Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Filière : Tronc commun MIP

Module : M135

===

ANALYSE 3 :
Fonctions de plusieurs variables
et calcul des intégrales multiples

Examens corrigés

===

Professeur : S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2022/2023

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Filière : Tronc commun MIP

Module : M135

==

ANALYSE III :
Fonctions de plusieurs variables
et calcul des intégrales multiples

Examens corrigés

==

Professeur : S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2022/2023

Table des matières

1. MONE : Module ouvert non enseigné

Chapitre 1

Année universitaire 2022-2023

1.1 Session normale (31 janvier 2023)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.1.1. [4 points]
Rappel : L'application $\|.\|_2 \; : \; (x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

1. Vérifier que $N(x, y) = \|(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y)\|_2, \; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déduire que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Prouver que N et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.1.2. [4 points]
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x + y| \leq 1\}.$$

1. Montrer que A n'est pas un ouvert.
2. Montrer que A est un fermé.
3. L'ensemble A est-il compact ?
4. L'ensemble A est-il convexe ?

Exercice 1.1.3. [12 points]
Soit g la fonction définie par $g(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Quelle est la classe de f sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$?
4. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
5. Étudier l'existence et calculer les dérivées partielles premières de f au point $(0,0)$.
6. Étudier la différentiabilité de f au point $(0,0)$.
7. Déduire le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.
8. Calculer l'intégrale double $I = \iint_\Delta f(x,y)\, dxdy$
   où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > 0 \ \text{ et } \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
9. $i)$ Montrer que la condition $\cos y = f(x,y)$ définit implicitement y comme fonction de x au voisinage de $(0, \frac{\pi}{2})$.

   $ii)$ Donner un développement limité à l'ordre 1 de cette fonction implicite au voisinage de 0.

Corrigé.
Exercice 1.1.1

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \sqrt{x^2 + xy + y^2} \\ &= \sqrt{\left(x^2 + 2x\left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} \\ &= \left\|\left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|_2, \end{aligned}$$

d'où $N(x,y) = \left\|\left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|_2, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. L'application $N : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2 + xy + y^2} = \left\|\left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|_2$, est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Puisque l'application $(x,y) \to \|(x,y)\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Alors
   $i)$ La séparation : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} N(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \left\|\left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{y}{2} = 0 \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (0,0). \end{aligned}$$

$ii)$ L'homogénéité : Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
N(\lambda(x,y)) &= N(\lambda x,\lambda y) = \left\|\left(\lambda x+\frac{\lambda y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda y\right)\right\|_2\\
&= \left\|\lambda\left(x+\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|_2\\
&= |\lambda|\left\|\left(x+\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|_2\\
&= |\lambda| N(x,y).
\end{aligned}$$

$iii)$ L'inégalité triangulaire : Soient $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
N((x,y)+(x',y')) &= N(x+x',y+y')\\
&= \left\|\left(x+x'+\frac{y+y'}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(y+y')\right)\right\|_2\\
&= \left\|\left(x+\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\left(x'+\frac{y'}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\right\|_2\\
&\leq \left\|\left(x+\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|_2+\left\|\left(x'+\frac{y'}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\right\|_2\\
&\leq N(x,y)+N(x',y').
\end{aligned}$$

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
N(x,y) &= \sqrt{x^2+xy+y^2}\\
&\leq \sqrt{x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+y^2}\\
&= \sqrt{\frac{3}{2}(x^2+y^2)}\\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}\\
&\leq \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|(x,y)\|_2.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|(x,y)\|_2 &= \sqrt{x^2+y^2}\\
&= \sqrt{x^2+y^2+2xy-2xy}\\
&\leq \sqrt{x^2+y^2+2xy+2|xy|}\\
&\leq \sqrt{x^2+y^2+2xy+x^2+y^2}\\
&= \sqrt{2(x^2+y^2+xy)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{x^2+xy+y^2}\\
&= \sqrt{2}N(x,y).
\end{aligned}$$

C'est à dire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \|(x,y)\|_2 \leq N(x,y) \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|(x,y)\|_2$. Ce qui signifie que N et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.1.2

1. Montrons que A n'est pas un ouvert. En effet, le point $(1,0) \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B_{\|\cdot\|_1}((1,0),\varepsilon) \nsubseteq A$, car $\left(1+\frac{\varepsilon}{2},0\right) \in B_{\|\cdot\|_1}((1,0),\varepsilon)$ et $\left(1+\frac{\varepsilon}{2},0\right) \notin A$. Ce qui signifie que A n'est pas un ouvert.
2. Soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers une limite (x,y). Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Comme $(x_n,y_n) \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors
$$|x_n + y_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
par passage à la limite on obtient
$$\lim_{n\to\infty} |x_n + y_n| \leq 1$$
c'est-à-dire,
$$|x+y| \leq 1.$$
Ce qui entraine que $(x,y) \in A$, et par suite la partie A est fermée dans $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble A n'est pas compact car il est non borné. En effet, pour tout $M > 0$ il existe $(x,y) \in A$ tel que $\|(x,y)\|_\infty > M$. Il suffit de choisir par exemple $(x,y) = (-M, M+1)$.
4. L'ensemble A est convexe. En effet, soient (x,y), $(x',y') \in A$, $\alpha \in [0,1]$, on a $\alpha(x,y) + (1-\alpha)(x',y') = (\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha y + (1-\alpha)y') \in A$, puisque
$$\begin{aligned}
|\left(\alpha x + (1-\alpha)x'\right) + \left(\alpha y + (1-\alpha)y'\right)| &= |\alpha\left(x+y\right) + (1-\alpha)\left(x'+y'\right)| \\
&\leq \alpha|\left(x+y\right)| + (1-\alpha)|\left(x'+y'\right)| \\
&\leq \alpha \times 1 + (1-\alpha) \times 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$
D'où A est convexe.

Exercice 1.1.3

1. Soit D_g le domaine de définition de la fonction g. Alors
$$\begin{aligned}
D_g &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 0\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \neq 0 \text{ ou } y^2 \neq 0\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\right\} \\
&= \mathbb{R}^2 \backslash \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ et } y = 0\right\}. \\
&= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.
\end{aligned}$$
2. Montrons que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$. En effet :
Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on a g est une fraction rationnelle, alors elle est bien définie et

continue sur son domaine de définition sur $D_g = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} |g(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| y \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \\
&\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| y \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} \right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{1}{2} y \right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Ainsi g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la fonction f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
4. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors elle est différentiable ce qui entraîne que f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2 \times 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2 \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

5. Au point $(x,y) = (0,0)$, nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\lim_{y\to0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y} = 0.$$

Ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

6. Pour étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y\right)}{\|(x,y)\|_2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Alors, selon le chemin $y = x$ on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x\geq 0}} \varepsilon(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \varepsilon(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x}{|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x\leq 0}} \varepsilon(x,y) = \lim_{x\to 0^-} \varepsilon(x,x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x}{|x|} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Alors, la imite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y)$ n'existe pas, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

7. Déterminons maintenant le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la question 6, f n'est pas différentiable en $(0,0)$, alors f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ est le plus grand ouvert sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

8. Calculons l'intégrale double $I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y>0 \ \text{ et } \ x^2+y^2\leq 1\}$. En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ définie par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\longmapsto \psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y) \end{aligned}$$

on a $\mathcal{J}_\psi(r,\theta) = r$ et $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y>0 \ \text{ et } \ x^2+y^2\leq 1\} = \psi(\Delta')$, où

$$\begin{aligned} \Delta' &= \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\left[0,2\pi\right[/ r\sin\theta>0 \ \text{ et } \ r^2\leq 1\right\} \\ &= \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[/\sin\theta>0 \text{ et } 0<r\leq 1\right\} \\ &= \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[/0<r\leq 1 \text{ et } 0<\theta\leq\pi\right\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta f(x,y)dxdy = \iint_{\psi(\Delta')} \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy \\ &= \iint_{\Delta'} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}\, r\,drd\theta \\ &= \iint_{\Delta'} r^2\cos\theta\sin^2\theta drd\theta \\ &= \int_0^1 r^2dr\int_0^\pi \cos\theta\sin^2\theta d\theta \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\times\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{3}\times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

9. *i)* En posant $h(x,y) = \cos y - f(x,y)$, on a h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout voisinage ouvert W de $(0,\frac{\pi}{2})$ inclus dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. On a $h\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\sin y - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, donc $\frac{\partial h}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$. Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de 0, un voisinage V de $\frac{\pi}{2}$ et une fonction implicite $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^\infty(U)$ tels que

a) $U \times V \subset W$ et $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$;

b) Pour tout $x \in U$, on a $h(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$. C'est-à-dire, la condition $\cos y = f(x,y)$ définit y comme fonction de x au voisinage de $(0, \frac{\pi}{2})$.

c) $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,\varphi(x))}, \quad \forall x \in U.$

ii) Le développement limité à l'ordre 1 de cette fonction implicite φ au voisinage de 0 est donné par

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Or, pour tout $x \in U$, on a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial h}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{-\sin\varphi(x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{\frac{\varphi(x)^4 - x^2\varphi(x)^2}{(x^2+\varphi(x)^2)^2}}{\sin\varphi(x) + \dfrac{2x^3\varphi(x)}{(x^2+\varphi(x)^2)^2}}$$

En particulier pour $x = 0$, on a $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, alors $\varphi'(0) = -1$. Par conséquent,

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

1.2 Session de rattrapage (09 février 2023)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.2.1. [10 points]

1. Soit A la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

   (a) Montrer que A n'est pas un ouvert.

   (b) Montrer que A est un compact.

   (c) L'ensemble A est-il convexe ?

   (d) Calculer l'integrale suivante :

$$I = \iint_A \frac{2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy.$$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+y^2\right)^{\frac{x}{x^2+y^2}}.$$

Exercice 1.2.2. [10 points]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2).$$

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f.
2. Quelle est la classe de f sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$?
3. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la différentielle de f sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que f possède deux points critiques.
6. Prouver que f admet un seul extremum local. Est-il global ?

***Corrigé*.**
Exercice 1.2.1

1. (a) Montrons que A n'est pas un ouvert. En effet, le point $(2,0) \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B_{\|.\|_2}((2,0), \varepsilon) \not\subseteq A$, car $\left(2 + \frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \in B_{\|.\|_1}((2,0), \varepsilon)$ et $\left(2 + \frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \notin A$. Ce qui signifie que A n'est pas un ouvert.

   (b) Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers une limite (x, y). Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Comme $(x_n, y_n) \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$1 \leq (x_n)^2 + (y_n)^2 \leq 4, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

   par passage à la limite on obtient

$$\lim_{n\to\infty} 1 \leq (x_n)^2 + (y_n)^2 \leq 4.$$

   D'où,

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

   Ce qui entraine que $(x, y) \in A$, et par suite la partie A est fermée dans $\mathbb{R}^2$.
   D'autre part, pour tout $(x, y) \in A$, on a $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, c'est-à-dire, , $1 \leq \|(x, y)\|_2^2 \leq 4$, alors $\|(x, y)\|_2 \leq 2$. Donc A est borné. Par suite A est compact.

   (c) Pour les deux points $X = (1, 0) \in A$ et $Y = (-1, 0) \in A$, on a $(0, 0) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$, c'est-à-dire, , $(0, 0) \in [X, Y]$. Mais $(0, 0) \notin A$, alors $[X, Y] \not\subseteq A$, d'où A n'est pas convexe.

   (d) Calculons l'intégrale double $I = \displaystyle\iint_A \frac{2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dxdy$ où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ définie par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto \psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y) \end{aligned}$$

   on a $\mathcal{J}_\psi(r, \theta) = r$ et $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} = \psi(A')$, où

$$\begin{aligned} A' &= \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left[0, 2\pi\right[/ 1 \leq r^2 \leq 4\right\} \\ &= \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\ / \ 1 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 < \theta \leq 2\pi\right\} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \frac{2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy = \iint_{\psi(A')} \frac{2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy \\ &= \iint_{A'} \frac{2}{\sqrt{1+r^2}}\, r\, drd\theta \\ &= 2\iint_{A'} \frac{2r}{2\sqrt{1+r^2}}\, drd\theta \\ &= 2\int_1^2 \frac{2r}{2\sqrt{1+r^2}}dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\left[\sqrt{1+r^2}\right]_1^2 \times 2\pi \\ &= 4\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

2. Au point $(0,0)$, en utilisant les coordonnées polaires et le développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \left(1+y^2\right)^{\frac{x}{x^2+y^2}} &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\ln\left(1+y^2\right)\right) \\ &= \lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta\in[0,2\pi[}} \exp\left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\ln\left(1+(r\sin\theta)^2\right)\right) \\ &= \lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta\in[0,2\pi[}} \exp\left(\frac{\cos\theta}{r}\left(r^2\sin^2\theta + r^2\sin^2\theta\,\varepsilon(r^2\sin^2\theta)\right)\right), \qquad \left(\text{avec } \varepsilon(u)\underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0\right) \\ &= \lim_{\substack{r\to 0,\\ \theta\in[0,2\pi[}} \exp\left(r\,\cos\theta\sin^2\theta + r\,\cos\theta\sin^2\theta\,\varepsilon(r^2\sin^2\theta)\right), \qquad \left(\text{avec } \varepsilon(u)\underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0\right) \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Exercice 1.2.2

1. Soit D_f le domaine de définition de la fonction f. Alors

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/f(x,y)\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y>0\right\} \\ &= \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

2. Sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ la fonction f s'écrit sous la forme $f = f_1\left(f_2+(f_3\circ f_1)^2\right)$, où $f_1 : (x,y)\longmapsto y$, $f_2 : (x,y)\longmapsto x^2$, et $f_3 : t\longmapsto \ln t$. Les fonctions polynomiales f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction usuelle f_3 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $(f_3\circ f_1)^2$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. D'où f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.
3. Sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors elle est différentiable ce qui entraîne que f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + y \times 2\frac{\ln y}{y} = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y.$$

4. Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors elle est différentiable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. La différentielle de f est donnée par

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathscr{L}\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right) \\ (x,y) &\longmapsto df(x,y), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} df(x,y) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) &\longmapsto df(x,y)(h,k) = < \nabla f(x,y) | (h,k) > = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, k, \end{aligned}$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y$, alors

$$df(x,y)(h,k) = 2xy\, h + \left(x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y\right) k.$$

5. La fonction $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Ainsi

$$df(x,y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + (\ln(y))^2 + y \times 2\ln(y) \times \dfrac{1}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\ln(y))^2 + 2\ln(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y)(\ln(y) + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y) = 0 \text{ ou } \ln(y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \text{ ou } y = e^{-2} \end{cases}$$

La fonction f possède alors deux points critiques $(0,1)$ et $(0,e^{-2})$.

6. Pour la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x,y)$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\ln(y)}{y} + \frac{2}{y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x.$$

Alors on a

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \dfrac{2(\ln(y)+1)}{y} \end{pmatrix}.$$

• Pour le point critique $(0,e^{-2})$ on a $\mathcal{H}_f(0,e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{e^{-2}} \end{pmatrix}$. Donc, $\det(\mathcal{H}_f(0,e^{-2}) = 2e^{-2} \times \dfrac{-2}{e^{-2}} = -4 < 0$, d'où f n'admet pas un extremum local en $(0,e^{-2})$, mais seulement elle possède un point selle.

• Pour le point critique $(0,1)$ on a $\mathcal{H}_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $\det(\mathcal{H}_f(0,1)) = 4 > 0$ et puisque $2 > 0$ alors f admet un minimum local en $(0,1)$. Est-il global ? Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f(x,y) - f(0,1) = y(x^2 + (\ln y)^2) - 0 = y(x^2 + (\ln y)^2) \geq 0,$$

ce qui entraine que le minimum $f(0,1) = 0$ est global.

Chapitre 2

Année universitaire 2021-2022

2.1 Session normale (09 février 2022)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 2.1.1. [5 points]
Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$N(x, y, z) = \sup(|x|, |y|) + |z|.$$

1. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.1.2. [4 points]
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}.$$

1. Montrer que A n'est pas un ouvert.
2. Montrer que A est un compact.
3. L'ensemble A est-il convexe ?

Exercice 2.1.3. [11 points]
Soit g la fonction définie par $g(x, y) = x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Étudier l'existence et calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Étudier la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle lorsqu'elle existe.
5. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

6. Montrer que la condition $x = f(z, y)$ définit z comme fonction de (x, y) au voisinage de $\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$, puis calculer ses dérivées partielles.

***Corrigé*.**

Exercice 2.1.1

1. L'application $N : (x, y, z) \longmapsto \|(x, y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z|$ est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Puisque l'application $(x, y) \to \|(x, y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Alors

   $i)$ La séparation : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} N(x,y,z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \|(x,y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \|(x,y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} = 0 \text{ et } |z| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0) \text{ et } z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0). \end{aligned}$$

   $ii)$ L'homogénéité : Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda(x,y,z)) &= N(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \|(\lambda x, \lambda y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |\lambda z| \\ &= |\lambda|\|(x,y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |\lambda||z| \\ &= |\lambda|\left(\|(x,y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z|\right) \\ &= |\lambda| N(x,y,z). \end{aligned}$$

   $iii)$ L'inégalité triangulaire : Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} N((x,y,z) + (x',y',z')) &= N(x+x', y+y', z+z') \\ &= \|(x+x', y+y')\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z+z'| \\ &= \|(x,y) + (x',y')\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z+z'| \\ &\leq \|(x,y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + \|(x',y')\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z| + |z'| \\ &\leq \|(x,y)\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z| + \|(x',y')\|_{\infty,\mathbb{R}^2} + |z'| \\ &\leq N(x,y,z) + N(x',y',z'). \end{aligned}$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} \|(x,y,z)\|_\infty &= \sup(|x|,|y|,|z|) \\ &\leq \sup(|x|,|y|) + |z| \\ &\leq N(x,y,z) \end{aligned}$$

   d'autre part on a

$$\begin{aligned} N(x,y,z) &= \sup(|x|,|y|) + |z| \\ &\leq \sup(|x|,|y|,|z|) + \sup(|x|,|y|,|z|) \\ &\leq 2\|(x,y,z)\|_\infty. \end{aligned}$$

   c'est à dire $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\|(x, y, z)\|_\infty \leq N(x, y, z) \leq 2\|(x, y, z)\|_\infty$. Ce qui signifie que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.1.2

1. Montrons que A n'est pas un ouvert. En effet, le point $(2,0) \in A$ et $\forall \varepsilon > 0$, $B_{\|.\|_1}((2,0),\varepsilon) \nsubseteq A$, car $(2+\frac{\varepsilon}{2},0) \in B_{\|.\|_1}((2,0),\varepsilon)$ et $(2+\frac{\varepsilon}{2},0) \notin A$. Ce qui signifie que A n'est pas un ouvert.
2. Montrons que A est un compact. En effet, on a

$$\begin{array}{rcl} A &=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq |x|+|y| \leq 2\} \\ &=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq \|(x,y)\|_1 \leq 2\} \\ &=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq \|(x,y)\|_1 \text{ et } \|(x,y)\|_1 \leq 2\} \\ &=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq \|(x,y)\|_1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\|(x,y)\|_1 \leq 2\} \\ &=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\|(x,y)\|_1 < 1\}^C \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\|(x,y)\|_1 \leq 2\} \\ &=& B((0,0),1)^C_{\|.\|_1} \cap B'((0,0),2)_{\|.\|_1}. \end{array}$$

   On a la boule ouverte $B((0,0),1)_{\|.\|_1}$ est un ouvert, alors son complémentaire $B((0,0),1)^C_{\|.\|_1}$ est un fermé et comme $B'((0,0),1)_{\|.\|_1}$ est la boule fermée alors l'ensemble $A = B((0,0),1)^C_{\|.\|_1} \cap B'((0,0),2)_{\|.\|_1}$ est un fermé.
   D'autre part on a $A = B((0,0),1)^C_{\|.\|_1} \cap B'((0,0),2)_{\|.\|_1} \subset B'((0,0),2)_{\|.\|_1}$, c'est à dire l'ensemble A est borné. Donc A est fermé borné. Par conséquence A est un compact.
3. L'ensemble A est n'est pas un convexe. En effet, les points $a=(-1,0)$ et $b=(1,0)$ sont dans A. Mais le segment $[a,b]$ n'est pas contenu dans A. Puisque $(0,0) = \alpha a + (1-\alpha)b \in [a,b]$, avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $(0,0) \notin A$.

Exercice 2.1.3

1. Soit D_g le domaine de définition de la fonction g. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_g &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 \neq 0 \text{ ou } y^2 \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\right\} \\ &= \mathbb{R}^2 \backslash \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x = 0 \text{ et } y = 0\right\}. \\ &= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

2. Montrons que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$. En effet :
   Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on a g coïncide avec le produit de $(x,y) \longmapsto x^2y^2$ avec la composée entre $t \longmapsto \sin t$ et $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Puisque les trois fonctions sont continues respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors g est continue sur $\mathcal{D}_g$.
   D'autre part on a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |g(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

   Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Ainsi g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Étudions l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. D'abord sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto x^2y^2$, $f_2 = \sin$ et $f_3 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Comme f_1 est un polynôme et f_3 est une fraction rationnelle admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Au point $(x,y) = (0,0)$, nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

4. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle : - Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto x^2y^2$, $f_2 = \sin$ et $f_3 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}$ sont des fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} df_{(x,y)}(h_1,h_2) &= \left(2xy^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_1 \\ &+ \left(2x^2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_2. \end{aligned}$$

- Pour la différentiabilité de f en $(0,0)$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|_2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{r^2}} \text{ avec } x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta). \\ &= \lim_{r\to 0} r^3\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

Alors f est différentiable en $(0,0)$ et on a $df_{(0,0)}(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$. En résumant ce qui précède, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout

$h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$

$$df_{(x,y)}(h)=\begin{cases}\left(\begin{array}{c}\left(2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_1\\ +\left(2x^2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot h_2\end{array}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

5. Déterminons maintenant le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la question 3 on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme l'application $(x,y)\mapsto 2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors il suffit d'étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Posons $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}2xy^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\ &= \lim_{r\to0}2r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)-\frac{2r^5\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2}{r^4}\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)\\ &= \lim_{r\to0}2r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)-2r\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)\\ &=0\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. On déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De la même façon nous montrons que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}2x^2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\ &= \lim_{r\to0}2r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)-\frac{2r^5\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3}{r^4}\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)\\ &= \lim_{r\to0}2r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)-2r\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)\\ &=0\\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

6. Posons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$h(x,y,z)=x-f(z,y),$$

puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors h est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.
D'autre part

$$\begin{array}{rcl} h\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) & = & \frac{1}{\pi^2} - f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \\ & = & \frac{1}{\pi^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2}\right) \\ & = & \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ & = & \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \\ & = & 0 \end{array}$$

et on a aussi pout tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$,

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial z}(x - f(z, y)) \\ & = & -\frac{\partial f}{\partial z}(z, y) \\ & = & -2zy^2 \sin\left(\frac{1}{z^2 + y^2}\right) + \frac{2z^3y^2}{(z^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{z^2 + y^2}\right) \end{array}$$

c'est à dire $\frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = -2\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}^2} \neq 0$. Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $\left(\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$, un voisinage V de $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et une fonction $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U tels que $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in U$, c'est à dire $x = f(\varphi(x, y), y)$, $\forall (x, y) \in U$.
D'autre par on a

$$\nabla\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}, \ \forall (x, y) \in U,$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & = & -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} = -\dfrac{1 - \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), y)}{-\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), y)} = \dfrac{1 - \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), y)} \\ & = & \dfrac{1 - 2\varphi(x, y)y^2 \sin\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2 + y^2}\right) + \frac{2\varphi(x, y)^3 y^2}{(\varphi(x, y)^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2 + y^2}\right)}{2\varphi(x, y)y^2 \sin\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2 + y^2}\right) - \frac{2\varphi(x, y)^3 y^2}{(\varphi(x, y)^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2 + y^2}\right)} \end{array}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y),y)}{-\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y),y)} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y),y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y),y)}$$

$$= \frac{-2\varphi(x,y)^2 y \sin\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2+y^2}\right) + \dfrac{2\varphi(x,y)^2 y^3}{(\varphi(x,y)^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2+y^2}\right)}{2\varphi(x,y)y^2 \sin\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2+y^2}\right) - \dfrac{2\varphi(x,y)^3 y^2}{(\varphi(x,y)^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{\varphi(x,y)^2+y^2}\right)}$$

2.2 Session de rattrapage (03 mars 2022)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 2.2.1. [5 points]
Soit A la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x < y \leq 1\}.$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ?
2. L'ensemble A est-il fermé ?
3. L'ensemble A est-il borné ?
4. Calculer l'aire de l'ensemble A.

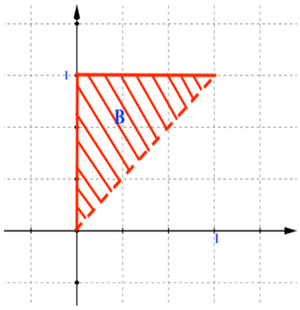
Exercice 2.2.2. [5 points]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$

1. Montrer que f possède deux points critiques.
2. Prouver que f admet un seul extremum local. Est-il global ?

Exercice 2.2.3. [10 points]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. Déduire que la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
5. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer l'intégrale double $I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$
   où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x > 0 \;\text{ et }\; x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Corrigé.

Exercice 2.2.1

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq 1\}.$$

1. La partie A n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$. En effet, le point $(0, 1) \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\|\ \|_\infty}((0, 1), \varepsilon) \nsubseteq A$, puisque $(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}) \in B_{\|\ \|_\infty}((0, 1), \varepsilon)$ et $(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}) \notin A$.
2. A est aussi une partie non fermée de $\mathbb{R}^2$. Il suffit de remarquer que la suite $(0, \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans A qui converge vers $(0, 0)$ (à vérifier), mais la limite $(0, 0) \notin A$. Alors cette partie n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$. Par conséquent A n'est pas compact.
3. Pour tout $(x, y) \in A$ on a $0 \leq x < y \leq 1$, alors $0 \leq |x| < |y| \leq 1$, ce qui implique que $\sup\{|x|, |y|\} \leq 1$, c'est-à-dire, , $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$. D'où l'ensemble A est borné.
4. On a
$$\begin{aligned} A = &\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq 1\} \\ = &\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1 \ \text{ et } \ x < y \leq 1\}. \end{aligned}$$
Alors
$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(A) &= \iint_A 1\, dxdy = \int_0^1 \int_x^1 dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (1 - x)\, dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
D'où
$$\boxed{\mathcal{A}ire(A) = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2.2.2

1. La fonction $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Ainsi
$$df(x, y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + (\ln(y))^2 + y \times 2\ln(y) \times \dfrac{1}{y} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\ln(y))^2 + 2\ln(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y)(\ln(y) + 2) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(y) = 0 \text{ ou } \ln(y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \text{ ou } y = e^{-2} \end{cases}$$
La fonction f possède alors deux points critiques $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$.

2. Pour la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x,y)$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\ln(y)}{y} + \frac{2}{y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x.$$

Alors on a

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \dfrac{2(\ln(y)+1)}{y} \end{pmatrix}.$$

• Pour le point critique $(0, e^{-2})$ on a $\mathcal{H}_f(0,e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{e^{-2}} \end{pmatrix}$. Donc, $\det(\mathcal{H}_f(0,e^{-2}) = 2e^{-2} \times \dfrac{-2}{e^{-2}} = -4 < 0$, d'où f n'admet pas un extremum local en $(0, e^{-2})$, mais seulement elle possède un point selle.

• Pour le point critique $(0,1)$ on a $\mathcal{H}_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $\det(\mathcal{H}_f(0,1)) = 4 > 0$ et puisque $2 > 0$ alors f admet un minimum local en $(0,1)$. Est-il global ? Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f(x,y) - f(0,1) = y(x^2 + (\ln y)^2) - 0 = y(x^2 + (\ln y)^2) \geq 0,$$

ce qui entraine que le minimum $f(0,1) = 0$ est global.

Exercice 2.2.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet :
Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ on a f coïncide avec le produit de $(x,y) \longmapsto x^2$ avec la composée entre $t \longmapsto \sin t$ et $(x,y) \longmapsto \dfrac{y}{x}$. Puisque les trois fonctions sont continues respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
D'autre part, soit $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,b)} |f(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left| x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right| \\ &\leq \lim_{(x,y)\to(0,b)} x^2 = 0. \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = f(0,b)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. D'abord étudions l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto x^2$, $f_2 = \sin$ et $f_3 : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x}$. Comme f_1 est un polynôme et f_3 est une fraction rationnelle admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

Au point $(x,y) = (0,b)$, avec $b \in \mathbb{R}$, nous étudions les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,b) - f(0,b)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{b}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{b}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,b+y) - f(0,b)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0$. D'autre part on a :

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos\left(\frac{0}{x}\right)}{x} = 1.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

3. f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, sinon d'après le lemme de Schwarz on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

ce qui contradiction avec la question 2.

4. D'après la question 2. on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Montrons que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en point $(0,1)$. En effet, les suites de $\mathbb{R}^2$ données par $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{2k\pi}, 1\right)$ et par $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, 1\right)$ convergent vers $(0,1)$. Mais

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi}, 1\right) = 1$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, 1\right) = 0$$

c'est à dire

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi}, 1\right) \neq \lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, 1\right).$$

D'ù $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en point $(0,1)$. Par suite f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

5. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle.
   - $\star$ Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ on a on a $f = f_1 \times (f_2 \circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y) \mapsto x^2$, $f_2 = \sin$ et $f_3 : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x}$, sont des fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ et tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$
   $$df_{(x,y)}\,(h_1,h_2) = \left(2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_1 + \left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_2.$$
   - $\star$ Pour la différentiabilité de f au point $(0,b)$, avec $b\in\mathbb{R}$, nous étudions la limite suivante :
   $$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,b)} |\varepsilon\,(x,y)\,| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{f\,(x,y+b) - f\,(0,b) - \frac{\partial f}{\partial x}\,(0,b)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}\,(0,b)\,y}{\|\,(x,y)\,\|_2}\right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left|\frac{x^2\sin\left(\dfrac{y+b}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\ &\le \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,b)} |x| \\ &= 0\end{aligned}$$

   Alors f est différentiable en $(0,b)$ et on a $df_{(0,b)}\,(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(0,0)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\,(0,0)\,h_2 = 0$.

   En résumant ce qui précède, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et la différentielle de f est donnée par
   $$\begin{aligned} df :\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ (x,y) &\longmapsto df(x,y),\end{aligned}$$
   avec
   $$\begin{aligned} df(x,y) :\quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) &\longmapsto df(x,y)(h_1,h_2) = <\nabla f(x,y)|(h_1,h_2)> = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,h_2,\end{aligned}$$
   et on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et tout $h = (h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$
   $$df_{(x,y)}\,(h) = \begin{cases} \left(2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_1 + \left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot h_2 & \text{si } x\neq 0, \\ \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
6. On a $(x,y)\in\Delta \Leftrightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x>0$ et $x^2+y^2\le 1 \Leftrightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x>0$ et $x^2+(-y)^2\le 1 \Leftrightarrow (x,-y)\in\Delta$.

   Pour la fonction $f(x,y) = x^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)$, on a $f(x,-y) = x^2\sin\left(\frac{-y}{x}\right) = -f(x,y)$. Alors, par le changement de variables via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v) = (u,-v) = (x,y)$, on a
   $$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_\Delta f\circ\varphi(u,v)\ |\det(\mathcal{J}_\varphi(u,v))|\,dudv = \iint_\Delta f(u,-v)\,|-1|dudv \\ &= \iint_\Delta -f(u,v)\,dudv = -\iint_\Delta f(u,v)\,dudv = -I.\end{aligned}$$
   D'où $I = 0$.

2.3 Session normale MONE (13 juin 2022)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 2.3.1. [5 points]

1. Donner la définition de chacun des mots soulignés suivants :
   a) Une norme sur $\mathbb{R}^n$.
   b) Un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
   c) Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$.
2. Soit $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les deux suites réelles $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b.

Exercice 2.3.2. [5 points]
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x + y \leq 1\}.$$

1. L'ensemble A est-il compact ?
2. L'ensemble A est-il convexe ?
3. On pose $D = A \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Calculer l'aire de la partie D.

Exercice 2.3.3. [10 points]
Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence et calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que f est homogène en précisant son degré α. Rappelons qu'une fonction $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si

$$h(t\,x_1, t\,x_2, \ldots, t\,x_n) = t^\alpha\, h(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \forall t > 0.$$

6. Établir la relation d'Euler suivante : $x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\, f$.

Corrigé.
Exercice 2.3.1

1. **a)** Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est application N de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :
   i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad N(x) = 0 \iff x = 0$ (Séparation) ;
   ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda\, x) = |\lambda|\, N(x)$ (Condition d'homogénéité) ;
   iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire).

1. MONE : Module ouvert non enseigné

b) On dit qu'une partie θ de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si elle est vide ou si pour tout $a \in \theta$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \theta$.

c) Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une forme linéaire v sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$f(a+h) = f(a) + v(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Autrement dit : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - v(h)}{\|h\|} = 0.$

2. Soit $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\lim_{k\to\infty} \|(x_k, y_k) - (a,b)\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|(x_k - a, y_k - b)\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \sup(|x_k - a|, |y_k - b|) = 0.$$

Ce qui implique que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - a| = 0$ et $\lim\limits_{k\to\infty} |y_k - b| = 0$, c'est-à-dire, , les deux suites réelles $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b.
Autrement, $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow (a,b)$ dans $\mathbb{R}^2$ quand k tend vers ∞ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N \text{ on a } \|(x_k, y_k) - (a,b)\|_\infty < \varepsilon,$$

si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N \text{ on a } \sup(|x_k - a|, |y_k - b|) < \varepsilon,$$

si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N \text{ on a } |x_k - a| < \varepsilon \text{ et } |y_k - a| < \varepsilon,$$

si, et seulement si, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow a$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow b$ dans $\mathbb{R}$ quand k tend vers ∞.

Exercice 2.3.2 Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x + y \leq 1\}.$$

1. Remarquons que $(\frac{1}{n}, 0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans A qui converge vers $(0,0)$ (à vérifier), mais la limite $(0,0) \notin A$. Alors cette partie n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$. Ce qui entraine que la partie A n'est pas compacte.
2. L'ensemble A est convexe. En effet, soient (x,y), $(x',y') \in A$, et $\alpha \in [0,1]$, on a

$$\alpha(x,y) + (1-\alpha)(x',y') = (\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha y + (1-\alpha)y').$$

Comme $\Big(\alpha x + (1-\alpha)x'\Big) + \Big(\alpha y + (1-\alpha)y'\Big) = \alpha\Big(x+y\Big) + (1-\alpha)\Big(x'+y'\Big)$, avec $0 < x+y \leq 1$ et $0 < x'+y' \leq 1$, alors $0 < \alpha(x+y) \leq \alpha$ et $0 < (1-\alpha)(x'+y') \leq 1-\alpha$. Donc $0 < \alpha\Big(x+y\Big) + (1-\alpha)\Big(x'+y'\Big) \leq \alpha + 1 - \alpha$, c'est-à-dire, , $0 < \Big(\alpha x + (1-\alpha)x'\Big) + \Big(\alpha y + (1-\alpha)y'\Big) \leq 1$. Ce qui implique que $\alpha(x,y) + (1-\alpha)(x',y') \in A$, d'où A est convexe.
3. On pose $D = A \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, calculons l'aire de la partie D. On a

$$\begin{aligned} D = &\ A \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \\ = &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x + y \leq 1\} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \\ = &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{ et } \ 0 < x + y \leq 1\} \\ = &\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq 1 - x\} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ire(D) &= \iint_D 1\,dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x} dy\right)dx\\ &= \int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{A}ire(D) = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2.3.3

1. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ on a f coïncide avec le produit de $(x,y)\longmapsto x^2$ avec la composée entre $t\longmapsto \exp(t)$ et $(x,y)\longmapsto -\dfrac{y^2}{x^2}$. Puisque les trois fonctions sont continues respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$.
   D'autre part, soit $b\in\mathbb{R}$, on a
   $$\lim_{(x,y)\to(0,b)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left|x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}}\right| = 0.$$
   Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = f(0,b)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, on a $f = f_1\times(f_2\circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y)\mapsto x^2$, $f_2 = \exp$ et $f_3 : (x,y)\mapsto -\dfrac{y^2}{x^2}$. Comme f_1 est un polynôme et f_3 est une fraction rationnelle admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet des dérivées partielles premières par rapport aux variables x et y et on a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$$
   et
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$$
   Au point $(x,y)=(0,b)$, avec $b\in\mathbb{R}$, nous étudions les limites suivantes :
   $$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\exp\left(-\frac{b^2}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to0} x\exp\left(-\frac{b^2}{x^2}\right) = 0\\ &\lim_{y\to0}\frac{f(0,b+y)-f(0,b)}{y-0} = \lim_{y\to0}\frac{0}{y} = 0.\end{aligned}$$
   Ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0$.
3. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle :
   - Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ on a on a $f = f_1\times(f_2\circ f_3)$ avec $f_1 : (x,y)\mapsto x^2, f_2 = \exp$ et $f_3 : (x,y)\mapsto -\dfrac{y^2}{x^2}$, sont des fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ et on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$
   $$\begin{aligned}df_{(x,y)}(h_1,h_2) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h_1 + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,h_2\\ &= \left[2x\exp\left(-\tfrac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\tfrac{y^2}{x}\exp\left(-\tfrac{y^2}{x^2}\right)\right]\cdot h_1 - 2\,y\exp\left(-\tfrac{y^2}{x^2}\right)\cdot h_2.\end{aligned}$$

- Pour la différentiabilité de f au point $(0,b)$, avec $b\in\mathbb{R}$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,b)} |\varepsilon(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y+b)-f(0,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,b)\,y}{\|(x,y)\|_2} \right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left| \frac{x^2\exp\left(-\frac{(y+b)^2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\
&\leq \lim_{(x,y)\to(0,b)} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} \right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,b)} |x| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors f est différentiable en $(0,b)$ et on a $df_{(0,b)}(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,h_2=0$. En résumant ce qui précède, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$

$$df_{(x,y)}(h)=\begin{cases}\left[2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right]\cdot h_1-2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot h_2 & \text{si } x\neq 0;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4. D'après la question 3 on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme l'application $(x,y)\mapsto 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$, alors il suffit d'Étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,b)$, $\forall b\in\mathbb{R}$. Remarquons d'abord que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=0$, $\forall b\in\mathbb{R}$. Pour le deuxième terme,

⋆ Si $b\neq 0$: On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} \frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} x\,\frac{y^2}{x^2}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=0$.

⋆ Si $b=0$: Posons $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} x\,\frac{y^2}{x^2}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) \\
&= \lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\notin\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}}} r\,\cos\theta\,\tan^2\theta\,\exp(-\tan^2\theta) \\
&= 0 \ (\text{ car } \cos\theta\,\tan^2\theta\,\exp(-\tan^2\theta) \text{ est borné}).
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} 2x\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\,\frac{y^2}{x}\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, c'est-à-dire, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,b)$, $\forall b\in\mathbb{R}$. On déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on a $(x,y)\mapsto -2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$. Au point $(0,b)$ avec $b\in\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,b)} -2\,y\exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\overset{\text{"à justifier"}}{=}0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ce qui entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Pour tout $t > 0$, on a $f(t\,x, t\,y) = (t\,x)^2 \exp\left(-\frac{(t\,y)^2}{(t\,x)^2}\right) = t^2 f(x,y)$, si $x \neq 0$ et $f(t \times 0, t\,y) = f(0, t\,y) = 0 = t^2 \times 0 = t^2 f(0,y)$, si $x = 0$. Alors

$$f(t\,x, t\,y) = t^2 f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t > 0.$$

C'est-à-dire, f est une fonction homogène de degré 2.

6. D'abord si $x = 0$, alors $0 \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0 \times 0 + y \times 0 = 0 = 2 \times f(0,y)$.
Maintenant si $x \neq 0$, alors

$$\begin{array}{rcl} x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x \times \left(2x \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2\,\frac{y^2}{x} \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right) + y \times -2\,y \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) \\ & = & 2x^2 \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + 2y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) - 2y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) \\ & = & 2\,f(x,y). \end{array}$$

Chapitre 3

Année universitaire 2020-2021

3.1 Session normale (02 mars 2021)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 3.1.1. [6 points]
Soient $a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions de plusieurs variables et A un ensemble de $\mathbb{R}^n$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies $\boxed{\text{V}}$ ou fausses $\boxed{\text{F}}$.

1. $\square$ Si A est ouvert, alors son complémentaire A^C est non ouvert.
2. $\square$ Si $(x_k)_k$ est une suite de A qui converge vers x, alors $x \in A$.
3. $\square$ Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$.
4. $\square$ Si toutes les dérivées partielles premières existent en a, alors f est différentiable en a.
5. $\square$ Si g est différentiable en a, alors la Jacobienne $\mathcal{J}_g(a)$ existe.
6. $\square$ Si la Jacobienne $\mathcal{J}_g(a)$ existe, alors g est continue en a.

Exercice 3.1.2. [14 points] Justifier toutes les réponses.

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (1,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases}$

1. Quel est le domaine de définition de f.
2. **Étude de la fonction f sur** $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$:
   - 2.1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$.
   - 2.2. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$.
   - 2.3. Déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$.
   - 2.4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$?
3. **Étude de la fonction f en** $(1,0)$:
   - 3.1. Étudier la continuité de f en $(1,0)$, (Indication : Poser $t = x - 1$).
   - 3.2. Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f en $(1,0)$.
   - 3.3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$.

3.4. Quel est le plus grand ouvert sur le quel f est de classe $\mathcal{C}^1$?

4. Calculer l'intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} y f(x,y)\,dxdy$, où

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 0 \ \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\}.$$

***Corrigé*.**

Exercice 3.1.1

1. F, 2. F, 3. V,
4. F, 5. V, 6. F.

Exercice 3.1.2

1. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x,y) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
2. **Étude de la fonction f sur** $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$:
   2.1. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, la fonction f est une fraction rationnelle, alors elle est continue en tout point où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$.
   2.2. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, la fonction f est une fraction rationnelle, alors elle admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^2\left[\frac{(x-1)^2+y^2-(x-1)\times 2(x-1)}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}\right] \\
&= \frac{y^4-y^2(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}. \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (x-1)\,\frac{2y\left((x-1)^2+y^2\right)-y^2\times 2\,y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} \\
&= \frac{2y(x-1)^3}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

   2.3. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont des fractions rationnelles, alors elles sont continues en tout point où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$. Par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$.
   2.4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$.
3. **Étude de la fonction f en** $(1,0)$:
   3.1. En posant $t = x-1$, on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(t,y)\to(0,0)} \frac{t\,y^2}{t^2+y^2}.$$

   Or $y^2 \leq t^2+y^2$, $\forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\left|\dfrac{t\,y^2}{t^2+y^2}\right| \leq |t|$. Ce qui implique que $\displaystyle\lim_{(t,y)\to(0,0)} \left|\frac{t\,y^2}{t^2+y^2}\right| = 0$. Par conséquence, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0 = f(1,0)$, c'est-à-dire, f est continue en $(1,0)$.
   3.2. On a $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{0-0}{x-1} = 0$. Alors f possède une dérivée partielle première en $(1,0)$ par rapport à la première variable x et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$. De

même, $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y-0} = 0$. Alors f possède une dérivée partielle première en $(1,0)$ par rapport à la deuxième variable y et on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$.

3.3. Pour étudier la différentiabilité de f en $(1,0)$, on calcule la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(1+x,y)-f(1,0)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)y\right)}{\|(x,y)\|_2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ x=y>0}} \varepsilon(x,y) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3}{(2\,x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(1,0)$.

3.4. La fonction f n'est pas différentiable en $(1,0)$, alors elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et d'après la question 2.3, $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ est le plus grand ouvert sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

4. On pose $g(x,y) = y\,f(x,y)$. Remarquons que pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}\backslash\{(1,0)\}$, on a $g(x,-y) = -y\,f(x,-y) = -y\,\dfrac{(x-1)(-y)^2}{(x-1)^2+(-y)^2} = -y\,f(x,y) = -g(x,y)$ et $(x,y)\in\mathcal{D}$ si, et seulement si, $(x,-y)\in\mathcal{D}$. Alors en effectuant un changement de variables via l'application injective $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v)=(u,-v)=(x,y)$ on a $\mathcal{D}=\varphi(\mathcal{D})$ et $\mathcal{J}_\varphi(u,v)=-1$. Alors

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dxdy = \iint_{\varphi(\mathcal{D})} g(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{D}} g\circ\varphi(u,v)|\mathcal{J}_\varphi(u,v)|\,dudv \\
&= \iint_{\mathcal{D}} g(u,-v)\,dudv = -\iint_{\mathcal{D}} g(u,v)\,dudv = -I.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $I=0$.

3.2 Session de rattrapage (11 mars 2021)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 3.2.1. Soient $a\in\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n, x\longmapsto(g_1(x),\cdots,g_n(x))$ deux fonctions de plusieurs variables et A un ensemble de $\mathbb{R}^n$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies $\boxed{\text{V}}$ ou fausses $\boxed{\text{F}}$. (Bonne réponse≈ 1, Mauvaise réponse≈ -1 et absence de réponse≈ 0)

1. $\square$ Si A est borné, alors A est compact.
2. $\square$ Si A est compact et $(x_k)_k$ est une suite de A, alors la suite $(x_k)_k$ converge vers x et $x\in A$.
3. $\square$ Si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$.
4. $\square$ Si f et g sont différentiables, alors $f\circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en $t\in\mathbb{R}$ et

$$(f\circ g)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))g_i'(t)$$

.

5. ☐ Si g_1 est différentiable en a, alors g est aussi différentiable.
6. ☐ Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et α et β sont les deux valeurs propres de la matrice hessienne de f en a telles que $\alpha\beta < 0$, alors f admet un maximum local en a.
7. ☐ Si $n = 2$ et $f(x,y) = e^{x-y}\,(x^2 - 2y^2)$, alors le gradient

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right), e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - y\right)\right)$$

Exercice 3.2.2. Justifier toutes les réponses.
Soit f la fonction définie par $f(x,y) = xy^2$.

1. Montrer que la fonction f possède une infinité de points critiques.
2. Déterminer les extremums de f. Sont-ils globaux ?
3. Montrer que la condition $f(x,y) = \sin(xy)$ définit y comme fonction de x au voisinage de $(1,0)$.
4. Calculer l'intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy$, où

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0, y \geq 0 \ \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

***Corrigé*.**

Exercice 3.2.1

1. F,	2. F,	3, F,	4. V,
5. F,	6. F,	7. F.	

Exercice 3.2.2

1. (x,y) est un point critique de f si, et seulement si, $\nabla(f) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (0,0)$.
   C'est-à-dire, (x,y) est la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & 2\,x\,y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = & 0 \\ y = & 0 \ \text{ ou } \ x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ y = 0.$$

   Ce qui entraine que f admet une infinité de points critiques qui constituent la droite $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0\}$.
2. Déterminons d'abord la matrice Hessienne de f en chaque point (x,y). On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\,x \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2\,y.$$

   Alors $\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{pmatrix}$, d'où $\det \mathcal{H}_f(x,y) = -4\,y^2$. En particulier pour chaque point critique $(a,0)$ on a $\det \mathcal{H}_f(a,0) = 0$, donc on ne peut conclure a priori. Essayons d'étudier si la différence $f(x,y) - f(a,0)$ change de signe ou non au voisinage de $(a,0)$. Pour tout $(a,0) \in \Delta$, on a $f(x,y) - f(a,0) = x\,y^2$.
   ★ Si $a > 0$, il existe $r > 0$ tel que $x\,y^2 \geq 0$, $\forall (x,y) \in]a-r, a+r[\times]-r, r[$, c'est-à-dire, $f(x,y) - f(a,0) \geq 0$, $\forall (x,y) \in B_{\|\ \|_\infty}((a,0), r)$. Ce qui signifie que f possède un minimum local en $(a,0)$.
   ★ Si $a < 0$, il existe $r > 0$ tel que $x\,y^2 \leq 0$, $\forall (x,y) \in]a-r, a+r[\times]-r, r[$, c'est-à-dire,

$f(x,y)-f(a,0)\leq 0,\ \forall (x,y)\in B_{\|\ \|_\infty}((a,0),r)$. Ce qui signifie que f admet un maximum local en $(a,0)$.

★ Si $a=0$. Pour tout $\varepsilon>0$, sur la boule $B_{\|\ \|_\infty}((0,0),\varepsilon)$ et suivant le chemin $x=y$, on a $f(x,y)-f(0,0)=f(x,x)=x^3$ qui change de signe selon x. Ce qui signifie que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

Lorsque f possède des extremums locaux en $(a,0)$ avec $a\neq 0$, on a $f(a,0)=0$. Or $f(1,2)=4>f(a,0)$ et $f(-1,-2)=-4<f(a,0)$, alors ces extremums ne sont pas globaux.

3. On pose $g(x,y)=f(x,y)-\sin(xy)=x\,y^2-\sin(xy)$, qui de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2\,x\,y-x\,\cos(xy)$. donc $g(1,0)=0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)=-1\neq 0$. Le Théorème des fonctions implicites entraine alors qu'il existe un voisinage U de 1, un voisinage V de 0 et une fonction implicite $\varphi: U\longleftarrow V$ de classe $\mathcal{C}^\infty(U)$ tels que

   i) $U\times V\subset\mathbb{R}^2$ et $\varphi(1)=0$;

   ii) Pour tout $x\in U$, on a $g(x,y)=0\Longleftrightarrow y=\varphi(x)$. C'est-à-dire, la condition $f(x,y)=\sin(x\,y)$ définit y comme fonction de x au voisinage de $(1,0)$.

   iii) $\varphi'(x)=-\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))},\quad \forall x\in U.$

4. Calculons l'intégrale double $I=\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy=\iint_{\mathcal{D}} x\,y^2\,dxdy$ où $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geq 0, y\geq 0\ \text{ et } x^2+y^2\leq 1\}$. En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ définie par

$$\begin{array}{rcl}\psi:\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (r,\theta) & \longmapsto & \psi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)=(x,y)\end{array}$$

on a $\mathcal{J}_\psi(r,\theta)=r$ et $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geq 0, y\geq 0\ \text{ et } x^2+y^2\leq 1\}=\psi(\mathcal{D}')$, où

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{D}' &=& \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ /\ r\cos\theta\geq 0,\ r\sin\theta\geq 0\ \text{ et }\ r^2\leq 1\}\\ &=& \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ /\ \cos\theta\geq 0,\ \sin\theta\geq 0\ \text{ et }\ 0<r\leq 1\}\\ &=& \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\ /\ 0<r\leq 1\ \text{ et }\ 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\}.\end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}I &=& \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy=\iint_{\psi(\mathcal{D}')} x\,y^2\,dxdy\\ &=& \displaystyle\iint_{\psi(\mathcal{D}')} r\,\cos\theta\,r^2\,\sin^2\theta\,r\,drd\theta\\ &=& \displaystyle\int_0^1 r^4\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\sin^2\theta\,d\theta\\ &=& \displaystyle\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\times\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}.\end{array}$$

3.3 Session de rattrapage MONE (06 juillet 2021)

N.B : Toutes les réponses devront être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 3.3.1. Soient $a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, x \longmapsto (g_1(x), \cdots, g_p(x))$ deux fonctions de plusieurs variables et A un ensemble de $\mathbb{R}^n$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies $\boxed{\text{V}}$ ou fausses $\boxed{\text{F}}$. (Bonne réponse$\approx$ 1, Mauvaise réponse≈ -1 et absence de réponse$\approx$ 0)

1. $\boxed{}$ Si toute suite $(x_k)_k$ de A possède une sous-suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, alors la partie A est compacte dans $\mathbb{R}^n$.
2. $\boxed{}$ Si f est continue en a, alors elle possède en a les dérivées partielles par rapport à toutes les variables.
3. $\boxed{}$ Si f n'est pas différentiable en a, alors elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout ouvert contenant a.
4. $\boxed{}$ Si toutes les g_i $(i \in \{1, \dots, p\})$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors g est différentiable sur cet ouvert.

Exercice 3.3.2. Soit g la fonction définie par $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$.
4. Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.
5. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
6. On pose $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dxdy$ avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x-2| + |y| - 1 \leq 0\}$.
   6.1. Montrer que $\mathcal{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
   6.2. Calculer I.

Chapitre 4

Année universitaire 2019-2020

4.1 Session normale (13 Janvier 2020)

N.B : Toutes les réponses devront être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 4.1.1. [6.5 points=1+1+1+0.5+1+1+1]Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. 1.1. Donner la définition d'un **voisinage** d'un point $a \in \mathbb{R}^n$.

   1.2. Montrer que l'intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.
2. Montrer que l'ensemble $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e^x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-il compact ?
3. 3.1. Donner la définition de **la différentiabilité** d'une fonction numérique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathbb{R}^n$.

   3.2. En utilisant cette définition, prouver que la fonction réelle d'une seule variable $f : x \mapsto \sin x$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ et donner sa différentielle en a.
4. Donner la définition d'un **point critique** d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exercice 4.1.2. [9.5 points=0.5+1+2+1.5+1+1+0.5+1+1]
Soit g la fonction définie par $g(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (Indication : Pour tout $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\alpha \ln t = 0$.)
3. Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Etudier la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle lorsqu'elle existe.
5. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.
6. 6.1. Montrer que l'égalité $f(x, y) = 0$ définit implicitement y comme fonction de x au voisinage de $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

6.2. Donner un développement limité à l'ordre 1 de cette fonction au voisinage de $\frac{1}{2}$.

7. 7.1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$ est convexe.

   7.2. Calculer l'intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dxdy$.

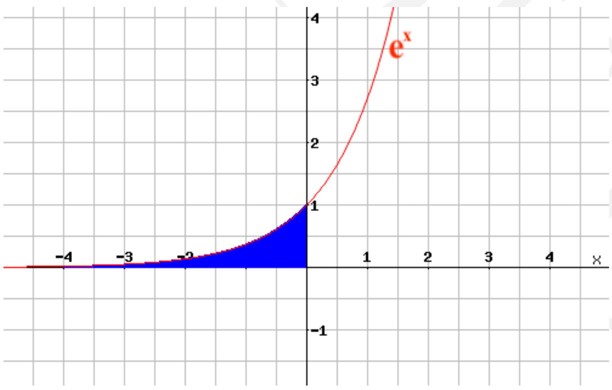
Exercice 4.1.3. [3 points=1+1+1]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2(y^2 + e^x)$.

1. Montrer que (a, b) est un point critique de f si, et seulement si, $(a, b) \in \{0\} \times \mathbb{R} \cup \{(-2, 0)\}$.
2. Soit (a, b) un point critique de f.
   2.1. Si $(a, b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$, vérifier que f admet un minimum global en (a, b).
   2.2. Si $(a, b) = (-2, 0)$, la fonction f possède-elle un extremum en (-2.0)?

***Corrigé*.**
Exercice 4.1.1

1. 1.1. Définition d'un **voisinage** d'un point $a \in \mathbb{R}^n$: On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}^n$ est un voisinage de a si V contient une boule de centre a.

   1.2. Montrons que l'intersection finie de voisinages de a est aussi un voisinage de a : Soient $V_1, V_2, \ldots, V_k$, des voisinages de a, alors il existe $r_i > 0$ avec $i = 1, 2, \ldots, k$ tels que $\mathcal{B}(a, r_i) \subset V_i$ **(1)**. Comme l'ensemble $\{i = 1, 2, \cdots k\}$ est fini, alors si on pose $r = \min\{r_i \,|\, i = 1, 2, \ldots, k\}$, on trouve que $r > 0$. Or $r \leq r_i$, $\forall i \in \{i = 1, 2, \ldots, k\}$, ce qui implique que $\mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{B}(a, r_i)$, ainsi avec **(1)**, on a $\mathcal{B}(a, r) \subset V_i$ $\forall i \in \{i = 1, 2, \ldots, k\}$, donc $\mathcal{B}(a, r) \subset \cap_{i=1}^{i=k} V_i$. D'où l'intersection $\cap_{i=1}^{i=k} V_i$ est un voisinage de a.
2. Montrons que l'ensemble $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e^x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$: Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Δqui converge vers ℓ. alors $W_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n \leq 0$ et $0 \leq y_n \leq e^{x_n}$ **(2)**, $\ell = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim(x_n) = x$ et $\lim(y_n) = y$. Par passage à la limite dans **(2)**, on trouve que $x \leq 0$ et $0 \leq y \leq e^x$, c'est-àdire que $\ell = (x, y) \in \Delta$. On conclut alors que Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   La présentation graphique suivante de Δ, montre que Δ est non borné.



   Sinon, alors il existe un $r > 0$ tel que $\Delta \subset \mathcal{B}_{\|\,\|_\infty}((0, 0), r)$. Comme $r > -2$, alors $-r - 1 < 1 = e0$, donc $(0, -r - 1) \in \Delta$, ce qui donne que c $(0, -r - 1) \in \mathcal{B}_{\|\,\|_\infty}((0, 0), r)$, c'est-à-dire que $\|(0, -r - 1)\|_\infty = r + 1 < r$. Absurde. Alors Δ est non compact.
3. 3.1. Définition de **la différentiabilité** d'une fonction numérique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathbb{R}^n$: On dit que f est différentiable en a, s'il existe une forme linéaire L sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

3.2. D'après le développement limité de la fonction $h \mapsto \sin(a+h)$ en 0, on a

$$\sin(a+h) = \sin(a) + h\cos(a) + \|h\|\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Il suffit de poser $L(h) = h\cos(a)$, donc L est forme linéaire sur $\mathbb{R}$. Par suite la fonction sin est différentiable sur $\mathbb{R}$.

4. On dit que x_0 est un **point critique** d'une fonction numérique différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $df(x_0) = 0$.

Exercice 4.1.2

Soit g la fonction définie par $g(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

1. Soit D_g le domainde de définition de la fonction g. Alors $(x,y) \in D_g$ si et seulement si $x^2+y^2 > 0$, c'est équivalent à $(x,y) \neq (0,0)$. D'où $D_g = \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$.
2. Montrons que g possède un prolongement par continuité : on a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} |g(x,y)| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)\\
&= \lim_{r\to 0} |r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r^2)| \text{ avec } x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta)\\
&= \lim_{r\to 0} |2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r)|\\
&\leq \lim_{r\to 0} |2r^2\ln(r)| = \underbrace{|\lim_{r\to 0} 2r^2\ln(r)|}_{=0}, \text{ car } |\cos(\theta)\sin(\theta)| \leq 1.
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Ainsi g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3. Étudions l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$: Soient $y \in \mathbb{R}$ et $f_y : x \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$ la première fonction partielle de f. Comme $f_y = f_1 \times f_2 \circ f_3$ avec $f_1 : x \mapsto xy$, $f_2 : t \mapsto \ln(t)$ et $f_3 : x \mapsto x^2+y^2$ sont des fonctions dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}$ et $f_3(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^{+*}$, alors f_y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}$ si $y \neq 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$. De plus on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) &= y\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}\\
&= y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

De même si $(x,y) \neq (0,0)$, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}\\
&= x\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

si $(x,y) = (0,0)$, nous étudions les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0\\
\lim_{x\to 0}\frac{f(0,x)-f(0,0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

4. Étudions la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et donnons sa différentielle :
   • Sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ on a $f = f_4 \times f_5 \circ f_6$ avec $f_4 : (x,y) \mapsto xy$, $f_5 : t \mapsto \ln(t)$ et $f_6 : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont des fonctions différentiable respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^2$; et puisque $f_6(\mathbb{R}^2\backslash(0,0)) \subset \mathbb{R}^{+*}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$.
   • Si $(x,y) = (0,0)$, nous étudions la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|_2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r^2)}{\sqrt{r^2}} \text{ avec } x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta). \\
&= \lim_{r\to 0} 2r\cos(\theta)\sin(\theta)\ln(r) = 0,
\end{aligned}$$

car la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)\sin(\theta)$ est bornée et $\lim\limits_{r\to 0} r\ln(r) = 0$. Alors f est différentiable en $(0,0)$. En résumant ce qui précède, nous trouvons que pour tout $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $df_{(x,y)}(h) =$

$$\begin{cases} y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} \cdot h_1 + x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2x}{x^2+y^2} \cdot h_2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Déterminons le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$: D'après la question 3 on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme l'application $(x,y) \mapsto y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors il suffit d'étudier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Posons $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{r\to 0} r\sin(\theta)\ln(r^2) + \frac{2(r\cos(\theta))^2 r\sin(\theta)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} 2r\sin(\theta)\ln(r) + 2r\cos(\theta))^2\sin(\theta) \\
&= 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),
\end{aligned}$$

car les fonctions $\theta \mapsto \cos(\theta)^2\sin(\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(\theta)$ sont bornées, $\lim\limits_{r\to 0} r = 0$ et $\lim\limits_{r\to 0} r\ln(r) = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. On Déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De la même façon nous montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Ce qui entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

6. 6.1. Montrons que l'égalité $f(x,y) = 0$ définit implicitement y comme fonction de x au voisinage de $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$: On a f est de classe $\mathcal{C}^k$ et $f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\ln(1) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{3}{4} \neq 0$, alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $\mathcal{I}$ de $\frac{1}{2}$ et un voisinage $\mathcal{J}$ de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et une fonction implicite $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que
   - $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
   - $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)\, \forall\, x \in \mathcal{I}$;
   - $\forall\, x \in \mathcal{I}$ on $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$.

   6.2. Donnons le développement limité à l'ordre 1 de φ au voisinage de $\frac{1}{2}$: Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\varphi(x) = \varphi(\frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})\varphi'(\frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})\varepsilon(x).$$

Avec $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \varepsilon(x) = 0$. Or on a $\varphi'(\frac{1}{2}) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})} = -\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{3}{4}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D'où

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})\varepsilon(x).$$

Avec $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \varepsilon(x) = 0$

7. 7.1. Montrons que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$ est convexe : on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x,y)\|_2 \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0\} \\
&= \mathcal{B}_{\|\cdot\|_2}((0,0),1) \cap \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0\}}_{:=\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

Soient $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux éléments de $\mathcal{D}$, alors $a, b \in \mathcal{B}_{\|\cdot\|_2}((0,0),1)$ et $a, b \in \mathcal{C}$. Comme les boules fermés sont convexes, donc pour montrer que $\mathcal{D}$ est convexe, il suffit de prouver que $[a,b] \subset \mathcal{C}$. Soit $z = (z_1, z_2) \in [a,b]$, alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $z = ta + (1-t)b$, ainsi $z_2 = ta + (1-t)b_2$, or t, $1-t$, a_2 et b_2 sont des nombres positive, d'où $z_2 \geq 0$, par suite $z \in \mathcal{C}$. C'est-à-dire que $[a,b] \subset \mathcal{C}$.

7.2. Calculons l'intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy$: On utilise le changement de variables $x = u$ et $y = -v$. La matrice jacobienne de ce changement de variables est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant jacobien vaut donc -1. Comme $(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow (u,v) \in \mathcal{D}$ et on a par la formule du changement de variables :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{D}} f(u,-v)\,dudv.$$

Or $f(u,-v) = -f(u,v)$, donc

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(u,-v)\,dudv = -\iint_{\mathcal{D}} f(u,v)\,dudv = -I.$$

Ce qui donne que $2I = 0$, par suite $I = 0$. Nous pouvons aussi utiliser les cordonnées polaires pour montrer que $I = 0$

Exercice 4.1.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2(y^2 + e^x)$.

1. (a,b) est un point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(b^2 + e^a) + a^2 e^a = 0 \\ a^2 \times 2b = 0. \end{cases}$$

C'équivalent à

$$\begin{cases} 2a(b^2 + e^a) + a^2 e^a = 0 \\ a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ 2ae^a + a^2 e^a = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ 2a + a^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R} \text{ ou } (a,b) = (-2,0).$$

2. Soit (a,b) un point critique de f.

2.1. Si $(a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$,, alors $f(a,b) = 0$. Or $f(x,y) = x^2(y^2 + e^x) \geq 0 = f(a,b)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc f admet un minimum global en (a,b).

2.2. Si $(a,b) = (-2,0)$. On a

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2x+2)(y^2 + e^x) + (x^2 + 2x)e^x$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xy$. Alors

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2x+2)(y^2 + e^x) + (x^2 + 2x)e^x & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que $\det H_f(-2,0) = \begin{vmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16e^{-2} < 0$, donc la fonction f ne possède pas d'extremum en $(-2,0)$, mais seulement un point selle.

4.2 Session de rattrapage (17 février 2020)

N.B : Toutes les réponses devront être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 4.2.1. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Énoncer le Théorème de Schwarz.
2. Déterminer si l'ensemble suivant est ouvert ou fermé :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}.$$

Exercice 4.2.2. Soit g la fonction définie par $g(x, y) = x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g possède un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
5. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Chapitre 5

Année universitaire 2018-2019

5.1 Session normale (07 Janvier 2019)

N.B : Toutes les réponses devront être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 5.1.1.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$
2. Soit $\mathcal{B}(a, r)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. Prouver que $\mathcal{B}(a, r)$ est un ouvert convexe.
3. Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est fonction définie sur un ouvert $\mathcal{D}$ par $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $l = (l_1, l_2, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f_j(x) = l_j \ \forall j \in \{1, \dots, p\}$.
4. Énoncer le théorème des fonctions implicites pour une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.1.2. Soient $m \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en chaque point de $\mathcal{D}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. Justifier pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathcal{D}$?
5. Dans cette question, nous étudions f en $(0, 0)$.
   5.1. Étudier suivant m la continuité de f en $(0, 0)$.
   5.2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0, 0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
   5.3. Pour quelles valeurs de m, f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

5.4. Selon les valeurs de m, déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

6. Pour $m = 0$, on considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (t, -t)$. Montrer que $g \circ f$ est différentiable sur $\mathcal{D}$ et calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$.

7. Pour $m = 1$, on pose

$$I = \iint_\Delta f(x, y)\,dxdy \text{ avec } \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - y < 0\}.$$

7.1. Dessiner Δ et montrer que Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

7.2. Calculer I.

Exercice 5.1.3. Afin de traiter une infection bactérienne, l'utilisation conjointe de deux composés chimiques est proposée. Des études ont montré que la durée de l'infection pouvait être modélisée par

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120,$$

où x est le dosage en mg du premier composé et y est le dosage en mg du second. Comment minimiser la durée de l'infection ?

***Corrigé*.**

Exercice 4.1.1

1. Pour tous x et y de $\mathbb{R}^n$ on a $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, alors

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \tag{5.1}$$

De même, on a $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|$, alors $\|y\| - \|x - y\| \leq \|x\|$, c'est-à-dire,

$$- \|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|. \tag{5.2}$$

D'après (5.1) et (5.2), on déduit que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. Soit $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in B(a, r)$, on a $\|x - a\| < r$, c'est-à-dire, $r - \|x - a\| > 0$. Choisissons alors $0 < \varepsilon < r - \|x - a\|$ et montrons que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$. En effet, pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$ on a $\|y - x\| < \varepsilon < r - \|x - a\|$, alors $\|y - x\| + \|x - a\| < r$. D'où, $\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r$. C'est-à-dire, $y \in B(a, r)$ et par suite, la boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Pour la convexité de $B(a, r)$, soient x et y deux éléments de $B(a, r)$. Pour tout $z \in [x, y]$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $z = x + t\,(y - x)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\|z - a\| = &\ \|x + t\,(y - x) - a\| = \|x + t\,(y - a + a - x) - a\| \\
= &\ \|t\,(y - a) + (1 - t)(x - a)\| \\
\leq &\ t\,\|(y - a)\| + (1 - t)\,\|(x - a)\| \\
< &\ t\,r + (1 - t)\,r \\
\|z - a\| < &\ r.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $z \in B(a, r)$, d'où $[x, y] \subset B(a, r)$.

3. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Soit $j \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x - a\| < \eta$ on a $\|f(x) - l\|_\infty < \varepsilon$ (puisque toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^p$, on peut utiliser la norme sup), ce qui implique que $|f_j(x) - l_j| \leq \|f(x) - l\|_\infty < \varepsilon$. D'où $\lim_{x\to a} f_j(x) = l_j$.
Réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta_j > 0$ tel que $\|x - a\| < \eta_j$ implique que $|f_j(x) - l_j| < \varepsilon$. En choisissant $\eta = \min_{j\in\{1,\ldots,p\}} \eta_j$ on obtient l'implication
$$\|x - a\| < \eta \Longrightarrow \|x - a\| < \eta_j \Longrightarrow |f_j(x) - l_j| < \varepsilon,\ \forall j \in \{1, \ldots, p\} \Longrightarrow \|f(x) - l\|_\infty < \varepsilon.$$
Par conséquence, $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
4. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(a, b) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Si $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, alors il existe un voisinage I de a, un voisinage J de b (I et J sont des intervalles ouverts contenant a et b respectivement) et une fonction $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I vérifiant
   i) $I \times J \subset U$ et $\varphi(a) = b$;
   ii) $f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in I$, (ou l'équivalence suivante : $\forall x \in I, f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$).
   iii) $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$.

Exercice 4.1.2
Soient $m \in \mathbb{N}$ et f une fonction qui dépend du paramètre m. Plus précisément, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
et si $m = 0$, on a
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrons que f est continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Sur $\mathcal{D}$, la fonction f est une fraction rationnelle bien définie. Donc elle est continue sur $\mathcal{D}$.
2. Calculons les dérivées partielles de f en chaque point de $\mathcal{D}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$.

<u>Pour $m = 0$</u> : On a $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire, $(x, y) \neq (0, 0)$. La fonction f possède-t-elle, d'abord, des dérivées partielles au point (x, y)? Notons par $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les deux fonctions partielles de f en (x, y).
<u>Pour f_1</u> :
— Si $y = 0$ on a $f_1(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, alors f_1 est dérivable en x et $f_1'(x) = 0$.
— Si $y \neq 0$ on a $f_1(t) = \dfrac{y}{t^2 + y^2},\ \forall t \in \mathbb{R}$, alors f_1 est une fraction rationnelle qui est dérivable en x et $f_1'(x) = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

Par suite, f admet au point (x, y) une dérivée partielle par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable x et on a [1]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1'(x) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Pour f_2 :

— Si $x = 0$ on a $f_2 : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{si } t \neq 0; \\ 0, & \text{si } t = 0, \end{cases}$ alors f_2 est dérivable en $y \in \mathbb{R}^*$ et $f_2'(y) = \frac{-1}{y^2}$.

— Si $x \neq 0$ on a $f_2 : t \longmapsto \frac{t}{x^2+t^2}$, alors f_2 est une fraction rationnelle qui est dérivable en y et $f_2'(y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Par suite, f admet au point (x, y) une dérivée partielle par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable y et on a [2]

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2'(y) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Autrement, sur $\mathcal{D}$ la fonction f est une fraction rationnelle "$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$", alors elle admet des dérivées partielles par rapport aux deux variables x et y. Donc pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$: On a

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sur $\mathcal{D}$ la fonction f est une fraction rationnelle "$f(x,y) = \frac{x^m y}{x^2+y^2}$", alors elle admet des dérivées partielles par rapport aux deux variables x et y. Donc pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{mx^{m-1}y(x^2+y^2) - x^m y \times 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^{m-1}y((m-2)x^2+my^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^m(x^2+y^2) - x^m y \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Par l'étude de la dérivabilité des fonctions partielles : Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire, $(x, y) \neq (0, 0)$. La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles au point (x, y)? Notons par $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les deux fonctions partielles de f en (x, y).

Pour f_1 :

— Si $y = 0$ on a $f_1(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, alors f_1 est dérivable en x et $f_1'(x) = 0$.

1. Cette formule est valable pour les deux cas $y = 0$ et $y \neq 0$.
2. Cette formule est valable pour les deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

— Si $y \neq 0$ on a $f_1(t) = \dfrac{t^m y}{t^2+y^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, alors f_1 est une fraction rationnelle qui est dérivable en x et $f_1'(x) = \dfrac{x^{m-1}y((m-2)x^2+my^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Par suite, f admet au point (x,y) une dérivée partielle par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable x et on a [3]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1'(x) = \frac{x^{m-1}y((m-2)x^2+my^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Pour f_2 :

— Si $x = 0$ on a $f_2(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, alors f_2 est dérivable en y et $f_2'(y) = 0$.

— Si $x \neq 0$ on a $f_2(t) = \dfrac{x^m t}{x^2+t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, alors f_2 est une fraction rationnelle qui est dérivable en y et $f_2'(y) = \dfrac{x^m(x^2+y^2) - x^m y \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Par suite, f admet au point (x,y) une dérivée partielle par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable y et on a [4]

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2'(y) = \frac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}.$$

3. $\star$ Pour $m = 0$: Sur $\mathcal{D}$ on a les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sont des fractions rationnelles dont leurs dénominateurs ne s'annulent pas, alors elles sont continues sur $\mathcal{D}$. D'où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{D}$.

$\star$ Pour $m \in \mathbb{N}^*$: Sur $\mathcal{D}$ on a les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^{m-1}y((m-2)x^2+my^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ sont des fractions rationnelles dont leurs dénominateurs ne s'annulent pas, alors elles sont continues sur $\mathcal{D}$. D'où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{D}$.

4. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{D}$, alors elle est différentiable sur $\mathcal{D}$.
5. Étudions la fonction f au point $(0,0)$.

   (a) Pour la continuité de f en $(0,0)$:

   Pour $m = 0$: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   Cherchons, la limite de f au point $(0,0)$ suivant des chemins particuliers passant par $(0,0)$. Par exemple, selon le chemin $y = 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \tfrac{y}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \tfrac{0}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

   Suivant le chemin $x = 0$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \tfrac{y}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} \tfrac{1}{y} = \pm\infty \end{aligned}$$

3. Cette formule est valable pour les deux cas $y = 0$ et $y \neq 0$.
4. Cette formule est valable pour les deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

La limite suivant ce chemin n'existe pas, ce qui entraîne que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

— Si $m=1$: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \neq f(0,0)$. Alors f n'est pas continue en $(0,0)$.

— Si $m \geq 2$: On sait que $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Donc

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^m y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2 \times x^{m-2} y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2 |x^{m-2} y|}{x^2+y^2} \leq |x^{m-2} y|$$

Or, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^{m-2} y = 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. C'est-à-dire, f est continue en $(0,0),\ \forall m \geq 2$.

Autrement, en utilisant les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left|\frac{r^m \cos^m \theta . r \sin\theta}{r^2}\right| = |r^{m-1} \cos^m \theta . \sin\theta| \\ &= |r^{m-1}| \cdot |\cos^m \theta \sin\theta| \\ &\leq |r^{m-1}|. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{r\to 0} |r^{m-1}| = 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. D'où f est continue en $(0,0),\ \forall m \geq 2$.

(b) Pour les dérivées partielles de f en $(0,0)$:

— Si $m=0$: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\star$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$. Alors f possède une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

$\star$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{1}{t}-0}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$. Donc f n'admet pas une dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$.

— Si $m \geq 1$: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\star$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$. Alors f possède une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

$\star$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$. Donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) Étudions la différentiabilité de f en $(0,0)$:

— Pour $m=0$: f n'admet pas une dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

— Pour $m=1$: f n'est pas continue en $(0,0)$, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

— Pour $m\geq 2$: Étudions la limite en $(0,0)$ de l'application $\varepsilon:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par

$$\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left(x.\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y.\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}{\|(x,y)\|}.$$

En utilisant la norme $\|\ \|_2$, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon(x,y) &= \frac{f(x,y)-f(0,0)-\left(x.\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y.\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}{\|(x,y)\|_2}\\ &= \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2}=\frac{x^m y}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{\frac12}}=\frac{x^m y}{(x^2+y^2)^{\frac32}}.\end{aligned}$$

$\star$ Si $m=2$: $\varepsilon(x,y)=\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac32}}$ et suivant le chemin $x=y$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}}\varepsilon(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac32}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{x^3}{(2x^2)^{\frac32}}=\frac{1}{2^{\frac32}}\neq 0.\end{aligned}$$

Alors, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ [5].

$\star$ Si $m\geq 3$: $\varepsilon(x,y)=\dfrac{x^my}{(x^2+y^2)^{\frac32}}$ et en utilisant les coordonnées polaires $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$, avec $r>0$ et $\theta\in[0,2\pi[$, on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^my}{(x^2+y^2)^{\frac32}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y) &= \lim_{\substack{r\to0\\ \theta\in[0,2\pi[}}\frac{r^m\cos^m\theta r\sin\theta}{(r^2)^{\frac32}}\\ &= \lim_{\substack{r\to0\\ \theta\in[0,2\pi[}} r^{m-2}\cos^m\theta\sin\theta\\ &= 0\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{r\to0}r^{m-2}=0$ et $-1\leq\cos^m\theta\sin\theta\leq 1$, $\forall\theta\in[0,2\pi[$. Par conséquence, la fonction f est différentiable en $(0,0)$ pour tout $m\geq 3$.

(d) D'après la question 3), la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert [6] $\mathcal{D}$.

$\star$ Pour $m\in\{0,1,2\}$: f n'est pas différentiable en $(0,0)$, donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathcal{D}$ est de plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

5. C'est un contre exemple de f continue $\not\Rightarrow$ f différentiable.
6. $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car $\mathcal{D}^c=\{(0,0)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

⋆ Pour $m \geq 3$: La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{D}$. Reste à étudier la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{m-1}y((m-2)x^2+my^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

⋆ En utilisant les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{m-1}y((m-2)x^2+my^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{r^{m-1}\cos^{m-1}\theta \cdot r\sin\theta((m-2)r^2\cos^2\theta + mr^2\sin^2\theta)}{r^4} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} \left[r^{m-2}\cos^{m-1}\theta\sin\theta((m-2)\cos^2\theta + m\sin^2\theta)\right] \end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

car $|\cos^{m-1}\theta\sin\theta((m-2)\cos^2\theta + m\sin^2\theta)| \leq 2m-2$ et $\lim\limits_{r\to 0} r^{m-2} = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

De même, on a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{r^m\cos^m\theta.(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^4} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} r^{m-2}\cos^m\theta.(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \end{aligned}$$

car $|\cos^m\theta.(\cos^2\theta - \sin^2\theta)| = |\cos^m\theta.\cos(2\theta)| \leq 1$ et $\lim\limits_{r\to 0} r^{m-2} = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

Par conséquence, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, ce qui signifie que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le plus grand ouvert $\mathbb{R}^2$.

6. Pour $m = 0$, on considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (t, -t)$. Montrer que $g \circ f$ est différentiable sur $\mathcal{D}$ et calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$.

La fonction vectorielle $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}$, car $g_1 : t \mapsto t$ et $g_2 : t \mapsto -t$ sont différentiables (dérivables) sur $\mathbb{R}$. Or, la fonction numérique f est différentiable sur $\mathcal{D}$, alors la fonction composée $g \circ f$ est différentiable sur $\mathcal{D}$.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a

$$J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y)).J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial t}(f(x,y)) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial t}(f(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} g_1'(f(x,y)) \\ g_2'(f(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Autrement, on a $g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = (f(x, y), -f(x, y))$, alors

$$J_{g\circ f}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Exercice 4.1.3

La fonction $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120$ représente la durée de l'infection en mélangeant le dosage x en mg du premier composé et le dosage y en mg du second composé. Déterminons d'abord les points critiques de la fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$df(x,y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 18 + 2y = 0 \\ 4y - 24 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 9 + y = 0 \\ 2y - 12 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 = 0 \\ x - 9 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 9 - y = 9 - 3 = 6 \end{cases}$$

La fonction f possède alors un seul point critique $(6, 3)$.

Pour la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(x, y)$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2.$$

Donc

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\mathcal{H}_f(6, 3)) = 8 - 4 = 4 > 0$ et $2 > 0$, alors f admet un minimum local en $(6, 3)$. Est-il global ? En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(6+x, 3+y) - f(6,3) = & \ (6+x)^2 + 2(3+y)^2 - 18(6+x) - 24(3+y) + 2(6+x)(3+y) + 120 - 30 \\ = & \ x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Par suite, on obtiendra une durée minimale de l'infection en utilisant un dosage de 6mg du premier composé et 3mg du second.

5.2 Session de rattrapage (06 février 2019)

N.B : Toutes les réponses devront être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 5.2.1 (6 points)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition d'un segment ouvert, respectivement fermé de $\mathbb{R}^n$.
2. Donner la définition d'une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
3. Soient $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$ deux points de U tels que $[a, b] \subset U$. Si f est différentiable sur le segment ouvert $]a, b[$ Énoncer et démonter le Théorème des accroissements finis pour f.
4. Déduire que si f est différentiable sur un ouvert convexe U telle que df est nul sur U, alors f est constante sur U.

Exercice 5.2.2 (5 points)**.** Déterminer la différentielle de la fonction f dans les cas suivants :

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x, y) = x + 2y + x^2y$.
b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x, y) = (e^y, x^2)$.

Exercice 5.2.3 (7 points)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = e^x + e^y + x + y - 2.$$

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : y \mapsto g(y) = f(0, y)$.
2. Déduire que $f(0, y) = 0$ si et seulement si $y = 0$.
3. Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$ au voisinage d'un point (a, b) qu'on doit préciser.
4. Donner un développement limité à l'ordre 3 de φ au voisinage de 0.

5.3 Session normale MONE (13 juin 2019)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 5.3.1 (6 points=1+0.5+1+1+1.5+1)**.** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que l'application norme $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soient N_1, N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{N_1(x, y) \times \sin(x + y)}{N_2(x, y)}.$$

   2.1. Quel est le domaine de définition de f ?

   2.2. Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f à $\mathbb{R}^2$.
3. Énoncer le Théorème de Schwarz.
4. Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

   4.1. Montrer que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

4.2. Déduire que A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.

Exercice 5.3.2 (9 points=0.5+1+0.5+1+1+0.5+1.5+1+0.5+0.5+1)**.**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.

1. Dans cette question seulement, on suppose que $f(x, y) = x + |y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   1.1. Justifier pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.
   1.2. Étudier l'existence de dérivées partielles sur $\mathcal{D}$.
   1.3. déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est différentiable.
   1.4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $h(x, y) = f(x, y^2) - ye^{x+y}$.
      (d1) Montrer que h admet un seul point critique en $(-1, 1)$.
      (d2) Étudier si h admet un extremum.
      (d3) Montrer que l'équation $h(x, y) = 0$ définie au voisinage de $(0, 0)$ une fonction implicite $x \mapsto y = \varphi(x)$.
      (d4) Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$.

2. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
3. Maintenant, on suppose de plus que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.

   0.1. Montrer que $f(0, 0) = 0$ et que $g'(t) = f(x, y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   0.2. Déduire que f est une forme linéaire.

4. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une forme linéaire.

Exercice 5.3.3 (4 points=1+1+2)**.** Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1, +\infty[$, on a :

$$\ln(1 + x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1 + xy}.$$

2. Déduire que $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)} dxdy$, où D est le pavé $[0, 1]^2$.
3. En intervertissant les rôles de x et y, montrer que

$$2I = \iint_D \frac{(x + y)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} dxdy.$$

En déduire que $I = \dfrac{\pi}{8} \ln 2$.

Chapitre 6

Année universitaire 2017-2018

6.1 Session normale (12 Janvier 2018)

N.B : Toutes les réponses devront être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 6.1.1.

1. Donner la définition de chacun des mots soulignés suivants :
   a) Un compact de $\mathbb{R}^n$.
   b) Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que toute intersection de compacts de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une seule variable. Montrer que f est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en a.
4. **i)** Calculer $I(\alpha) = \int\int\int_D (1 + \alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz$
   où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\},\ \varepsilon > 0,\ R > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   ii) Déduire le volume de $B = B_{f\|\|_2}(0,R)$ la boule fermée de $\mathbb{R}^3$ associée à la norme euclidienne centrée à l'origine et de rayon $R > 0$.

Exercice 6.1.2. Soit g la fonction définie par $g(x,y) = x + x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

1. Donner le domaine de définition de la fonction g.
2. Montrer que g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Déterminer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
5. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6.1.3.

1. Montrer que l'égalité $x\,e^y - y\,e^x + 1 = 0$ définit au voisinage de $(0,1)$ une fonction implicite φ vérifiant $\varphi(0) = 1$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

6.2 Session de rattrapage (07 février 2018)

N.B : Toutes les réponses devront être justifiées. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 6.2.1.

1. Montrer que pour tout point $a \in \mathbb{R}^n$, le singleton $\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
2. Déduire que toute partie finie $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
3. La partie finie $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ est-elle compacte ? (Justifier votre réponse)

Exercice 6.2.2.
Soit f_p la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_p(x,y) = \begin{cases} (xy)^p \cos \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $p \in \mathbb{N}$. On veut étudier la fonction f_p suivant les valeurs de l'entier naturel p.

1. Pour $p = 0$:
   - $i)$ Déterminer f_0 et montrer que $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$.
   - $ii)$ Montrer que f_0 n'est pas différentiable en $(0,0)$ (Vous pouvez utiliser le fait que $\cos t$ diverge quand t tend vers $+\infty$).
2. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$:
   - $i)$ Déterminer les dérivées partielles premières de f_p sur $\mathbb{R}^2$.
   - $ii)$ Montrer que f_p est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si $p \geq 1$.
3. La fonction f_1 est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? (Justifier votre réponse)
4. Montrer que f_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si $p \geq 2$.

Exercice 6.2.3.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. $i)$ Montrer que si x et y sont deux reéls non nuls tels $y^3 = -x^3$ alors $y = -x$.
   - $ii)$ Déterminer les points critiques de f.
3. Trouver les extrema locaux de f et vérifier s'ils sont globaux.

6.3 Session normale MONE (29 mai 2018)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 6.3.1 (5 points=1+1+1+1+1)**.** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ayant plus d'un élément, $N : E \to \mathbb{R}$ une norme sur E et l'application suivante définie sur E^2 :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

1.1. Montrer que $\forall\, x, y \in E$ on a : $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$.

1.2. Montrer que (E, d) est un espace métrique

1.3. La distance d est associée à une norme N ? Justifier votre réponse.

2. Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction à plusieurs variables et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que f est différentiable en $a \in U$.

2.1. Montrer que f admet en a des dérivées partielles par rapport à toutes les variables avec $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i)\ \forall\, i = 1, \cdots, n$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2.2. Prouver que $df(a) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i\ \forall\, h = (h_1, \cdots, h_n)$.

Exercice 6.3.2 (11 points=1+1+0.5+1+1.5+0.5+0.5+1+1+0.5+0.5+1+1).
Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4, & \text{si } y > |x| \\ y^2, & \text{si } y \leq |x| \end{cases}.$$

1. Calculer $f(0,0)$, $f(-2,-3)$ et montrer que $f(x,y) = f(-x,y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y = |x|\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$.
4. Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ en lesquels f est continue (Justifier votre réponse).
5. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,1)$.
6. Déduire que f est différentiable en $(0,0)$ et donner $df(0,0)$.

7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g(x,y) = f(2, \sin(x) + \sin(y))$.
   7.1. Montrer que $g(x,y) = \sin^2(x) + \sin^2(y) + 2\sin(x)\sin(y)$.
   7.2. Vérifier que g admet un point critique en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
   7.3. Donner la matrice de Hessienne de g en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
   7.4. Déduire que g admet un maximum local en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Est-il global ?
8. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $h(x,y) = f(1+y^2, -x^4 - 2x^2 - 1)$.
   8.1. Montrer que l'équation $h(x,y) = \exp(2\sin(y))$ est équivalente à
   $$x^4 + 2x^2 + 1 - \exp(\sin(y)) = 0 \tag{6.1}$$
   8.2. Montrer que l'équation (6.1) définit au voisinage de $(0,0)$ une fonction implicite $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$.
   8.3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

Exercice 6.3.3 (4 points=1.5+0.5+2). Soit $I = \iint_{\mathcal{D}} (x+y)\,dxdy$ avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0, x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 0\}$.

1. $\mathcal{D}$ est-il ouvert, fermé ou convexe ? (justifier votre réponse).
2. Dessiner $\mathcal{D}$.
3. Calculer par deux méthodes l'intégrale double I.

6.4 Session de rattrapage MONE (03 juillet 2018)

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice.

$A)$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4, & \text{si } y > |x| \\ y^2, & \text{si } y \leq |x|. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = |x|\}$ est un fermé, non ouvert et non convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la classe de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ (Justifier votre réponse).
3. Etudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.
4. Etudier la différentiabilité de f sur $\mathcal{D}$.
5. Calculer l'intégrale double suivant
$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dxdy$$
avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \;\text{ et }\; 0 \leq y \leq 1\}$.

$B)$ Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$h(x,y) = (f(x,y), g(x,y)).$$

6. Montrer que g n'est pas continue en $(0,0)$. g est-elle différentiable en $(0,0)$?
7. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel h est différentiable et donner la matrice Jacobienne de h en chaque point de cet ouvert.

Bonne chance.