pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\eta>0$, pour tout (x,y) tel que $\|(x,y)-(a,b)\|_\infty<\eta$ on a $|f(x,y)-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $y\in\mathbb{R}$ tels que $|x-a|<\eta$ et $|y-b|<\eta$, on a $|f(x,y)-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ce qui entraine que pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x-a|<\eta$ on a $\lim\limits_{y\to b}|f(x,y)-l|=|\lim\limits_{y\to b} f(x,y)-l|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Par suite, $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))=l$. De même pour $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))=l$.

2. En utilisant la fonction $f(x,y)=\frac{x\,y}{x^2+y^2}$ au voisinage de l'origine $(0,0)$, pour

tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))=0$. Malgré ça, la fonction $f(x,y)=\frac{x\,y}{x^2+y^2}$ n'admet pas de limite au point $(0,0)$. La réciproque est en général fausse.

Exercice 2.3. Déterminer le domaine de définition de la fonction f, puis prouver qu'elle admet ou non une limite au point A.

i) $f(x,y)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|+|y|}$, $A=(1,0)$.

ii) $f(x,y,z)=xy\ln(x^2+y^2+z^2)$, $A=(0,0,0)$.

iii) $f(x,y)=x\,\exp(-\frac{y^2}{x^2})$, $A=(0,b)$.

iv) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}\exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right)$, $A=(0,0)$.

Solution. ***i)*** $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-1| + |y| \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-1| \neq 0 \quad \text{ou} \quad |y| \neq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 1 \quad \text{ou} \quad y \neq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \neq (1,0)\} \\ &= \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2}{|x-1|+|y|} &\leq \frac{(x-1)^2}{|x-1|} \\ &\leq |x-1|. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} |x-1| = 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|+|y|} = 0$.

ii) $\mathcal{D}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 > 0\}$

$$\begin{aligned} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \neq 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \neq 0 \quad \text{ou} \quad y \neq 0 \quad \text{ou} \quad z \neq 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) \neq (0,0,0)\} \\ &= \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0) \\ (x,y,z)\in\mathcal{D}_f}} f(x,y,z) &= \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0) \\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} xy\ln(x^2+y^2+z^2) \\ &= \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0) \\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} \times (x^2+y^2+z^2)\ln(x^2+y^2+z^2). \end{aligned}$$

Or $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq 1, \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ "à vérifier", et en effectuant le changement de variable suivant $x^2+y^2+z^2 = t$, on obtient

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0) \\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} (x^2+y^2+z^2)\ln(x^2+y^2+z^2) = \lim_{t\to0^+} t\,\ln t = 0,$$

alors $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0) \\ (x,y,z)\in\mathcal{D}_f}} f(x,y,z) = 0$.

iii) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \neq 0\}$

$$\begin{aligned} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\} \\ &= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Soit $(0,b)$ un point fixé de $\{(0,y)/y \in \mathbb{R}\}$.

★ Si $b \neq 0$: On a $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b) \\ x\neq0}} \dfrac{y^2}{x^2} = +\infty$, alors $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b) \\ x\neq0}} e^{\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)} = 0$. D'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b) \\ x\neq0}} x\,e^{\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)} = 0.$$

★ Si $b = 0$: Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a $-\dfrac{y^2}{x^2} \leq 0$. Alors $0 < e^{\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)} \leq 1$, et par suite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x\neq0}} x\,e^{\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)} = 0.$$

iv) $$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2\neq 0\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0\}\\ &= \mathbb{R}^2\backslash\{(0,y)/y\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Selon les deux chemins $y=x$ et $y=x^2$, on a respectivement

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{y}{x^2}\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}\exp\left(-\frac{|x|}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) = 0$$

et $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{y}{x^2}\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\exp\left(-\frac{|x^2|}{x^2}\right) = e^{-1}.$$

Alors, la fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 2.4.

1. Déterminer le domaine de définition pour chacune des fonctions suivantes, puis dire en le justifiant si elle admet ou non un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$; **b)** $f(x,y)=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$; **c)** $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

   d) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}\exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right)$; **e)** $f(x,y)=\dfrac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,;\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$ Montrer la continuité de la restriction de g à toute droite passante par l'origine, mais la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$.

Solution. 1. **(a)** $\mathcal{D}_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|+|y|\neq 0\}$.

$$\begin{aligned}&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|\neq 0 \ \text{ ou } \ |y|\neq 0\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0 \ \text{ ou } \ y\neq 0\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x,y)\neq(0,0)\}\\ &= \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.\end{aligned}$$

La fonction $(x,y)\longrightarrow\sin(xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de deux fonctions continues. La fonction $(x,y)\longrightarrow\dfrac{1}{|x|+|y|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (fraction rationnelle). Alors f est bien définie et continue sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathcal{D}_f}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\left(\frac{\sin(xy)}{xy}\times\frac{xy}{|x|+|y|}\right)(*)\\ &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\frac{\sin(xy)}{xy}\times\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\frac{xy}{|x|+|y|}.\end{aligned}$$

D'une part, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\frac{\sin(xy)}{xy}=1$, puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$, et d'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| &= \frac{|xy|}{|x|+|y|}\\ &\leq \frac{|xy|}{|x|}\\ &\leq |y|.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|} = 0$.
Remarque : La limite $(*)$ nécessite que le point (x, y) n'appartient ni à l'axe (Ox), ni à l'axe (Oy), c'est-à-dire, $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors pour compléter le calcul de la limite de f en $(0, 0)$, il faut prouver que $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0, y) = 0$.
Par conséquence, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{D}_f}} f(x, y) = 0$. D'où, la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ à une fonction définie par

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\,; \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b) $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \neq 0\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - y)(x + y) \neq 0\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \neq 0 \text{ et } x + y \neq 0\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y \text{ et } x \neq -y\}$.
La fonction f est une fraction rationnelle, alors elle est bien définie et continue sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
★ Si $(a, \mp a) \notin \mathcal{D}_f$ tel que $a \neq 0$, alors $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,\mp a)\\x>y}} f(x, y) = \dfrac{4\,a^4}{0^+} = +\infty$. Donc f n'est pas prolongeable sur les droites $y = \mp x$ privée de l'origine.
★ Si $a = 0$, on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{D}_f}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{D}_f}} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} &= \lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}} \frac{(r^2)^2}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &= \lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}} \frac{r^2}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = 0, \end{aligned}$$

puisque la quantité $\dfrac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$ est bornée pour tout $\theta \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Alors, f admet un prolongement continu sur $\mathcal{D}_f \cup \{0\}$ seulement (et pas sur $\mathbb{R}^2$), défini par

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D}_f\,; \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(c) $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 0\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \neq (0, 0)\}$
$= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
La fonction f est une fraction rationnelle, alors elle est bien définie et continue sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
Au point $(0, 0)$, et suivant la droite $y = 0$, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \mp\infty.$$

Alors, f n'admet pas de prolongement continu au point $(0,0)$.

(d) $\mathcal{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2\neq 0\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0\}$
$= \mathbb{R}^2\backslash\{(0,y)/y\in\mathbb{R}\}$.

Les fonctions $f_1:(x,y)\longmapsto \frac{y}{x^2}$, $f_2:(x,y)\longmapsto -\frac{|y|}{x^2}$ et $f_3: t\longmapsto \exp(t)$ sont continues sur leurs domaines de définitions, alors $f=f_1\times(f_3\circ f_2)$ est continue sur $\mathcal{D}_f$. Soit $(0,b)\notin\mathcal{D}_f$.

★ Si $b=0$ et selon les deux chemins $y=x$ et $y=x^2$, on a respectivement

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{y}{x^2}\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}\exp\left(-\frac{|x|}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{x}\exp\left(-\tfrac{1}{|x|}\right) = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{y}{x^2}\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\exp\left(-\frac{|x^2|}{x^2}\right) = e^{-1}.$$

Alors, la fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$, donc elle n'admet pas de prolongement continu sur $(0,0)$.

★ Si $b\neq 0$, on a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,b)}\left|\frac{y}{x^2}\right| = +\infty$, alors en posant $t=\dfrac{|y|}{x^2}$, on aura

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,b)}\left|\frac{y}{x^2}\right|\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} t\,e^{-t} = 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 0$ et donc la fonction f possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (et pas sur $\mathbb{R}^2$) défini par

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2}\exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\,; \\ 0 & \text{si } x=0 \text{ et } y\neq 0. \end{cases}$$

(e) $\mathcal{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\neq 0\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2\neq 0 \text{ ou } y^2\neq 0\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0 \text{ ou } y\neq 0\}$
$= \mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x=0 \text{ et } y=0\}$.
$= \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Les fonctions $f_1:(x,y)\longmapsto x(\sin y-y)$ et $f_2:(x,y)\longmapsto\frac{1}{x^2+y^2}$ sont continues sur leurs domaines de définitions, alors $f=f_1\times f_2$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.
Au point $(0,0)$, en utilisant le développement limité d'ordre 2 de la fonction $\sin y$ au voisinage de 0, on a $\sin y = y+y^2\varepsilon(y)$, avec $\lim\limits_{y\to 0}\varepsilon(y)=0$. Ainsi, $f(x,y)=\frac{xy^2\varepsilon(y)}{x^2+y^2}$. Or, $|xy|\leq x^2+y^2$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors $|f(x,y)|\leq|y\varepsilon(y)|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, ce qui entraine que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
Autrement, en utilisant les coordonnées polaires, on obtient

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathcal{D}_f}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathcal{D}_f}} \frac{x(\sin y-y)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{r\cos\theta(\sin(r\sin\theta)-r\sin\theta)}{r^2}$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta\in[0,2\pi[}} \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\sin(r\sin\theta)}{r\sin\theta}-1\right) = 0, \qquad \left(\text{puisque } \frac{\sin(r\sin\theta)}{r\sin\theta}\xrightarrow[r\to 0]{} 1\right).$$

Par conséquent, la fonction f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. La fonction g est une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, alors elle est continue en tout point distinct de l'origine. Étudions la continuité de g en $(0,0)$ premièrement suivant les droites passantes par l'origine et deuxièmement sa continuité à l'origine. Choisissons une droite $y = \alpha\, x$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\alpha\, x}} g(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\alpha\, x}} \frac{x^2\, y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha\, x^3}{x^4+\alpha^2\, x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha\, x}{x^2+\alpha^2} = 0 = g(0,0). \end{aligned}$$

Ce qui entraine que la restriction de g à toute droite passante par l'origine est continue en $(0,0)$. Par contre la fonction g n'est pas continue au point $(0,0)$. En effet, selon le chemin de la parabole $y = x^2$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} g(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2\, y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} \\ &= \frac{1}{2} \neq g(0,0). \end{aligned}$$

Exercice 2.5. 1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y} \sin y$.

a) f est-elle continue sur son domaine de définition ?

b) Peut-on prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Montrer que la restriction de g à toute droite passante par l'origine est continue.

b) g est-elle continue au point $(0,0)$.

Exercice 2.6.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{si } x \neq y; \\ f'(x), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Si f est seulement dérivable sur $\mathbb{R}$, peut-on prouver le même résultat ?
(Ind. Utiliser la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$)

Solution. 1. Montrons d'abord que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{D}$ où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\}$. Comme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$. Or p_1 et p_2, les fonctions de projection sur $\mathbb{R}^2$, sont aussi continues sur $\mathbb{R}^2$, alors les fonctions composées $f \circ p_1$ et $f \circ p_2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquence, la fonction $f_1 : (x, y) \longmapsto f(x) - f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, car $f_1 = f \circ p_1 - f \circ p_2$. La fonction polynôme $f_2 : (x, y) \longmapsto x - y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{D}$ comme un quotient de deux fonctions continues f_1 et f_2 $\quad (F = \dfrac{f_1}{f_2}$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{D})$.

Étudions maintenant, la continuité de F sur $\mathcal{D}$. Soient $(a, a) \in \mathcal{D}$ et (x, y) dans un voisinage de (a, a), c'est-à-dire, $(x, y) \in B((a, a), \varepsilon)$. Si $x = y$ alors $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y) \to (a,a) \\ x = y}} F(x, y) = \lim_{x \to a} F(x, x) = \lim_{x \to a} f'(x) = f'(a) = F(a, a)$, d'après la continuité de f'. Si $x \neq y$, En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f, il existe $C_{x,y}$ compris entre x et y tel que $f(x) - f(y) = f'(C_{x,y}) . (x - y)$, c'est-à-dire,

$$F(x, y) = f'(C_{x,y}).$$

Quand $(x, y) \to (a, a)$, alors $C_{x,y} \to a$ et la continuité de f' entraine que $F(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} f'(a) = F(a, a)$. D'où la continuité de F sur $\mathcal{D}$.

2. La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ est seulement dérivable mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (à vérifier) avec $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, pour tout $x \neq 0$. Montrons que la fonction F n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, les suites de $\mathbb{R}^2$ données par $(x_k, x_k) = \left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right)$ et $(y_k, 0) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, 0\right)$ convergent vers $(0, 0)$, mais

$$\lim_{n \to +\infty} F(x_k, x_k) = \lim_{k \to +\infty} f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k\pi} \sin(2k\pi) - \cos(2k\pi)\right) = -1$$

et $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} F(y_k, 0) = \lim_{k \to +\infty} \frac{f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right) - f(0)}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} - 0} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - 0}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}} = 0.$ Ce qui implique que F n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Exercice 2.7. Soit f une fonction réelle d'une seule variable définie sur un intervalle ouvert. Montrer que la différentiabilité de f est équivalente à sa dérivabilité.

Solution. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une seule variable définie sur I. Si f est dérivable en $x \in I$, alors on a $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h \in I}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R}$. Donc, $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h \in I}} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{|h|} = 0$. Or l'application $h \longmapsto f'(x)h$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}$, ce qui entraine que f est différentiable en x et on a

$$\begin{aligned} df(x) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto df(x)(h) = f'(x)h. \end{aligned}$$

Réciproquement, si f est différentiable en $x \in I$, alors on a $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h \in I}} \frac{f(x+h) - f(x) - df(x)(h)}{|h|} = 0$. D'où $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h \in I}} \frac{f(x+h) - f(x) - df(x)(h)}{h} = 0$. D'après la linéarité de $df(x)$ on a

$df(x)(h) = hdf(x)(1)$, $\forall h \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x+h\in I}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = df(x)(1)$. Par conséquent, f est dérivable en x et on a $f'(x) = df(x)(1)$.

Exercice 2.8. Déterminer la différentielle de la fonction f dans les cas suivants :

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x,y) = x + 2y + x^2 y$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) = (e^y, x^2)$.

***Solution*.** **a)** La fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x + 2y + x^2 y$ est polynômiale, alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. La différentielle de f est donnée par

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow (\mathbb{R})' \\ (x,y) &\longmapsto df(x,y), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} df(x,y) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) &\longmapsto df(x,y)(h,k) =< \nabla f(x,y) | (h,k) >= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, k, \end{aligned}$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 + x^2$, alors

$$df(x,y)(h,k) = (1 + 2xy)\, h + (2 + x^2)\, k.$$

b) La fonction vectorielle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, où $f_1(x,y) = e^y$ et $f_2(x,y) = x^2$, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, puisque ses fonctions composantes f_1 et f_2 sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$. La différentielle de f est donnée par

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \\ (x,y) &\longmapsto df(x,y), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} df(x,y) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (h,k) &\longmapsto df(x,y)(h,k) = \mathcal{J}_f(x,y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or $\mathcal{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$df(x,y)(h,k) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\, e^y \\ 2xh \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.9. Déterminer la différentielle de la fonction f dans les cas suivants :

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x,y) = \exp(x) + xy^2$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x,y) = (\sin x, \cos^2 y, \exp(x+y))$.

***Solution*.** **a)** La fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \exp(x) + xy^2$ est polynômiale, alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. La différentielle de f est donnée par

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow (\mathbb{R}^2)' \\ (x,y) &\longmapsto df(x,y), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} df(x,y) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) &\longmapsto df(x,y)(h,k) = < \nabla f(x,y) | (h,k) > = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, k, \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \exp(x) + y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,x\,y$, alors

$$df(x,y)(h,k) = (\exp(x) + y^2)\, h + 2\,x\,y\,k.$$

b) La fonction vectorielle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$, où $f_1(x,y) = \sin x$, $f_2(x,y) = \cos^2 y$ et $f_3(x,y) = \exp(x+y)$, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, puisque ses fonctions composantes f_1, f_2 et f_3 sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$. La différentielle de f est donnée par

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \\ (x,y) &\longmapsto df(x,y), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} df(x,y) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (h,k) &\longmapsto df(x,y)(h,k) = \mathcal{J}_f(x,y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or $\mathcal{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin(2y) \\ \exp(x+y) & \exp(x+y) \end{pmatrix}$, alors

$$df(x,y)(h,k) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin(2y) \\ \exp(x+y) & \exp(x+y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\,\cos x \\ -k\,\sin(2y) \\ (h+k)\,\exp(x+y) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.10. Soient f et g deux applications définies respectivement sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y,z) = (x + y^2, xyz)$ et $g(u,v) = (u^2 + v, uv, e^v)$.

1. Montrer que f et g sont différentiables.
2. Calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point (x,y,z) par deux méthodes :
   i) En explicitant la fonction $g \circ f$.
   ii) En appliquant le théorème sur la composée des différentielles.

Exercice 2.11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = |xy|^\alpha$, où $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles au point $(0,0)$.
2. Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 2.12. Soit g la fonction définie par $g(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Étudier la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle lorsqu'elle existe.
5. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

***Solution*.** Soit g la fonction définie par $g(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

1. Soit D_g le domaine de définition de la fonction g. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_g =& \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 > 0\} \\ =& \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 0\} \\ =& \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \neq 0 \text{ ou } y^2 \neq 0\} \\ =& \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\} \\ =& \quad \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ et } y = 0\}. \\ =& \quad \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.\end{aligned}$$

2. Montrons que g possède un prolongement par continuité en $(0,0)$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} |g(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) \\ &= \lim_{r\to 0} |r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r^2)| \text{ avec } x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta) \\ &= \lim_{r\to 0} |2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r)| \\ &\leq \lim_{r\to 0} |2r^2\ln(r)| = \underbrace{|\lim_{r\to 0} 2r^2\ln(r)|}_{=0}, \text{ car } |\cos(\theta)\sin(\theta)| \leq 1.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Ainsi g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3. Étudions l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. D'abord sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto xy$, $f_2 : t \mapsto \ln(t)$ et $f_3 : (x,y) \mapsto x^2+y^2$. Comme f_1 et f_3 sont des polynômes admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) &= y\ln(x^2+y^2) + xy \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} \\ &= y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_x'(y) &= x\ln(x^2+y^2) + xy \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} \\ &= x\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2x}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

où f_x et f_y sont les fonctions partielles de f.
Au point $(x, y) = (0, 0)$, nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

4. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle :

• Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto xy$, $f_2 : t \mapsto \ln(t)$ et $f_3 : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont des fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^2$; et puisque $f_3(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}) \subset \mathbb{R}^{+*}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

$$df_{(x,y)}(h_1,h_2) = \left(y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right).h_1 + \left(x\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2x}{x^2+y^2}\right).h_2.$$

• Pour la différentiabilité de f en $(0,0)$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|_2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r^2)}{\sqrt{r^2}} \quad \text{avec } x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta). \\
&= \lim_{r\to 0} 2r\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r) = 0,
\end{aligned}$$

car la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)\sin(\theta)$ est bornée et $\lim\limits_{r\to 0} r\ln(r) = 0$. Alors f est différentiable en $(0,0)$ et on a $df_{(0,0)}(h_1,h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$.
En résumant ce qui précède, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df_{(x,y)}(h) = \begin{cases} \left(y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)h_1 + \left(x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2x}{x^2+y^2}\right)h_2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Déterminons maintenant le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la question 3 on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme l'application $(x,y) \mapsto y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors il suffit d'étudier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Posons $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{r\to 0} r\sin(\theta)\ln(r^2) + \frac{2(r\cos(\theta))^2 r\sin(\theta)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} 2r\sin(\theta)\ln(r) + 2r\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\
&= 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),
\end{aligned}$$

car les fonctions $\theta \mapsto \cos^2(\theta)\sin(\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(\theta)$ sont bornées, $\lim\limits_{r\to 0} r = 0$ et $\lim\limits_{r\to 0} r\ln(r) = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. On Déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De la même façon nous montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Ce qui entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

***Solution*.**

1. — Étudions d'abord l'existence de dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$ où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

On a $f = g \times (\sin \circ h)$ avec $g(x,y) = x^2y^2$ et $h(x,y) = \dfrac{1}{x}$. Comme la fonction g est un polynôme, h est une fraction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$ et sin est une fonction usuelle, alors f possède des dérivées partielles par rapport aux deux variables sur $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\sin(\frac{1}{x}) - y^2\cos(\frac{1}{x}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y\sin(\frac{1}{x}),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}.$$

— Sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$: Soit $(0,y) \in \mathcal{D}$. On a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2y^2\sin(\frac{1}{t})}{t} = \lim_{t\to 0} ty^2\sin(\frac{1}{t}) = 0,$$

alors f possède au point $(0,y)$ une dérivée partielle par rapport à la première variable et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0.$$

De même,

$$\lim_{t\to y} \frac{f(0,t) - f(0,y)}{t - y} = \lim_{t\to y} \frac{0 - 0}{t - y} = 0,$$

alors f admet en $(0,y)$ une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable et on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0.$$

Autrement, en utilisant les fonctions partielles :

— Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$, c'est-à-dire, $x \neq 0$. Notons par $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les deux fonctions partielles de f en (x,y), qui sont définies par

$$f_1(t) = f(t,y) = \begin{cases} t^2y^2\sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0\,; \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(t) = f(x,t) = x^2t^2\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors elles sont dérivables en $x \neq 0$ et y respectivement. Ce qui implique que f admet au point (x,y) une dérivée partielle par rapport aux deux variables et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1'(x) = 2xy^2\sin(\frac{1}{x}) - y^2\cos(\frac{1}{x}) \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2'(x) = 2x^2y\sin(\frac{1}{x}).$$

— Étudions maintenant l'existence de dérivées partielles premières sur $\mathcal{D}$.
Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire, $x = 0$. Notons toujours par $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les deux fonctions partielles de f en $(0,y)$, qui sont définies par

$$f_1(t) = f(t,y) = \begin{cases} t^2y^2\sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0\,; \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(t) = f(0,t) = 0.$$

Comme f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors elle est dérivable en y, ce qui implique que f admet au point $(0,y)$ une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable et on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = f_2'(y) = 0$. Pour la dérivabilité de f_1 en $x = 0$, on a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_1(t) - f_1(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,y) - f(0,y)}{t - 0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2y^2\sin(\frac{1}{t})}{t} = \lim\limits_{t\to 0} ty^2\sin(\dfrac{1}{t}) = 0$, puisque $|ty^2\sin(\dfrac{1}{t})| \leq |ty^2|$ et $\lim\limits_{t\to 0}|ty^2| = 0$. Alors f possède au point $(0,y)$ une dérivée partielle par rapport à la première variable et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = f_1'(0) = 0$.

2. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2xy^2\sin(\frac{1}{x}) - y^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2x^2y\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$, ce qui montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$.
Étudions maintenant la continuité des dérivées partielles sur $\mathcal{D}$, pour cela prenons $(0,y) \in \mathcal{D}$.
On a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,t)\to(0,y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(0,y)} 2xt^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - t^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{(x,t)\to(0,y)} 2xt^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{(x,t)\to(0,y)} t^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -y^2\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,y)$ pour tout $y \neq 0$. Ce qui montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$, et par suite f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Si $y = 0$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sera continue en $(0,0)$ et malgré que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en

$(0,0)$, mais le plus grand ouvert sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$ est seulement $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$ et n'est pas $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}\cup\{(0,0)\}$, car ce dernier n'est pas un ouvert.

3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

— On a déjà vérifié que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$, alors elle est différentiable sur cet ouvert.

— Reste à étudier la différentiabilité de f sur $\mathcal{D}$.

Soit $(0,y_0)\in\mathcal{D}$, et étudions la limite en $(0,0)$ de l'application $\varepsilon:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par

$$\begin{aligned}\varepsilon(x,y) &= \frac{f((0,y_0)+(x,y))-f(0,y_0)-\left(x.\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)+y.\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)\right)}{\|(x,y)\|}\ \text{(en utilisant la norme } \|\ \|_\infty)\\ &= \frac{f(x,y_0+y)-f(0,y_0)-\left(x.\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)+y.\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)\right)}{\|(x,y)\|_\infty},\\ &= \frac{f(x,y_0+y)}{\|(x,y)\|_\infty}\\ \varepsilon(x,y) &= \frac{x^2(y_0+y)^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\|(x,y)\|_\infty}.\end{aligned}$$

On a $|\varepsilon(x,y)|\le\dfrac{x^2(y_0+y)^2}{\|(x,y)\|_\infty}$. Or $\|(x,y)\|_\infty=\sup(|x|,|y|)$ alors $|x|\le\|(x,y)\|_\infty$, ce qui implique que $\dfrac{x^2(y_0+y)^2}{\|(x,y)\|_\infty}\le\dfrac{x^2(y_0+y)^2}{|x|}$, c'est-à-dire, $|\varepsilon(x,y)|\le|x|(y_0+y)^2$. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|(y_0+y)^2=0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y)=0$.

Par conséquence, la fonction f est différentiable à n'importe quel point $(0,y_0)$ de $\mathcal{D}$, et par suite f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.14. Soit g la fonction définie par $g(x,y)=x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3. Étudier l'existence et calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Étudier la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle lorsqu'elle existe.
5. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Solution. Soit g la fonction définie par $g(x,y)=x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

1. Soit D_g le domaine de définition de la fonction g. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_g &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\neq 0\Big\}\\ &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2\neq 0 \text{ ou } y^2\neq 0\Big\}\\ &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0 \text{ ou } y\neq 0\Big\}\\ &= \mathbb{R}^2\backslash\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x=0 \text{ et } y=0\Big\}.\\ &= \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.\end{aligned}$$

2. Montrons que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$. En effet :
Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on a g coïncide avec le produit de $(x,y)\longmapsto x^2y^2$ avec la composée entre $t\longmapsto \sin t$ et $(x,y)\longmapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Puisque les trois fonctions sont continues respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors g est continue sur $\mathcal{D}_g$.
D'autre part on a

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}|g(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 = 0.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$. Ainsi g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3. Étudions l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. D'abord sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a $f=f_1\times(f_2\circ f_3)$ avec $f_1:(x,y)\mapsto x^2y^2$, $f_2=\sin$ et $f_3:(x,y)\mapsto\dfrac{1}{x^2+y^2}$. Comme f_1 est un polynôme et f_3 est une fraction rationnelle admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Au point $(x,y)=(0,0)$, nous étudions les limites suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0\\ \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

4. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle : - Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on a $f=f_1\times(f_2\circ f_3)$ avec $f_1:(x,y)\mapsto x^2y^2$, $f_2=\sin$ et $f_3:(x,y)\mapsto\dfrac{1}{x^2+y^2}$ sont

des fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} df_{(x,y)}(h_1,h_2) &= \left(2xy^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_1 \\ &+ \left(2x^2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_2. \end{aligned}$$

- Pour la différentiabilité de f en $(0,0)$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|_2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{r^2}} \quad \text{avec } x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta). \\ &= \lim_{r\to 0} r^3\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

Alors f est différentiable en $(0,0)$ et on a $df_{(0,0)}(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$. En résumant ce qui précède, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df_{(x,y)}(h) = \begin{cases} \left(\begin{array}{l} \left(2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_1 \\ +\left(2x^2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_2 \end{array}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Déterminons maintenant le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la question 3 on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme l'application $(x,y) \mapsto 2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors il suffit d'Étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Posons $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\ &= \lim_{r\to 0} 2r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right) - \frac{2r^5\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2}{r^4}\cos\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ &= \lim_{r\to 0} 2r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right) - 2r\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2\cos\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ &= 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. On déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De la même façon nous montrons que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x^2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\
&= \lim_{r\to 0} 2r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right) - \frac{2r^5\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3}{r^4}\cos\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \lim_{r\to 0} 2r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right) - 2r\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3\cos\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= 0 \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.
3. Déduire que la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
5. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet :
Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ on a f coïncide avec le produit de $(x,y)\longmapsto x^2$ avec la composée entre $t\longmapsto \sin t$ et $(x,y)\longmapsto \dfrac{y}{x}$. Puisque les trois fonctions sont continues respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$.

D'autre part, soit $b\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,b)} |f(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left|x^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right| \\
&\leq \lim_{(x,y)\to(0,b)} x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = f(0,b)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. D'abord étudions l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, on a $f = f_1\times(f_2\circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y)\mapsto x^2, f_2 = \sin$ et $f_3 : (x,y)\mapsto \dfrac{y}{x}$. Comme f_1 est un polynôme et f_3 est une fraction rationnelle admettant des dérivées partielles sur

$\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

Au point $(x,y) = (0,b)$, avec $b \in \mathbb{R}$, nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,b) - f(0,b)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{b}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{b}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,b+y) - f(0,b)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0$.
D'autre part on a :

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos\left(\frac{0}{x}\right)}{x} = 1.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

3. f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, sinon d'après le lemme de Schwarz on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

ce qui contradiction avec la question 2.
4. D'après la question 2. on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon }. \end{cases}$$

Montrons que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en point $(0,1)$. En effet, les suites de $\mathbb{R}^2$ données par $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{2k\pi}, 1\right)$ et par $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, 1\right)$ convergent vers $(0,1)$.
Mais

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi}, 1\right) = 1$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},1\right)=0$$

c'est à dire

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi},1\right) \neq \lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},1\right).$$

D'ù $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en point $(0,1)$.
Par suite f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

5. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle :

- Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ on a on a $f = f_1\times(f_2\circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y)\mapsto x^2$, $f_2=\sin$ et $f_3 : (x,y)\mapsto \dfrac{y}{x}$, sont des fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ et on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$

$$df_{(x,y)}(h_1,h_2) = \left(2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_1 + \left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_2.$$

- Pour la différentiabilité de f au point $(0,b)$, avec $b\in\mathbb{R}$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,b)} |\varepsilon(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{f(x,y+b)-f(0,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,b)\,y}{\|(x,y)\|_2}\right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left|\frac{x^2\sin\left(\frac{y+b}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\
&\leq \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,b)} |x| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors f est différentiable en $(0,b)$ et on a $df_{(0,b)}(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,h_2 = 0$. En résumant ce qui précède, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$

$$df_{(x,y)}(h) = \begin{cases} \left(2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_1 + \left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_2 \text{ si } x\neq 0; \\ 0 \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable.
3. Vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.

4. Déduire que f est de classe C^1 et n'est pas de classe C^2.

Exercice 2.17. (Fonctions homogènes)
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si

$$f(t\,x_1, t\,x_2, \dots, t\,x_n) = t^\alpha\, f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \forall t > 0.$$

1. Quelles sont les homogènes, en précisant le degré, parmi les fonctions :
   (**a**) $f(x_1, \dots, x_n) = (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$, (**b**) $f(x, y, z) = 2x^2 - 3yz$,
   (**c**) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$, (**d**) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{z}\, u(\dfrac{y}{z})$ où u est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Dans la suite, on se restreint (sans perte de généralité) aux fonctions de 2 variables et on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si f est homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f, où g est la fonction réelle d'une seule variable définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = f(ta, tb)$.
4. Établir la relation d'Euler suivante :

$$f \text{ est homogène de degré } \alpha \Longleftrightarrow x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\, f.$$

   (Indication pour la réciproque : Prouver que g vérifier sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $t\,g'(t) = \alpha\, g(t)$.)

Solution. 1. Les quatre fonctions sont homogènes, de degrés respectifs 1, 2, -1 et 0.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est homogène de degré α, c'est-à-dire, $f(t\,x, t\,y) = t^\alpha\, f(x, y)$, $\forall t > 0$, alors les fonctions u_t et v_t définies sur $\mathbb{R}^2$ par $u_t(x, y) = f(t\,x, t\,y)$ et $v_t(x, y) = t^\alpha\, f(x, y)$ sont égales et de classe $\mathcal{C}^1$ pour chaque $t > 0$ fixé. Ce qui implique que $\dfrac{\partial u_t}{\partial x} = \dfrac{\partial v_t}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u_t}{\partial y} = \dfrac{\partial v_t}{\partial y}$. Par la règle de dérivation en chaîne, on obtient $\dfrac{\partial u_t}{\partial x}(x, y) = t\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(t\,x, t\,y)$ et $\dfrac{\partial u_t}{\partial y}(x, y) = t\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(t\,x, t\,y)$. Pour v_t on a $\dfrac{\partial v_t}{\partial x}(x, y) = t^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial v_t}{\partial y}(x, y) = t^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Finalement et par comparaison, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t\,x, t\,y) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t\,x, t\,y) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \ \forall t > 0.$$

D'où les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré $\alpha - 1$.

3. En posant $g(t) = f(ta, tb)$, la fonction réelle d'une seule variable g est la composée de f et la fonction vectorielle $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (at, bt)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque ses fonctions composantes de $t \xrightarrow{\varphi_1} at$ et $t \xrightarrow{\varphi_2} bt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors g l'est aussi. En appliquant la règle de dérivation en chaîne on obtient

$$g'(t) = a\frac{\partial f}{\partial x}(t\,a, t\,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(t\,a, t\,b).$$

4. ★ Si la fonction f est homogène de degré α, alors $g(t) = f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

Ce qui implique que $g'(t) = \alpha\, t^{\alpha-1} f(x,y)$. En comparant avec la dérivée obtenue en question précédente, on en déduit que pour tout couple (x,y) et tout $t > 0$

$$\alpha\, t^{\alpha-1} f(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(t\,x, t\,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(t\,x, t\,y).$$

Il suffit donc de prendre $t = 1$ pour obtenir la relation d'Euler demandée.
★ Réciproquement, Supposons que la fonction f satisfait la relation d'Euler, c'est-à-dire, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha\, f(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 3, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$

$$\begin{aligned} g'(t) = &\; x\frac{\partial f}{\partial x}(t\,x, t\,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(t\,x, t\,y) \\ = &\; \frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(t\,x, t\,y) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(t\,x, t\,y)\right) \\ = &\; \frac{1}{t}\,\alpha\, f(tx, ty) \\ = &\; \alpha\,\frac{1}{t}\, g(t). \end{aligned}$$

D'où, g est une solution de l'équation différentielle de premier ordre $g' = \dfrac{\alpha}{t}\, g$, ce qui est équivalent à $g(t) = C\, t^{\alpha}$, où C est une constante réelle quand peut la déterminer par $C = g(1) = f(x,y)$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$ on a $g(t) = t^{\alpha}\, g(1)$, ce qui donne $f(t\,x, t\,y) = t^{\alpha}\, f(x,y)$, c'est-à-dire, la fonction f est homogène de degré α.

Exercice 2.18. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence et calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
5. Montrer que f est homogène en précisant son degré α. Rappelons qu'une fonction $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si
$$h(t\,x_1, t\,x_2, \ldots, t\,x_n) = t^{\alpha}\, h(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \forall t > 0.$$
6. Établir la relation d'Euler suivante : $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha\, f$.

***Solution*.**

1. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ on a f coïncide avec le produit de $(x,y) \longmapsto x^2$ avec la composée entre $t \longmapsto \exp(t)$ et $(x,y) \longmapsto -\dfrac{y^2}{x^2}$. Puisque les trois fonctions sont continues respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

D'autre part, soit $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left| x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} \right| = 0, \text{ voir Ex. 1.}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = f(0,b)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto x^2$, $f_2 = \exp$ et $f_3 : (x,y) \mapsto -\dfrac{y^2}{x^2}$. Comme f_1 est un polynôme et f_3 est une fraction rationnelle admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\frac{y^2}{x} \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\,y \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$$

Au point $(x,y) = (0,b)$, avec $b \in \mathbb{R}$, nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,b) - f(0,b)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \exp\left(-\frac{b^2}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \exp\left(-\frac{b^2}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,b+y) - f(0,b)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0$.

3. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle :
- Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ on a on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto x^2, f_2 = \exp$ et $f_3 : (x,y) \mapsto -\dfrac{y^2}{x^2}$, sont des fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} df_{(x,y)}(h_1,h_2) = &\ \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ h_1 + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ h_2 \\ = &\ \left[2x \exp\left(-\tfrac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\tfrac{y^2}{x} \exp\left(-\tfrac{y^2}{x^2}\right)\right] \cdot h_1 - 2\,y \exp\left(-\tfrac{y^2}{x^2}\right) \cdot h_2. \end{aligned}$$

- Pour la différentiabilité de f au point $(0,b)$, avec $b \in \mathbb{R}$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,b)} |\varepsilon(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y+b) - f(0,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,b)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,b)\,y}{\|(x,y)\|_2} \right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left| \frac{x^2 \exp\left(-\frac{(y+b)^2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} \right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,b)} |x| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors f est différentiable en $(0,b)$ et on a $df_{(0,b)}\,(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(0,0)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\,(0,0)\,h_2 = 0$.
En résumant ce qui précède, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$
$df_{(x,y)}\,(h) = \begin{cases} \left[2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right]\cdot h_1 - 2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot h_2 & \text{si } x\neq 0; \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

4. D'après la question 3 on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0; \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme l'application $(x,y)\mapsto 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$, alors il suffit d'Étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,b)$, $\forall b\in\mathbb{R}$. Remarquons d'abord que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = 0,\ \forall b\in\mathbb{R}$. Pour le deuxième terme,

$\star$ Si $b\neq 0$: On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} \frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} x\,\frac{y^2}{x^2}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = 0$.

$\star$ Si $b=0$: Posons $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} x\,\frac{y^2}{x^2}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\\ &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\notin\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}}} r\,\cos\theta\,\tan^2\theta\,\exp(-\tan^2\theta)\\ &= 0 \text{ (car } \cos\theta\,\tan^2\theta\,\exp(-\tan^2\theta) \text{ est borné).}\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, c'est-à-dire, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,b)$, $\forall b\in\mathbb{R}$. On déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on a $(x,y)\mapsto -2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$. Au point $(0,b)$ avec $b\in\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,b)} -2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) \overset{\text{"à justifier"}}{=} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ce qui entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Pour tout $t>0$, on a $f(t\,x,t\,y) = (t\,x)^2\exp\left(-\frac{(t\,y)^2}{(t\,x)^2}\right) = t^2\,f(x,y)$, si $x\neq 0$ et $f(t\times 0,t\,y) = f(0,t\,y) = 0 = t^2\times 0 = t^2\,f(0,y)$, si $x=0$. Alors

$$f(t\,x,t\,y) = t^2\,f(x,y)\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t>0.$$

C'est-à-dire, f est une fonction homogène de degré 2.

6. D'abord si $x=0$, alors $0\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0\times 0 + y\times 0 = 0 = 2\times f(0,y)$.
Maintenant si $x\neq 0$, alors

$$\begin{aligned} x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\times\left(2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right) + y\times -2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\\ &= 2x^2\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2y^2\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) - 2y^2\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\\ &= 2\,f(x,y).\end{aligned}$$

Exercice 2.19. On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^2 - 2xy + \dfrac{y^4}{4}$.

1. Montrer que f admet trois points critiques.
2. Étudier l'existence des extrema locaux.
3. Les extrema locaux obtenus sont-ils globaux ?

Solution. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce qui légitime les calculs qui suivent.

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x = 0 \text{ ou } \ x = \sqrt{2} \text{ ou } \ x = -\sqrt{2}. \end{cases}$

La fonction f possède alors trois points critiques $(0,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

2. On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 3y^2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2$.

Alors la matrice Hessienne de f en (x,y) est $\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3y^2 \end{pmatrix}$.

— Pour le point critique $(0,0)$ on a $\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$\det(\mathcal{H}_f(0,0)) = -4 < 0$ d'où f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$, mais seulement elle possède un point selle.

— Pour le point critique $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ on a $\mathcal{H}_f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Donc,

$\det(\mathcal{H}_f(1,1) = 8 > 0$, et puisque $2 > 0$ alors f admet un minimum local en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

— De même pour le point critique $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

3. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \ x^2 - 2xy + \frac{y^4}{4} = x^2 - 2xy + y^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} + 1 - 1 \\ = & \ (x-y)^2 + \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Par positivité des carrés et le fait que $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -1$, on en déduit que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) - f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = f(x,y) + 1 = (x-y)^2 + \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 \geq 0,$$

et

$$f(x,y) - f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = f(x,y) + 1 = (x-y)^2 + \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 \geq 0.$$

Ce qui prouve que les minima $f(\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ sont globaux.

Exercice 2.20.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2(y^2 + e^x)$.

1. Montrer que (a,b) est un point critique de f si, et seulement si, $(a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R} \cup \{(-2,0)\}$.

2. Soit (a,b) un point critique de f.
   (a) Si $(a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$, vérifier que f admet un minimum global en (a,b).
   (b) Si $(a,b) = (-2,0)$, la fonction f possède-elle un extremum en (-2.0)?

***Solution*.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2(y^2 + e^x)$.

1. (a,b) est un point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(b^2 + e^a) + a^2 e^a = 0 \\ a^2 \times 2b = 0. \end{cases}$$

C'équivalent à

$$\begin{cases} 2a(b^2 + e^a) + a^2 e^a = 0 \\ a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ 2ae^a + a^2 e^a = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ 2a + a^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R} \text{ ou } (a,b) = (-2,0).$$

2. Soit (a,b) un point critique de f.
   (a) Si $(a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$,, alors $f(a,b) = 0$. Or $f(x,y) = x^2(y^2 + e^x) \geq 0 = f(a,b)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc f admet un minimum global en (a,b).
   (b) Si $(a,b) = (-2,0)$. On a
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2x+2)(y^2 + e^x) + (x^2 + 2x)e^x$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xy$. Alors

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2x+2)(y^2 + e^x) + (x^2 + 2x)e^x & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que $\det H_f(-2,0) = \begin{vmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16e^{-2} < 0$, donc la fonction f ne possède pas d'extremum en $(-2,0)$, mais seulement un point selle.

Exercice 2.21.
Étudier l'existence des extrema aux fonctions $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$;
2. $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$;
3. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;
4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;
5. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
6. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
7. $f(x,y) = x^3 + y^3$
8. $f(x,y,z) = 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$.

Solution. 1. Cherchons d'abord les points critiques de la fonction définie par $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$. Comme f est un polynôme, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, ainsi

$$df(x,y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x - x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(1-x^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

La fonction f possède alors deux points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$.
f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, déterminons donc la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3.$$

Alors on a

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

• Pour le point critique $(0,0)$ on a $\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\det(\mathcal{H}_f(0,0)) = -9 < 0$, d'où f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$, mais seulement elle possède un point selle.

• Pour le point critique $(1,1)$ on a $\mathcal{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. Donc, $\det(\mathcal{H}_f(1,1)) = 27 > 0$ et puisque $-6 < 0$ alors f admet un maximum local en $(1,1)$. Ce maximum est-il global ? On a $f(1,1) = 1$ et en remarquant que $f(-2,0) = 8$ on déduit que $f(1,1)$ n'est pas un maximum global.

2. La fonction $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Ainsi

$$df(x,y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + (\ln(y))^2 + y \times 2\ln(y) \times \dfrac{1}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\ln(y))^2 + 2\ln(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y)(\ln(y) + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y) = 0 \text{ ou } \ln(y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \text{ ou } y = e^{-2} \end{cases}$$

La fonction f possède alors deux points critiques $(0,1)$ et $(0,e^{-2})$.
Pour la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x,y)$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\ln(y)}{y} + \frac{2}{y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x.$$

Alors on a

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \dfrac{2(\ln(y)+1)}{y} \end{pmatrix}.$$

• Pour le point critique $(0,1)$ on a $\mathcal{H}_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $\det(\mathcal{H}_f(0,1)) = 4 > 0$ et puisque $2 > 0$ alors f admet un minimum local en $(0,1)$. Est-il global ? Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f(x,y) - f(0,1) = y(x^2 + (\ln y)^2) - 0 = y(x^2 + (\ln y)^2) \geq 0,$$

ce qui entraine que le minimum $f(0,1) = 0$ est global.

• Pour le point critique $(0, e^{-2})$ on a $\mathcal{H}_f(0,e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{e^{-2}} \end{pmatrix}$. Donc, $\det(\mathcal{H}_f(0,e^{-2}) = 2e^{-2} \times \dfrac{-2}{e^{-2}} = -4 < 0$, d'où f n'admet pas un extremum local en $(0,e^{-2})$, mais seulement elle possède un point selle.

3. La fonction $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$df(x,y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 \end{cases}$$

La fonction f possède alors une infinité de points critiques définie par

$$\mathcal{PC}_f = \{(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1) \in \mathbb{R}^2 / k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x,y)$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

Alors on a

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \det(\mathcal{H}_f(x,y)) = \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\sin x.$$

— Pour les points critiques $(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, 1)$, on a $\det(\mathcal{H}_f(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, 1)) = 2$ et puisque $-\sin(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi) = 1 > 0$ alors f admet un minimum local en $(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, 1)$. Est-il global ? On a $f(x,y) \geq -1 + (y-1)^2 \geq -1 = f(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, 1)$, alors le minimum en $(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, 1)$ est global pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

— Pour les points critiques $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$, on a $\det(\mathcal{H}_f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)) = -2 < 0$, d'où f n'admet pas des extrema locaux aux points critiques $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, mais seulement elle possède des points selles.

4. La fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$df(x,y)=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-4y=0\\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y=0\\ y^3-x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=y\\ x^9-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=y\\ x(x^8-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=y\\ x=0 \text{ ou } x=\pm1\end{cases}$$

La fonction f possède alors trois points critiques $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

Pour la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x,y)$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-4.$$

Alors on a

$$\mathcal{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2 & -4\\ -4 & 12y^2\end{pmatrix}.$$

• Pour le point critique $(0,0)$ on a $\mathcal{H}_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix}$. Donc $\det(\mathcal{H}_f(0,0))=-16<0$ d'où f n'admet pas un extremum local en $(0,0)$, mais seulement elle possède un point selle.

• Pour le point critique $(1,1)$ on a $\mathcal{H}_f(1,1)=\begin{pmatrix}12 & -4\\ -4 & 12\end{pmatrix}$. Donc, $\det(\mathcal{H}_f(1,1)=144-16=128>0$, et puisque $12>0$ alors f admet un minimum local en $(1,1)$. Ce minimum est-il global ? Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(1,1)= &\ x^4+y^4-4xy+2=x^4-2x^2y^2+y^4+2x^2y^2-4xy+2\\ = &\ \left(x^2-y^2\right)^2+2\left(x^2y^2-2xy+1\right)\\ = &\ \left(x^2-y^2\right)^2+2\left(xy-1\right)^2\\ \geq &\ 0,\end{aligned}$$

ce qui entraine que le minimum $f(1,1)=-2$ est global.

• Pour le point critique $(-1,-1)$ on refait la même méthode que le point critique $(1,1)$, ou il suffit de remarquer que $f(-(x,y))=f(-x,-y)=f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe (Oz). D'où f admet aussi en $(-1,-1)$ un minimum global.

5. La fonction $f(x,y,z)=1+2y-3y^2+2xz-3z^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.

On a

$$df(x,y,z)=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\end{cases}\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,\frac{1}{3},0)$$

La matrice Hessienne de f au point critique $(0,\frac{1}{3},0)$ est

$$\mathcal{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -6\end{pmatrix}.$$

On cherche les valeurs propres de la matrice hessienne en $A = (0, \frac{1}{3}, 0)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (6+\lambda)\left[4 - 6\lambda - \lambda^2\right]$$

Les valeurs propres de la hessienne sont $-6, -3+\sqrt{13}, -3-\sqrt{13}$. Deux sont négatives et l'autre est positive. La condition suffisante n'est pas satisfaite. Utilisons alors une autre méthode. Essayons de montrer que $f((0, \frac{1}{3}, 0) + (x, y, z)) - f(0, \frac{1}{3}, 0)$ garde le même signe ou change de signe lorsque (x, y, z) tend vers $(0, 0, 0)$. On a

$$f((0, \frac{1}{3}, 0) + (x, y, z)) - f(0, \frac{1}{3}, 0) = \frac{-8}{3} - 4y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$$

En vérifiant que

$$\begin{aligned} -4y - 3y^2 + 2xz - 3z^2 &= \|(x,y,z)\|_\infty \left(\frac{2xz - 4y - 3y^2 - 3z^2}{\|(x,y,z)\|_\infty}\right) \\ &= \|(x,y,z)\|_\infty \varepsilon(x,y,z) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \varepsilon(x,y,z) = 0$, on conclut que f possède un maximum local au point $(0, \frac{1}{3}, 0)$.

Exercice 2.22. On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^2 - 2xy + \dfrac{y^4}{4}$.

1. Montrer que f admet trois points critiques.
2. Déterminer leur nature.
3. Vérifier que l'on peut aussi écrire

$$f(x,y) = (x-y)^2 + \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 - 1.$$

4. En déduire que les extrema locaux obtenus sont des extrema globaux.

Exercice 2.23. Afin de traiter une infection bactérienne, l'utilisation conjointe de deux composés chimiques est proposée. Des études ont montré que la durée de l'infection pouvait être modélisée par

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120,$$

où x est le dosage en mg du premier composé et y est le dosage en mg du second. Comment minimiser la durée de l'infection ?

Exercice 2.24. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \exp(x+y) + y - 1$.

1. Montrer que la condition $f(x,y) = 0$ définit au voisinage de $(1,-1)$ une fonction implicite $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 1.

Exercice 2.25.
1. Montrer que l'égalité $x\,y^2 = \sin(xy)$ définit implicitement y comme fonction de x au voisinage de $(1,0)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de cette fonction implicite au voisinage de 1.

Solution. 1. On pose $g(x,y) = x\,y^2 - \sin(xy)$, qui de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\,x\,y - x\,\cos(xy)$, donc $g(1,0) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0) = -1 \neq 0$. Le Théorème des fonctions implicites entraine alors qu'il existe un voisinage U de 1, un voisinage V de 0 et une fonction implicite $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^\infty(U)$ tels que

i) $U \times V \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi(1) = 0$;

ii) Pour tout $x \in U$, on a $g(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$. C'est-à-dire, la condition $x\,y^2 = \sin(x\,y)$ définit y comme fonction de x au voisinage de $(1,0)$.

iii) $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))}, \quad \forall x \in U.$

2. Donnons le développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 1. Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\varphi(x) = \varphi(1) + (x-1)\varphi'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}\varphi''(1) + (x-1)^2\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0.$$

Or on a $\varphi'(1) = -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)} = -\dfrac{0}{-1} = 0$. Pour le calcul de $\varphi''(x)$ sur U, on a $g(x,\varphi(x)) = x\,(\varphi(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) = 0,\ \forall x \in U$, d'après *ii)*. En dérivant cette égalité sur U à l'ordre 2, on obtient

$$(\varphi(x))^2 + 2x\,\varphi'(x)\,\varphi(x) - (\varphi(x) + x\,\varphi'(x))\cos(x\varphi(x)) = 0,\ \forall x \in U.$$

et

$$\begin{aligned} &2\,\varphi'(x)\,\varphi(x) + 2\,\varphi'(x)\,\varphi(x) + 2x(\varphi''(x)\varphi(x) + \varphi'^2(x)) \\ &\quad - (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))\cos(x\varphi(x)) + (\varphi(x) + x\,\varphi'(x))^2\sin(x\varphi(x)) = 0,\ \forall x \in U. \end{aligned}$$

En remplaçant $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = 0$, on obtient $\varphi''(1) = 0$. D'où

$$\varphi(x) = (x-1)^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0.$$

Exercice 2.26. 1. Montrer que la condition $e^{xy} + y^2 = xy - 2x + 3y - 1$ définit y comme fonction de x au voisinage de $(0,1)$.

2. Montrer que cette fonction admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 et donner ce développement limité à l'ordre 2.

Exercice 2.27. 1. Montrer que la condition $e^{x+z} = y - z$ définit z comme fonction de (x,y) au voisinage de $(1,0,-1)$.

2. Quelle est la classe de cette fonction ? Calculer ses dérivées partielles.

Solution.

1. En considérant la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = e^{x+z} - y + z$,

on a la condition $e^{x+z} = y - z$ est équivalente à $f(x,y,z) = 0$. Comme $f(1,0,-1) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{x+z} + 1$, c'est-à-dire, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,0,-1) = e^0 + 1 = 2 \neq 0$, alors d'après le Théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $(1,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage I de -1 dans $\mathbb{R}$ et une fonction implicite $\varphi : V \longrightarrow I$ vérifiant

i) $V \times I \subset \mathbb{R}^3$ et $\varphi(1,0) = -1$;

ii) $f(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow z = \varphi(x,y)$, pour tout $(x,y) \in V$. C'est-à-dire, $e^{x+z} = y - z \Longleftrightarrow z = \varphi(x,y)$, pour tout $(x,y) \in V$.

2. Toujours d'après le Théorème des fonctions implicites et comme la fonction

f définie par $f(x,y,z) = e^{x+z} - y + z$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, alors la fonction implicite φ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V et on peut calculer ses dérivées partielles premières en utilisant l'expression $\nabla\varphi(x,y) = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \\ &= -\frac{e^{x+\varphi(x,y)}}{e^{x+\varphi(x,y)}+1} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \\ &= -\frac{-1}{e^{x+\varphi(x,y)}+1} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Calculs des intégrales doubles et triples

Exercice 3.1. Calculer l'aire ou le volume des ensembles suivants.

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Qu'obtient-on dans le cas particulier où D_1 est le disque unité de $\mathbb{R}^2$?
2. $D_2 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 : x+y+z \leq 1\}$.
3. $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq R \text{ et } 0 \leq z \leq h\}$.

Solution. 1. On a

$$\begin{aligned} D = &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \\ = &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \\ = &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, \ \text{ et } \ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D) = &\ \iint_D 1\,dxdy = \int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dxdy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\right)dx \\ = &\ \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 2b\int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-a\sin\theta)d\theta \\ = &\ 2ab\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta = 2ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2ab\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} = ab\pi. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{A}ire(D) = ab\pi.}$$

2. On a

$$\begin{aligned} D = &\ \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid x+y+z \leq 1\} \\ = &\ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \ \text{ et } \ x+y+z \leq 1\} \\ = &\ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \ \text{ et } \ x \leq x+y \leq x+y+z \leq 1\} \\ = &\ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1-x \ \text{ et } \ 0 \leq z \leq 1-x-y\} \end{aligned}$$

Alors, d'après le Théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(D) &= \iint_D 1\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left([z]_0^{1-x-y} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{V}(D) = \frac{1}{6}.}$$

3. En utilisant le changement de variables en coordonnées cylindriques, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ définie par $\varphi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) = (x, y, z)$, on a $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R \text{ et } 0 \leq z \leq h\} = \varphi(D')$ où

$$\begin{aligned}
D' &= \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \mid r^2 \leq R \;\text{ et }\; 0 \leq z \leq h\} \\
&= \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \mid 0 < r \leq \sqrt{R},\; 0 \leq \theta < 2\pi \;\text{ et }\; 0 \leq z \leq h\}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(D) &= \iiint_D 1\,dxdydz = \iiint_{\varphi(D')} dxdydz = \iiint_{D'} |\det(\mathcal{J}_\varphi(r, \theta, z))|\,drd\theta dz \\
&= \iiint_{D'} r\,drd\theta dz = \int_0^{\sqrt{R}} \int_0^{2\pi} \int_0^h r\,drd\theta dz = \int_0^{\sqrt{R}} r\,dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \pi h R.
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{V}(D) = \pi h R.}$$

Exercice 3.2.
Calculer l'aire ou le volume des ensembles suivants.

1. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x < y \leq 1\}$.
2. $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$.
3. $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \leq 0\}$.
4. $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.
5. $D_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

***Solution*.** 1. On a

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq 1\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1 \;\text{ et }\; x < y \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}ire(D_1) &= \iint_{D_1} 1\,dxdy = \int_0^1 \int_x^1 dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 dy \right) dx \\
&= \int_0^1 (1 - x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{A}ire(D_1) = \frac{1}{2}.}$$

2. On a

$$\begin{aligned} D_2 = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\} \\ = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1 \ \text{ et } \ 0\leq y\leq 1-x\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D_2) = &\ \iint_{D_2} 1\,dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x} dy\right)dx \\ = &\ \int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{A}ire(D_2) = \frac{1}{2}.}$$

2. On a

$$\begin{aligned} D_3 = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-y\leq 0\} \\ = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2\times\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\leq 0\} \\ = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2\leq(\tfrac{1}{2})^2\} \\ = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2}\leq\tfrac{1}{2}\} \\ = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(0,\tfrac{1}{2})\|_2\leq\tfrac{1}{2}\} \\ D_3 = &\ B'_{\|\ \|_2}\left((0,\tfrac{1}{2}),\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ définie par $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,\frac{1}{2}+r\sin\theta)=(x,y)$, on a $D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-y\leq 0\}=\varphi(D_3')$ où

$$\begin{aligned} D_3' = &\ \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ \mid r^2\cos^2\theta+(\tfrac{1}{2}+r\sin\theta)^2-\tfrac{1}{2}-r\sin\theta\leq 0\} \\ = &\ \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ \mid r\leq\tfrac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D_3) = &\ \iiint_{D_3} 1\,dxdy = \iiint_{\varphi(D_3')} dxdy = \iiint_{D_3'} |\det(\mathcal{J}_\varphi(r,\theta))|\,drd\theta \\ = &\ \iiint_{D_3'} r\,drd\theta = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} r\,drd\theta = \int_0^{\frac{1}{2}} r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{A}ire(D_3) = \frac{\pi}{4}.}$$

3. On a

$$\begin{aligned} D_4 = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi^2< x^2+y^2\leq 4\,\pi^2\} \\ = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi<\sqrt{x^2+y^2}\leq 2\,\pi\} \\ = &\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi<\|(x,y)\|_2\leq 2\,\pi\}. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ définie par $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)=(x,y)$, on a $D_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi^2<x^2+y^2\leq 4\,\pi^2\}=\varphi(D_4')$ où

$$\begin{aligned} D_4' = &\ \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ \mid \pi^2<r^2\leq 4\,\pi^2\} \\ = &\ \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ \mid \pi<r\leq 2\,\pi\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D_4) = &\ \iiint_{D_4} 1\,dxdy = \iiint_{\varphi(D_4')} dxdy = \iiint_{D_4'} |\det(\mathcal{J}_\varphi(r,\theta))|\,drd\theta \\ = &\ \iiint_{D_4'} r\,drd\theta = \int_\pi^{2\,\pi}\int_0^{2\pi} r\,drd\theta = \int_\pi^{2\,\pi} r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{A}ire(D_4) = 3\,\pi^3.}$$

4. On a $D_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$

Via l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(X,Y,Z) = (a\,X, b\,Y, c\,Z) = (x,y,z)$, et qui est injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, on a $D_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\} = \varphi(D_5')$ où $D_5' = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2+Y^2+Z^2 \le 1\}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(D_5) = & \iiint_{D_5} 1\,dxdydz = \iiint_{\varphi(D_5')} dxdydz = \iiint_{D_5'} |\det(\mathcal{J}_\varphi(X,Y,Z))|\,dXdYdZ \\ = & \iiint_{D_5'} |a\,b\,c|\,dXdYdZ = |a\,b\,c|\mathcal{V}(D_5').\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables en coordonnées sphériques, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times[0,\pi]$ définie par

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times[0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) &\longmapsto \psi(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) = (X,Y,Z),\end{aligned}$$

on a $D_5' = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2+Y^2+Z^2 \le 1\} = \psi(D_5'')$ où

$D_5'' = \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times[0,\pi] \mid r^2 \le 1\} = \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times[0,\pi] \mid 0 < r \le 1\}$.

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(D_5') &= \iiint_{D_5'} dxdydz = \iiint_{\psi(D_5'')} dXdYdZ = \iiint_{D_5''} |\det(\mathcal{J}_\psi(r,\theta,\phi))|\,drd\theta d\phi \\ &= \iiint_{D_5''} r^2\sin\phi\,drd\theta d\phi = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^\pi r^2\,\sin\phi\,drd\theta d\phi = \int_0^1 r^2\,dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^\pi \sin\phi\,d\phi \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \times [\theta]_0^{2\pi} \times [-\cos\phi]_0^\pi = \frac{4\,\pi}{3}.\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{V}(D_5) = \frac{4\,\pi}{3}\,|a\,b\,c|.}$$

Exercice 3.3. Soit Δ une partie de $\mathbb{R}^2$ symétrique par rapport à l'axe (Oy) (resp. (Ox)), c'est-à-dire, $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow (-x,y) \in \Delta$ (resp. $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow (x,-y) \in \Delta$). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction numérique vérifiant $f(-x,y) = -f(x,y)$ (resp. $f(x,-y) = -f(x,y)$) pour tout $(x,y) \in \Delta$.

1. Montrer que $I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = 0$.
2. Application1 : Calculer l'intégrale double $I = \iint_\Delta xy\ln(x^2+y^2)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ y > 0 \ \text{ et } \ x^2+y^2 \le 1\}$.
3. Application2 : Calculer l'intégrale double $I = \iint_\Delta x^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x > 0 \ \text{ et } \ |x|+|y| \le 1\}$.

Solution. 1. En effectuant un changement de variables via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v) = (-u,v) = (x,y)$. On a $\Delta = \varphi(\Delta)$ d'après l'équivalence $(u,v) \in \Delta \Leftrightarrow (-u,v) \in \Delta$ et $\det(\mathcal{J}_\varphi(u,v)) = -1$. Alors,

$$\begin{aligned} I = & \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,dxdy \\ = & \iint_\Delta f\circ\varphi(u,v)\ |\det(\mathcal{J}_\varphi(u,v))|\,dudv = \iint_\Delta f(-u,v)\,|-1|dudv \\ = & \iint_\Delta -f(u,v)\,dudv = -\iint_\Delta f(u,v)\,dudv = -I. \end{aligned}$$

Ce qui entraine que $I = 0$.

2. Application1 : On a $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y > 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y > 0$ et $(-x)^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (-x,y) \in \Delta$.
Pour la fonction $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$, on a $f(-x,y) = (-x)y\ln((-x)^2+y^2) = -f(x,y)$. Alors, par le changement de variables via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v) = (-u,v) = (x,y)$, on a

$$\begin{aligned} I = & \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,dxdy \\ = & \iint_\Delta f\circ\varphi(u,v)\ |\det(\mathcal{J}_\varphi(u,v))|\,dudv = \iint_\Delta f(-u,v)\,|-1|dudv \\ = & \iint_\Delta -f(u,v)\,dudv = -\iint_\Delta f(u,v)\,dudv = -I. \end{aligned}$$

D'où $I = 0$.

3. Application2 : On a $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0$ et $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0$ et $|x| + |-y| \leq 1 \Leftrightarrow (x,-y) \in \Delta$.
Pour la fonction $f(x,y) = x^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)$, on a $f(x,-y) = x^2\sin\left(\frac{-y}{x}\right) = -f(x,y)$. Alors, par le changement de variables via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v) = (u,-v) = (x,y)$, on a

$$\begin{aligned} I = & \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,dxdy \\ = & \iint_\Delta f\circ\varphi(u,v)\ |\det(\mathcal{J}_\varphi(u,v))|\,dudv = \iint_\Delta f(u,-v)\,|-1|dudv \\ = & \iint_\Delta -f(u,v)\,dudv = -\iint_\Delta f(u,v)\,dudv = -I. \end{aligned}$$

D'où $I = 0$.

Exercice 3.4.

i) Calculer $I(\alpha) = \iiint_D (1 + \alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$, $\varepsilon > 0$, $R > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Déduire le volume de $B = B_{f\|\|_2}(0,R)$ la boule fermée de $\mathbb{R}^3$ associée à la norme euclidienne centrée à l'origine et de rayon $R > 0$.

Exercice 3.5.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $H = \iint_D x\,y\,e^{y-x}\,dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y > 0 \text{ et } y - x < 1\}$.

2. $I = \displaystyle\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 < x^2+y^2 \leq 4\,\pi^2\}$.
3. $J = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-y \leq 0\}$.
4. $K = \displaystyle\iiint_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\,dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 : x+y+z \leq 1\}$.
5. $L = \displaystyle\iiint_D z^{x^2+y^2}\,dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$.
6. $M = \displaystyle\iiint_D (1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$, $(R>0)$.
7. $N = \displaystyle\iint_D x\,y\,dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0 \text{ et } a\,x^2+b\,y^2 \leq 1\}$, avec a et b sont deux réels strictement positifs.
8. $P = \displaystyle\iiint_D y\,dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Solution. 1. On a

$$\begin{aligned} D = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y > 0 \text{ et } y-x < 1\} \\ = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0 \text{ et } 0 < y < x+1\} \end{aligned}$$

Alors, d'après le Théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned} H = \iint_D x\,y\,e^{y-x}\,dxdy &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} x\,y\,e^{y-x}\,dxdy = \int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{x+1} y\,e^{y-x}\,dy\right)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\left(\left[y\,e^{y-x}\right]_0^{x+1} - \int_0^{x+1} e^{y-x}\,dy\right)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\left((x+1)\,e - \left[e^{y-x}\right]_0^{x+1}\right)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\left((x+1)\,e - e + e^{-x}\right)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\left(x\,e + e^{-x}\right)dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left(x^2\,e + x\,e^{-x}\right)dx \\ &= \left[e\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[-x\,e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \frac{e}{3} - e - 1 + e. = \frac{e}{3} - e - 1 + e. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{H = \frac{e}{3} - 1.}$$

2. En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$, on a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2+y^2 \leq 4\,\pi^2\} = \varphi(D')$ où

$$\begin{aligned} D' = & \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\mid \pi^2 < r^2 \leq 4\,\pi^2\} \\ = & \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\mid \pi < r \leq 2\,\pi \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\}. \end{aligned}$$

Alors, d'après le Théorème de Fubini on obtient

$$
\begin{aligned}
I = \iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy &= \iint_{\varphi(D')} \sin(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy \\
&= \iint_{D'} \sin(r).\,|\det(\mathcal{J}_\varphi(r,\theta))|\,drd\theta = \iint_{D'} \sin\sqrt{r^2}\,r\,drd\theta \\
&= \int_\pi^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,\sin r\,drd\theta = \int_\pi^{2\pi} r\,\sin r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta \\
= 2\pi\left([-r\cos r]_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\cos r\,dr\right) &= 2\pi(-2\pi\cos(2\pi)+\pi\cos(\pi)+\sin(2\pi)-\sin(\pi))
\end{aligned}
$$

D'où

$$\boxed{I = -6\pi^2.}$$

3. Par le changement de variables en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$, on a $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-y\leq 0\} = \varphi(D')$ où

$$
\begin{aligned}
D' = &\ \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ |\ r^2 - r\sin\theta \leq 0\} \\
= &\ \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ |\ 0<r\leq\sin\theta \ \text{ et } \ 0<\sin\theta\} \\
= &\ \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ |\ 0<r\leq\sin\theta \ \text{ et } \ 0<\theta<\pi\}.
\end{aligned}
$$

Alors, d'après le Théorème de Fubini on obtient

$$
\begin{aligned}
J = &\ \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{\varphi(D')}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'}\sqrt{r^2}.\,|\det(\mathcal{J}_\varphi(r,\theta))|\,drd\theta \\
= &\ \iint_{D'} r\times r\,drd\theta = \int_0^\pi\left(\int_0^{\sin\theta} r^2\,dr\right)d\theta = \int_0^\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \\
= &\ \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi \\
= &\ \frac{1}{3}\left[1+\frac{-1}{3}+1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{9}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\boxed{J = \frac{4}{9}.}$$

4. On a

$$
\begin{aligned}
D = &\ \{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^+)^3\ |\ x+y+z\leq 1\} \\
= &\ \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ |\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ \text{ et }\ x+y+z\leq 1\} \\
= &\ \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ |\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ \text{ et }\ x\leq x+y\leq x+y+z\leq 1\} \\
= &\ \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ |\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\ \text{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\}
\end{aligned}
$$

Alors, d'après le Théorème de Fubini on obtient

$$K = \iiint_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\,dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^2}dxdydz$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^2}dz\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\left[\frac{-1}{1+x+y+z}\right]_0^{1-x-y}\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{1+x+y}\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left[\frac{-1}{2}y+\ln|1+x+y|\right]_0^{1-x}dx$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{2}(x-1)+\ln(2)-\ln(1+x)\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-x)+\ln(2)x-((1+x)\ln(1+x)-x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)+\ln(2)-(2\ln(2)-1).$$

D'où

$$\boxed{K = \frac{3}{4}-\ln(2).}$$

5. En utilisant le changement de variables en coordonnées cylindriques, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}$ définie par $\varphi(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)=(x,y,z)$, on a $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1 \text{ et } 0\leq z\leq 1\}=\varphi(D')$ où

$$\begin{aligned} D' = &\ \{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \ \mid r^2\leq 1 \ \text{ et } \ 0\leq z\leq 1\} \\ = &\ \{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \ \mid 0<r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi \ \text{ et } \ 0\leq z\leq 1\}. \end{aligned}$$

Alors

$$L = \iiint_D z^{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint_{\varphi(D')} z^{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint_{D'} z^{r^2}.\left|\det(\mathcal{J}_\varphi(r,\theta,z))\right|drd\theta dz$$

$$= \iiint_{D'} z^{r^2}.rdrd\theta dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 z^{r^2}.rdrd\theta dz = \int_0^1\int_0^1 z^{r^2}.rdrdz\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\left(\int_0^1 z^{r^2}dz\right)dr = 2\pi\int_0^1 r\left[\frac{z^{r^2+1}}{r^2+1}\right]_0^1 dr = 2\pi\int_0^1 r.\frac{1}{r^2+1}dr$$

$$= 2\pi\int_0^1\frac{r}{r^2+1}\,dr = \pi\int_0^1\frac{2r}{r^2+1}\,dr = \pi\left[\ln|r^2+1|\right]_0^1 = \pi\ln(2)$$

D'où

$$\boxed{L = \pi\ln(2).}$$

6. En utilisant le changement de variables en coordonnées sphériques, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times[0,\pi]$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times[0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) &\longmapsto \varphi(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) = (x,y,z), \end{aligned}$$

on a $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq R^2\} = \varphi(D')$ où

$$\begin{aligned} D' &= \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times[0,\pi] \mid r\sin\theta\sin\phi \geq 0 \ \text{ et } \ r^2 \leq R^2\} \\ &= \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times[0,\pi] \mid \sin\theta \geq 0 \ \text{ et } \ 0 < r \leq R\}\text{"car } \sin\phi \geq 0\text{"} \\ &= \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times[0,\pi] \mid 0 < r \leq R, \ 0 \leq \theta \leq \pi \ \text{ et } \ 0 \leq \phi \leq \pi\}. \end{aligned}$$

Alors, d'après le Théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D (1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz = \iiint_{\varphi(D')} (1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz \\ &= \iiint_{D'} (1+r)\,|\det(\mathcal{J}_\varphi(r,\theta,\phi))|\,drd\theta d\phi = \iiint_{D'} (1+r).r^2\sin\phi\,drd\theta d\phi \\ &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^\pi (r^2+r^3)\sin\phi\,drd\theta d\phi = \int_0^R (r^2+r^3)\,dr\int_0^\pi d\theta\int_0^\pi \sin\phi\,d\phi \\ &= \left[\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{4}\right]_0^R \times \pi \times [-\cos\phi]_0^\pi = 4\pi\left(\frac{R^3}{3}+\frac{R^4}{4}\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{M = 4\pi\left(\frac{R^3}{3}+\frac{R^4}{4}\right).}$$

Exercice 3.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

On pose $I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$ avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2-y < 0\}$.

1. Dessiner Δ et montrer que Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer I.