Université Moulay Ismaïl

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Master en Sciences et Techniques

Analyse Mathématique et Applications (AMA)

Module : M1

==

ANALYSE FONCTIONNELLE DES EDP

==

S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2021-2022

Université Moulay Ismaïl

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Master en Sciences et Techniques

Analyse Mathématique et Applications (AMA)

Module : M1

==

ANALYSE FONCTIONNELLE DES EDP

==

S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2021-2022

Bibliographie

- R.A. Adams ; Sobolev spaces, Academic Press,1975.
- H. Brézis ; Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Massou,1983.
- F. Hirsch et G. Lacombe ; Éléments d'analyse fonctionnelle, Massou, Paris, 1997

Table des matières

Chapitre 1

Distributions

1.1 Les fonctions test

1.1.1 Support d'une fonction

Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$). On appelle **support de** f et on note $\operatorname{supp}(f)$, l'ensemble des points adhérents à $A = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}$. Ainsi,

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}.$$

Autrement dit, $\operatorname{supp}(f)$ est le complémentaire du plus grand ouvert de $\mathbb{R}^N$ sur lequel $f = 0$.

Remarque 1.1.1. Pour une fonction mesurable, $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0 \ \text{ p.p.}\}}$. C'est le complémentaire du plus grand ouvert de $\mathbb{R}^N$ sur lequel $f = 0$ p.p..

1.1.2 Les fonctions test

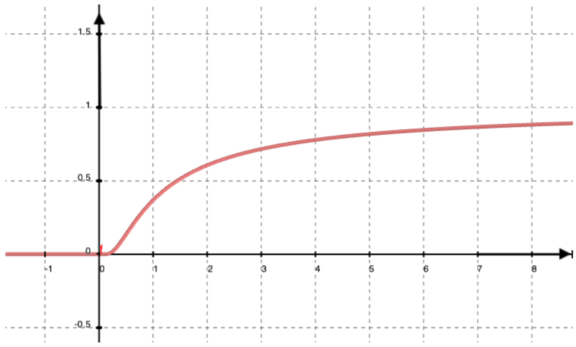
Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathscr{C}_0^k(\Omega)$ est l'espace de fonctions $u \in \mathscr{C}^k(\Omega)$ ayant un support compact de Ω.

Notons que $\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^k(\Omega)$, alors $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est l'espace de fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω. Les éléments de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, noté dans la suite par $\mathfrak{D}(\Omega)$, sont appelés <u>**les fonctions test**</u> (ou fonctions d'essai).

Remarques 1.1.2.

1. $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ est non vide, et plus précisément, il existe $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Il suffit de prendre $\varphi(x) = f(1 - \|x\|^2)$ où f est la fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \ t \leqslant 0, \\ \exp\left(\dfrac{-1}{t}\right) & \text{si } \ t > 0. \end{cases}$$

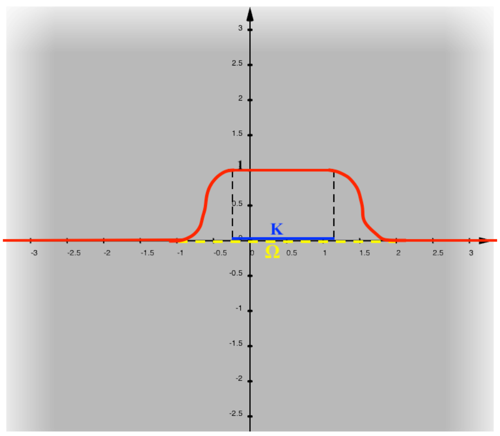


Par translation et changement d'échelle, on peut déduire que $\mathfrak{D}(\Omega) \neq \emptyset$ en utilisant la fonction

$$\phi(x) = \varphi(\frac{x - x_0}{r}) \text{ où } x_0 \in \Omega \text{ et } r > 0 \text{ tel que } B(x_0, r) \subset \Omega.$$

2. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors toute fonction test $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega_1)$ peut être étendue a une fonction test de $\mathfrak{D}(\Omega_2)$, c'est-à-dire, $\mathfrak{D}(\Omega_1) \subset \mathfrak{D}(\Omega_2)$. En particulier, $\mathfrak{D}(\Omega) \subset \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors on peut définir $\mathfrak{D}(\Omega)$ comme l'ensemble des éléments de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ ayant le support contenu dans Ω. La même chose pour $\mathscr{C}_0^k(\Omega)$ et $\mathscr{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 1.1.3. "Lemme d'Urysohn"
Si K est un compact dans Ω, alors Il existe une fonction ψ infiniment différentiable de Ω (ou généralement de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $[0, 1]$, dont le support est inclus dans Ω, et qui vaut 1 sur K.
Autrement dit, il existe $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ tel que $\chi_K \leq \psi \leq \chi_\Omega$.



1.2 Convergence dans $\mathfrak{D}(\Omega)$

Soit K un compact dans Ω d'intérieur non vide, c'est-à-dire, $\emptyset \neq \overset{o}{K} \subset K \subset \Omega$. On notera par $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions test de $\mathfrak{D}(\Omega)$ ayant le support contenu dans K.

$$\mathfrak{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \ / \ \mathrm{supp}(\varphi) \subset K\}.$$

Rappelons que pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi$ désigne la dérivée partielle de φ d'ordre $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, c'est-à-dire,

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\left(\dots\left(\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right)\right)\right).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{aligned} p_m : \mathfrak{D}_K(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto p_m(\varphi) = \sup_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi(x)| = \sup_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

est seulement une semi norme sur $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Pour le munir d'une topologie en utilisant ces semi normes, on définit un voisinage de φ toute partie $V_{k,\eta}(\varphi)$ de $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ donnée par

$$V_{k,\eta}(\varphi) = \{\psi \in \mathfrak{D}_K(\Omega)/p_k(\varphi-\psi) < \eta\}, \text{ pour certains } k \in \mathbb{N} \text{ et } \eta > 0.$$

Définitions 1.2.1.

1. *On dit qu'une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega)$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall j \ge j_0 \text{ on a } p_m(\varphi_j - \varphi) < \varepsilon.$$

c'est-à-dire,

$$\sup_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi(x)| = \sup_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha\varphi_j - D^\alpha\varphi\|_\infty < \varepsilon.$$

2. *Une partie A de $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ est dite bornée si*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists M_m > 0, \forall \varphi \in A,\ p_m(\varphi) = \sup_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi(x)| < M_m.$$

Notons que $\mathfrak{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)/\exists K \text{ compat de } \Omega \text{ tel que } \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega)\} = \bigcup_K \mathfrak{D}_K(\Omega)$ *où K parcourt l'ensemble des compacts inclus dans Ω. Alors,*

3. *On dit qu'une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ s'il existe un compact K de Ω tel que supp$(\varphi_j) \subset K$, $\forall j \in \mathbb{N}$, et φ_j converge vers φ dans $\mathfrak{D}_K(\Omega)$.*

C'est-à-dire, $\varphi, \varphi_j \in \mathfrak{D}_K(\Omega), \forall j$ et $\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall j \ge j_0$ on a

$$p_m(\varphi_j - \varphi) = \sup_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi(x)| = \sup_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha\varphi_j - D^\alpha\varphi\|_\infty < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.2. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a les densités suivantes :

★ L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

★ L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{C}_0^k(\Omega)$, pour tout $0 \le k \le +\infty$.

1.3 Espace des distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Définition 1.3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit* ***une distribution*** *T sur Ω toute forme linéaire sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ vérifiant la propriété de continuité suivante : Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante $C_K > 0$ tels que*

$$|T(\varphi)| \leqslant C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_\infty, \ \forall \varphi \in D_K(\Omega). \tag{1.3.1}$$

On note par $\mathfrak{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω. L'image de φ par la distribution T est souvent notée $\langle T, \varphi \rangle$ au lieu de $T(\varphi)$.

Remarque 1.3.2. Si pour tout compact $K \subset \Omega$, on peut utiliser le même entier m dans la propriété de continuité, c'est-à-dire, l'entier m est indépendant du compact K, alors on dit que la distribution T est d'ordre inférieur ou égal à m. Dans ce cas l'ordre de la distribution T est le plus petit entier m vérifiant la propriété de continuité indépendamment du compact $K \subset \Omega$.

Exemples 1.3.3.

1. **Distribution régulière :**

Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution $T_f \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ en posant

$$\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Toute distribution de ce type, c'est-à-dire, définie à partir d'une fonction localement intégrable, est appelée distribution régulière. Elle est d'ordre 0 et notée $[f]$. On peut vérifier aisément l'injectivité de l'application

$$\begin{array}{rll} j: & L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega) \\ & f & \longmapsto j(f) = [f] = T_f, \end{array}$$

ce qui permet d'identifier les fonctions localement intégrables avec les distributions régulières et on peut noter $[f]$ seulement par f s'il n'y a pas d'ambiguïté. L'exemple suivant prouve qu'on peut pas identifier l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ avec tout l'espace des distributions, c'est-à-dire, l'application j n'est pas surjective.

2. **La masse de Dirac en un point :**

Pour $a \in \Omega$ fixé, la forme linéaire, notée δ_a, définie sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

est une distribution d'ordre 0, appelée distribution de Dirac (ou masse de Dirac) en a. Elle n'est pas régulière et on dit qu'elle est singulière. En général toute combinaison linéaire des masses de Dirac $\alpha_1\delta_{a_1} + \alpha_2\delta_{a_2} + ... + \alpha_p\delta_{a_p}$ est une distribution singulière.

3. **La valeur principale de $\frac{1}{x}$:**

On sait que $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ alors $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$, mais on peut vérifier que l'application, notée $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ et définie par

$$\begin{aligned} V_p\left(\frac{1}{x}\right) : \mathfrak{D}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

est une distribution singulière appelée la valeur principale de $\frac{1}{x}$.

4. Pour $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, l'application T définie sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ par $T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle = D^\alpha\varphi(x_0)$ est une distribution d'ordre $|\alpha|$.

Théorème 1.3.4. *une forme linéaire $u : \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution si, est seulement si, pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{D}(\Omega)$ qui converge vers 0 dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, on a $\lim_{j\to+\infty}\langle u, \varphi_j\rangle = 0$.*

Remarque 1.3.5. On dit que la condition de continuité (1.3.1) est équivalente à la continuité séquentielle de la forme linéaire u.

Preuve. "Faite au cours" □

1.4 Opérations sur les distributions

1.4.1 Translation

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la translation de f par $a \in \mathbb{R}^n$, notée $\tau_a f$, est définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si f est localement intégrable, alors sa translation l'est aussi et la distribution régulière associée à $\tau_a f$ est donnée par

$$\langle[\tau_a f], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tau_{-a}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle[f], \tau_{-a}\varphi\rangle$$

Généralement, on peut prouver que **la translation d'une distribution** $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ par $a \in \mathbb{R}^n$, notée $\tau_a u$ et définie par

$$\langle\tau_a u, \varphi\rangle = \langle u, \tau_{-a}\varphi\rangle,\ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n),$$

est une distribution sur $\mathbb{R}^n$. Il suffit d'utiliser le fait que l'application linéaire $\varphi \longrightarrow \tau_a\varphi$ est continue de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire,

$$\varphi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0 \text{ dans } \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \tau_a\varphi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0 \text{ dans } \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n).$$

1.4.2 Multiplication par des fonctions de $\mathscr{C}^\infty$

Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. L'application notée fu, définie sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ par $\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle,\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ est une distribution sur Ω. En effet,

$i)$ fu est bien définie car $f\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$;

$ii)$ fu est linéaire ;

$iii)$ La continuité séquentielle : Soit $(\varphi_j)_j$ une suite qui converge vers 0 dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe K compact dans Ω tel que $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$ pour tout j et $\|D^\alpha \varphi_j\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. D'après la formule de Leibniz on a

$$D^\alpha (f\varphi_j) = \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta f D^{\alpha-\beta}\varphi_j,$$

où $\beta \leq \alpha$ signifie $\beta_i \leq \alpha_i\ \forall i$, $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ et $C_\alpha^\beta = \prod_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}^{\beta_i}$. Pour tout j, on a $\operatorname{supp}(f\varphi_j) \subset \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$, alors

$$\begin{aligned}\|D^\alpha (f\varphi_j)\|_\infty = &\ \sup_{x\in K}|D^\alpha (f\varphi_j)(x)| \\ \leq &\ \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \underbrace{\sup_{x\in K}|D^\beta f(x)|}_{\substack{<+\infty \\ \text{puisque } K \text{ est compact}}} \underbrace{\|D^{\alpha-\beta}\varphi_j\|_\infty}_{\xrightarrow[j\longrightarrow+\infty]{}0}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $f\varphi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ et par suite on a

$$\langle fu, \varphi_j\rangle = \langle u, f\varphi_j\rangle \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

Exemple 1.4.1. Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}\langle f\delta_a, \varphi\rangle = &\ \langle \delta_a, f\varphi\rangle = f(a)\varphi(a) \\ = &\ f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle = \langle f(a)\delta_a, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Alors, $f\delta_a = f(a)\delta_a$. En particulier, pour $\delta = \delta_0$ et $f(x) = x$ on a $f\delta = f(0)\delta = 0$.

Exercice.

1. Déterminer toutes les solutions dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$ de l'équation (E) : $xu = 0$.
2. Même question pour l'équation (E') : $xu = 1$.

1.4.3 Dérivation de distributions

Soit $[f]$ la distribution régulière associée à une fonction f (on suppose que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ qui est une condition assez suffisante pour s'assurer que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$).

Pour simplifier les calcules utilisons seulement deux variables x et y, alors pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right], \varphi\rangle &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-a}^{a} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad \text{où } \mathrm{supp}\varphi \subset]-a,a[\times]-b,b[\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\underbrace{[f\varphi]_{-a}^{a}}_{=0} - \int_{-a}^{a} f(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\langle [f], \frac{\partial \varphi}{\partial x}\rangle.
\end{aligned}$$

En généralisant cette remarque, on donne le résultat suivant.

Proposition et définition 1.4.2. Soit $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. Pour tout $i \in \{1,...,n\}$, l'application notée $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, définie sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ par $\langle \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\langle u, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle$ est une distribution. Elle définit **la dérivée partielle de u au sens des distributions.**

Exercice.

1. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ définit bien une distribution.
2. Montrer que si m est l'ordre de u sur un compact K alors l'ordre de $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est inférieur à $m+1$ sur K.

Remarques 1.4.3.

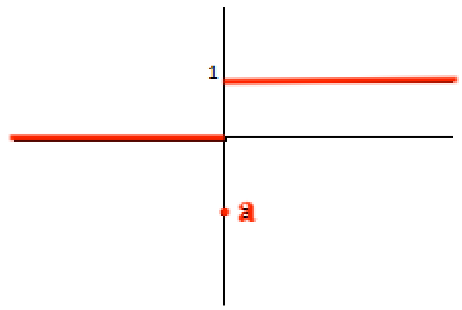
1. Pour tout $f \in C^1(\Omega)$ on a $\dfrac{\partial [f]}{\partial x_i} = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right]$.
2. Pour tout $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, on a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ "C'est le Théorème de Schwartz pour les distributions".
3. Toute distribution $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ est infiniment dérivable (au sens des distributions) et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $D^\alpha u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ et

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Exemples 1.4.4.

1. Soit $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction de **Heaviside** définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1 & \text{si } x > 0; \\ a \in \mathbb{R} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



- On a $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $[H] \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. Montrer que $[H]' = \delta$.

2. On a $log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $[log|x|] \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$. Montrer $[log|x|]' = V_p\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Théorème 1.4.5. ***"Formule des sauts"***
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $]a,b[$. Soient $(a_i)_{\{i=1,\dots,N\}}$ $(a < a_1 < \cdots < a_N < b)$ les points de discontinuité de 1^{er} espèce de f et $\sigma(a_i) = f(a_i^+) - f(a_i^-)$ le saut de f en a_i, où $f(a_i^+) = \lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ et $f(a_i^-) = \lim\limits_{x \to a_i^-} f(x)$.
Alors

$$[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^{N} \sigma(a_i)\delta_{a_i} = [f'] + \sum_{i=1}^{N} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right)\delta_{a_i}.$$

Preuve. "Faite au cours" □

Exercice. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^m$ sur $\mathbb{R}^*$ telle que $f^{(i)}$, sa dérivée d'ordre i, admet un saut fini σ_i, $\forall i \le m$. Montrer que

$$[f]^{(m)} = [f^{(m)}] + \sigma_0\delta^{(m-1)} + \sigma_1\delta^{(m-2)} + \cdots + \sigma_{m-1}\delta.$$

Théorème 1.4.6. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

1. *Les distributions u sur I vérifiant $u' = 0$ sont les fonctions constantes.*
2. *$\forall v \in \mathfrak{D}'(I)$, il existe $u \in \mathfrak{D}'(I)$ telle que $u' = v$. "u est appelée une distribution primitive de v"*
3. *Pour $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, si $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors u est une fonction constante.*

Preuve. Exercice.

1.5 Convergence dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Définition 1.5.1. *On dit qu'une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{D}'(\Omega)$ converge (faiblement) vers u dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et on note $u_j \underset{j\to\infty}{\rightharpoonup} u$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$, si*

$$\lim_{j\to\infty} \langle u_j, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Exemple 1.5.2. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $a_k \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Pour toute suite $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$, la suite de distributions $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$, définie par $T_N = \sum_{-N}^{N} b_k\delta_{a_k}$ converge faiblement vers la distribution $T = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k\delta_{a_k}$ lorsque $N \longrightarrow \infty$. En effet, on vérifie aisément que T_N et T sont des distributions. Pour la convergence faible, on a $\langle T_N, \varphi\rangle = \sum_{-N}^{N} b_k\varphi(a_k)$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$. Alors $\langle T - T_N, \varphi\rangle = \sum_{|k|\geq N+1} b_k\varphi(a_k)$. Or $a_k \underset{k\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors il existe $N_\varphi \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_\varphi$ on a $a_k \notin \operatorname{supp}\varphi$, c'est-à-dire, $\varphi(a_k) = 0$. Ce qui entraine que

$$\langle T - T_N, \varphi\rangle = 0, \ \forall N \geq N_\varphi.$$

Proposition 1.5.3.
1. Si $f_j \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$, alors $f_j \rightharpoonup f$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.
2. De même si $f_j \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$.
3. Si $(f_j)_j \subset L^1_{loc}(\Omega)$, $f_j \longrightarrow f$ p.p. sur Ω et s'il existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $|f_j| \leq |g|$, $\forall j$, alors $f_j \rightharpoonup f$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

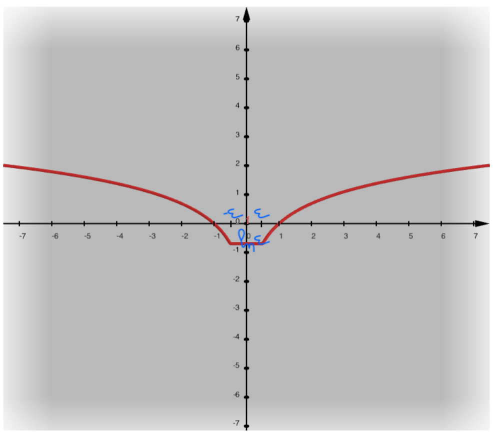
Preuve. "Faite au cours" □

Théorème 1.5.4.
Si $u_j \rightharpoonup u$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$, alors $D^\alpha u_j \rightharpoonup D^\alpha u$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Preuve. Évident.

Exercice. Appliquer ce théorème pour redémontrer que $(\log|x|)' = V_p(\frac{1}{x})$ (au sens de distributions), en utilisant la suite

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{si} \quad |x| \geq \varepsilon; \\ \log(\varepsilon) & \text{si} \quad |x| < \varepsilon. \end{cases}$$



1.6 Support d'une distribution

1.6.1 Préliminaires

Définition 1.6.1. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Soit $T \in \mathfrak{D}'(\Omega_2)$. On appelle **restriction de** T **à** Ω_1, l'application notée $T|_{\Omega_1}$ et définie sur $\mathfrak{D}(\Omega_1)$ par*

$$\langle T|_{\Omega_1}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega_1).$$

En utilisant la remarque 1.1.2, on vérifie aisément que $T|_{\Omega_1}$ est une distribution sur Ω_1.

Définitions 1.6.2.

1. *Soient $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que T est nulle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si*
$$T|_{\Omega} = 0, \quad \textit{c'est-à-dire}, \ \langle T, \varphi\rangle = 0, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$
2. *Soient T_1 et T_2 deux distributions sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $T_1 = T_2$ sur Ω si $T_1|_{\Omega} = T_2|_{\Omega}$.*

Exemple 1.6.3.
1. La masse de Dirac δ_a est nulle sur $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \{a\}$.
2. La restriction de la valeur principale $V_p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ à $\mathbb{R}^*$ est égale à la distribution régulière $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ sur $\mathbb{R}^*$.

Définitions 1.6.4.

1. ***Ouvert d'annulation*** *: On appelle ouvert d'annulation d'une distribution $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$ où T est nulle. Ainsi, l'ouvert d'annulation de T est le plus grand ouvert dans lequel T est nulle.*
2. ***Support d'une distribution*** *: On appelle support de la distribution T et on le note supp$T$, le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ de l'ouvert d'annulation de T.*

Proposition 1.6.5. $x \in \text{supp}T$ si, et seulement si, pour tout ouvert Ω contenant x, il existe $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ tel que $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$.

Preuve. "Exercice".

Exemples 1.6.6.
1. $\text{supp}T = \emptyset$ si, et seulement si, $T = 0$.
2. $\text{supp}\,\delta_a = \{a\}$.
3. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors $\text{supp}[f] = \text{supp}f$.
4. Si $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\text{supp}(D^\alpha T) \subset \textit{suppT}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Remarques 1.6.7.
1. Soient $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\text{supp}T \cap \text{supp}\varphi = \emptyset$, alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.
2. Soit $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si supp$T$ est borné, alors il est compact et on dit dans ce cas que T est une distribution à support compact.

1.6.2 Distributions à support compact

Rappel.

$\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, c'est-à-dire,

$$\mathscr{E}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \ / \ \varphi \ \text{ est de classe } \ \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

et $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ désigne le dual topologique de $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$. C'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire, $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ signifie que T est linéaire de $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ vers $\mathbb{C}$ et pour tout $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ on a $\langle T, \varphi_j\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Notons qu'une suite $(\varphi_j)_j$ de $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ converge vers 0 dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $\sup\limits_K |D^\alpha \varphi_j(x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Remarques 1.6.8. 1. $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2. $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continument dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, et on note $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire, si $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$. En effet, soit $(\varphi_j)_j$ une suite de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers 0 dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe un compact K_0 tel que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K_0$, $\forall j$, et $\|D^\alpha \varphi_j\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, $\forall \alpha$. Alors pour tout compact K et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_j(x)| \leq \|D^\alpha \varphi_j\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Ce qui entraine que $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$.

3. $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$. En effet, d'après le Lemme d'Urysohn 1.1.3, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_j \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\theta_j = 1$ sur la boule fermée $B'(0, j)$. Soit $\psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi_j = \theta_j \psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset B'(0, j)$, $\forall j \geq j_0$ et on a

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \psi(x)| = \sup_K |D^\alpha ((\underbrace{\theta_j(x) - 1}_{=0})\, \psi(x))| = 0, \ \forall j \geq j_0.$$

Par conséquence, $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \psi$ dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$.

De même, on montre que $\mathfrak{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{E}(\Omega)$ et $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{E}(\Omega)$. Il suffit d'utiliser $\theta_j \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\theta_j = 1$ sur $B'(0, j) \cap \Omega$.

Théorème 1.6.9. *L'espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$ à support compact coïncide avec $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. "Faite au cours" $\square$

Exemple 1.6.10. • $\delta_a \in \mathscr{E}'(\Omega)$ et $[e^x] \notin \mathscr{E}'(\Omega)$.

• $\mathscr{E}'(\Omega) \subsetneq \mathfrak{D}'(\Omega)$.

Théorème 1.6.11. *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

Preuve. "Faite au cours" $\square$

1.7 Convolution

1.7.1 Rappel "pour les fonctions"

Proposition et définition 1.7.1. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \longmapsto f(x-y)\, g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.
En notant $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$, on a

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

$f * g$ est appelé le produit de convolution (ou la convolution) de f et g.

Remarque 1.7.2. Le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (entre les fonctions) est commutatif et associatif, mais il n'admet pas d'élément neutre dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.7.3. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ qui sont bornées sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre $\leq k$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$ est bien définie. De plus $f * g \in \mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\alpha| \leq k$, on a $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$.*

Définition 1.7.4. *On appelle approximation de l'identité (ou unité approchée) toute suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant :*

i) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k \, dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, *(Moyennement tendant vers 1) ;*

ii) Il existe $C > 0$ tel que $\|\rho_k\|_1 \leq C$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ($(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$) ;

iii) pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\int_{|x|\geq\varepsilon} |\rho_k| \, dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, (Concentration en 0).

Remarque 1.7.5. Souvent, la condition i) est en fait une égalité $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k \, dx = 1$. Dans ce cas, si en plus $\rho_k \geq 0$, la condition ii) devient alors $\|\rho_k\|_1 = 1$.

Exemple 1.7.6. Si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$, alors $\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$ est une approximation de l'identité. On peut choisir $\rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ et dans ce cas, l'approximation de l'identité ρ_k est une suite dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.7.7. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'identité. Alors*

$$f * \rho_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \quad \textit{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^n).$$

Proposition et définition 1.7.8. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \longrightarrow f(x-y) g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. En notant $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$, on a

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Proposition 1.7.9. Soient $p \in [1,+\infty[$ $(p<+\infty)$ et $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'identité. Alors, pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|f*\rho_k - f\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

1.7.2 Cas de distributions :

Lemme 1.7.10. Soient $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. La fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\psi(x) = \langle T, \tau_{-x}\varphi\rangle$, notée aussi $\langle T_y, \varphi(x+y)\rangle$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, $\psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$D^\alpha\psi(x) = \langle T_y, D^\alpha\varphi(x+y)\rangle.$$

De plus, si $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ alors $\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, où $\psi_j(x) = \langle T, \tau_{-x}\varphi_j\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. • ψ est bien définie : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\tau_{-x}\varphi(y) = \varphi(x+y)$, alors $\tau_{-x}\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{supp}(\tau_{-x}\varphi) = -x + \operatorname{supp}\varphi$, "à vérifier". D'où $\tau_{-x}\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.

• $\psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$: Pour un vecteur de la base canonique e_i on a

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{\psi(x+he_i)-\psi(x)}{h} &= \lim_{h\to0}\frac{\langle T,\tau_{-x-he_i}\varphi\rangle - \langle T,\tau_{-x}\varphi\rangle}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\langle T, \frac{\tau_{-x-he_i}\varphi - \tau_{-x}\varphi}{h}\rangle\\ &= \lim_{h\to0}\langle T_y, \frac{\varphi(x+he_i+y)-\varphi(x+y)}{h}\rangle.\end{aligned}$$

On vérifie que $F_{x,h} = \dfrac{\varphi(x+he_i+\cdot)-\varphi(x+\cdot)}{h} \xrightarrow[h\to0]{} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x+\cdot)$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, en montrant d'abord la convergence ponctuelle puis uniforme de $F_{x,h}$, ainsi que ses dérivées. Ce qui prouve que ψ admet une dérivée partielle par rapport à x_i et

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) = \langle T_y, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x+y)\rangle.$$

Par itération, $D^\alpha\psi$ existe, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ et on a

$$D^\alpha\psi(x) = \langle T_y, D^\alpha\varphi(x+y)\rangle.$$

• Soit $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire, il existe un compact K_0 tel que $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K_0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ et $\|D^\alpha\varphi_j\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$. Soit $R>0$ tel que $K_0 \subset B(0,R)$. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe $r>0$ tel que $K \subset B(0,r)$. La caractérisation de continuité (1.3.1) de la distribution T entraine qu'il existe $C_K > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T,\phi\rangle| \le C_K \sum_{|\beta|\le m}\|D^\beta\phi\|_\infty,\ \forall\phi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)\ \text{ avec }\ \operatorname{supp}\phi \subset \overline{B}(0,R+r).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, On applique cette estimation à la fonction test $\phi = D^\alpha(\tau_{-x}\varphi_j)$ puisque $\operatorname{supp} \tau_{-x}\varphi_j \subset \overline{B}(0, R+r)$. En effet , on a $\tau_{-x}\varphi_j(y) = \varphi_j(x+y) = 0$ si $\|x+y\| > R$, à fortiori si $\|y\| - \|x\| > R$, c'est-à-dire, $\|y\| > R + \|x\|$, à fortiori si $\|y\| > R + r$, $\forall x \in K$. Par conséquence, pour tout $x \in K$ on a

$$\begin{aligned} |D^\alpha \psi_j(x)| = & \ |\langle T_y, D^\alpha \varphi_j(x+y)\rangle| \\ \leq & \ C_K \sum_{|\beta|\leq m} \|D^{\alpha+\beta}\varphi_j\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha \psi_j(x)| \leq C_K \sum_{|\beta|\leq m} \|D^{\alpha+\beta}\varphi_j\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

D'où, $$\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ dans } \mathscr{E}(\mathbb{R}^n).$$ □

Lemme 1.7.11. Soient $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose $\psi(x) = \langle S, \tau_{-x}\varphi\rangle = \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle$, alors $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.
De plus, si $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, où $\psi_j(x) = \langle S_y, \varphi_j(x+y)\rangle$.

Preuve. D'après le Lemme 1.7.10, on a $\psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$. Reste à montrer que $\operatorname{supp}\psi$ est compact. Soient $K = \operatorname{supp}\varphi \subset B(0,r)$ et $F = \operatorname{supp} S \subset B(0,R)$. D'après le Théorème d'Urysohn 1.1.3, il existe $\theta \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\theta = 1$ sur $\overline{B}(0,R)$ et $\operatorname{supp}\theta \subset B(0,R')$ avec $R' > R$, alors $\theta S = S$. Donc

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \ \langle S, \tau_{-x}\varphi\rangle = \langle \theta S, \tau_{-x}\varphi\rangle \\ = & \ \langle S, \theta\tau_{-x}\varphi\rangle = \langle S_y, \theta(y)\varphi(x+y)\rangle. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| > r + R'$ on a $\theta(y)\varphi(x+y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. En effet, si $\|y\| > R'$ alors $\theta(y) = 0$ et si $\|y\| \leq R'$ on a $\|x+y\| \geq \|x\| - \|y\| > r + R' - R' = r$. Donc $\varphi(x+y) = 0$. D'où $\psi(x) = \langle S_y, \theta(y)\varphi(x+y)\rangle = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| > r+R'$. Ainsi, $\operatorname{supp}(\psi) \subset \overline{B}(0, r+R')$. Le reste est analogue au Lemme précédent 1.7.10. □

En utilisant les lemmes précédents, on donne la définition suivante,

Définition 1.7.12. *Soient S et T deux distributions sur $\mathbb{R}^n$, dont l'une est à support compact (par exemple $\operatorname{supp} S$ est compact). On définit **le produit de convolution de S par T, noté par $S * T$**, la distribution sur $\mathbb{R}^n$ donnée par*

$$\langle S * T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n), \quad \textit{où} \quad \psi(x) = \langle S, \tau_{-x}\varphi\rangle = \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle.$$

Proposition 1.7.13. 1. Le produit de convolution est commutatif, c'est-à-dire, $T * S = S * T$ (si l'une au moins est à support compact).

2. Si T et S sont deux distributions, dont l'une au moins est à support compact, alors
$$D^\alpha(S * T) = D^\alpha S * T = S * D^\alpha T,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$
3. Pour toute distribution T sur $\mathbb{R}^n$ on a
$$\delta * T = T * \delta = T.$$
4. Soient T, R et S trois distributions sur $\mathbb{R}^n$, dont deux au moins sont à support compact, alors
$$(S * R) * T = S * (R * T).$$
5. Pour tout $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ et tout $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, on a
$$\text{supp}\,(T * S) \subset \text{supp}\,(T) + \text{supp}\,(S).$$

Preuve. Proposition d'un exposé présenté par les étudiants.

1.8 Exercices

Pour toute la suite Ω est un ouvert non vide dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice **1.8.1.** Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par
$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\right) & \text{si } \ |x| < k, \\ 0 & \text{si } \ |x| \geq k. \end{cases}$$

1. Vérifier que f_k est une fonction test sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, pour tout $p \geq 0$, la suite de fonctions $(f_k^{(p)})_k$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction test que l'on déterminera. Cette convergence est-elle dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$?

Exercice **1.8.2.** Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. Établir si parmi les suites suivantes
$$\psi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x)\,; \quad \Phi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx) \ \text{ et } \ \theta_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(\frac{x}{k}) \ \ (\text{où } \ k \in \mathbb{N}^*),$$
il existe des suites convergentes dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice **1.8.3.** 1. Soient $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, montrer que la fonction ψ_t, définie par
$$\psi_t(x) = \frac{\varphi(x + t\,h) - \varphi(x)}{t},$$
est une fonction test sur $\mathbb{R}^n$.

2. Prouver que ψ_t converge dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ vers une une fonction test ϕ que l'on déterminera, lorsque t tend vers 0.

Exercice 1.8.4. 1. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Montrer que l'application $[f]$, définie sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} [f] : \mathfrak{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \textstyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \end{aligned}$$

est une distribution d'ordre 0.

2. On veut prouver l'injection continue $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega)$. On considère alors l'application linéaire suivante

$$\begin{aligned} j : \ L^1_{\text{loc}}(\Omega) &\longrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega) \\ f &\longmapsto j(f) = [f]. \end{aligned}$$

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que $[f] = 0$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

$i)$ Soient K un compact de Ω, $\theta \in \mathfrak{D}(\Omega)$ valant 1 sur K et $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{D}(\Omega)$ une approximation de l'identité. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le produit de convolution $\rho_k * (\theta\, f)$ est nul.

$ii)$ En déduire que $f = 0$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Exercice 1.8.5. 1. Soit $a \in \Omega$. Prouver que la masse de Dirac $\begin{aligned} \delta_a : \mathfrak{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(a) \end{aligned}$ est une distribution d'ordre 0 qui n'est pas régulière.

2. Montrer que $\mathcal{V}p\left(\frac{1}{x}\right)$ la valeur principale de $\frac{1}{x}$ définie sur $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle \mathcal{V}p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}),$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$. Quel est son ordre ? Est-elle régulière ?

Exercice 1.8.6. 1. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ de l'équation $(E) : x\,T = 0$.

2. Déduire toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $(E') : x\,T = 1$.

Exercice 1.8.7. 1. Montrer que $[\mathcal{H}]' = \delta$, où $\mathcal{H}$ est la fonction de Heaviside définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \mathcal{H}(x) = 0 & \text{si } x < 0\,; \\ \mathcal{H}(x) = 1 & \text{si } x > 0\,; \\ \mathcal{H}(0) = a \in \mathbb{R} & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Montrer par deux méthodes que $[\log|x|]' = \mathcal{V}p\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 1.8.8. Soient $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $x \in \operatorname{supp} T$ si, et seulement si, pour tout ouvert Ω contenant x, il existe $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ tel que $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.
2. Prouver que $\operatorname{supp}[f] = \operatorname{supp} f$.
3. Montrer que $\operatorname{supp}(D^\alpha T) \subset \operatorname{supp} T$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
4. Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$. Montrer que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Exercice 1.8.9. $\delta^{(i)}$ représente la $i^{\text{ème}}$ dérivée de la masse de Dirac sur $\mathbb{R}$. Soient $p,\ q,\ m$ et n des entiers naturels.

1. Calculer la distribution $T = x^p\,\delta^{(q)}$.
2. Calculer $T = \left[x^p\,\delta^{(q)}\right] * \left[x^m\,\delta^{(n)}\right]$.

Exercice 1.8.10.
1. Calculer $\delta_a * \delta_b$.
2. En posant $f_1 = \chi_{[a,b]}$ et $f_2 = \chi_{[c,d]}$, calculer $([f_1] * [f_2])''$.
3. Montrer que si $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, alors $T * 1 =< T, 1 > [1]$.
4. Soient $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ et $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que

$$e^{\alpha x}(S * T) = (e^{\alpha x} S) * (e^{\alpha x} T),\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

et

$$x^n(S * T) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (x^k S) * (x^{n-k} T), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 2

Espaces de Sobolev

2.1 Rappel général sur les espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq +\infty$.

★ Pour $1 \leq p < +\infty$: $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty \right\}$

est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$.

★ Pour $p = +\infty$: $L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \sup_{x \in \Omega} \mathrm{ess} |f(x)| < +\infty \right\}$

est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \mathrm{ess} |f(x)|$.

Théorème 2.1.1. *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

Théorème 2.1.2. ***"Théorème de Riez"*** *Soient $1 < p < +\infty$ et p' son conjugué, c'est-à-dire, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour tout $T \in (L^p(\Omega))'$, il existe un, et un seul, élément $u \in L^{p'}(\Omega)$ tel que*

$$\langle T, v \rangle = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x, \ \forall v \in L^p(\Omega).$$

De plus
$$\|T\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^{p'}}.$$

On peut alors identifier le dual topologique de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$.

Résumé :

L'espace L^p	Banach	séparable	réflexif	Espace dual
L^p pour $1 < p < +\infty$	oui	oui	oui	$L^{p'}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
L^1	oui	oui	non	L^∞
L^∞	oui	non	non	contient strictement L^1

Remarque 2.1.3. Pour $1 \leq p < +\infty$:
$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_K |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \right\}.$
Pour un ouvert Ω borné ou de mesure finie, on a

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega),$$

c'est-à-dire, $u_j \longrightarrow 0$ dans $L^p(\Omega) \Longrightarrow u_j \longrightarrow 0$ dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega) \Longrightarrow u_j \longrightarrow 0$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Lemme 2.1.4. (Lemme de Fatou)
Soit (f_k) une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telle que

$i)$ Pour tout k, $f_k(x) \geq 0$ p.p dans Ω;

$ii)$ $\sup_k \int_\Omega f_k \, dx < \infty$.

Alors, on a $\liminf_{k \to \infty} f_k \in L^1(\Omega)$ et $\int_\Omega \liminf_{k \to \infty} f_k \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \, \mathrm{d}x$.

Théorème 2.1.5. ***"Théorème de Convergence Dominée (T.C.D)"***
Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

(i) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f presque partout sur $\mathbb{R}^n$;

(ii) Il existe une fonction positive $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|f_k| \leq g$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Alors $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\|f_k - f\|_1 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad et \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, \mathrm{d}x \xrightarrow[k \to \infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}x.$$

Théorème 2.1.6. ***"Théorème de continuité sous intégrale"***
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ telle que

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application partielle $f_x : y \longmapsto f(x, y)$ est mesurable ;

(ii) Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$, l'application partielle $f_y : x \longmapsto f(x, y)$ est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$;

(iii) Il existe une fonction positive $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ telle que $|f(x, y)| \leq g(y)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$.

Alors l'application $F : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, \mathrm{d}y$ est bien définie et elle est continue au point a.

Théorème 2.1.7. ***"Théorème de dérivabilité sous intégrale"***
Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction définie sur $\mathscr{O} \times \mathbb{R}^m$ telle que

(i) Pour tout $x \in \mathscr{O}$, l'application partielle $f_x : y \longmapsto f(x, y)$ est intégrable ;

(ii) Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$, l'application partielle $f_y : x \longmapsto f(x, y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$;

(iii) Il existe une fonction positive $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ *telle que pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$, *on a* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \leq g(y)$, *pour tout* $x \in \mathscr{O}$ *et pour presque tout* $y \in \mathbb{R}^m$.

Alors l'application $F : x \in \mathscr{O} \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathscr{O}$ *et ses dérivées partielles sont données par*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Remarque 2.1.8. "Inégalité de Young"
Si $1 \leq p < +\infty$ et p' son conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), alors on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \text{ pour tout } a \geq 0 \text{ et tout } b \geq 0. \tag{2.1.1}$$

Proposition 2.1.9. "Inégalité de Hölder"
Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n$ dans $[0, +\infty[$. Alors, si $p \geq 1$ et p' son exposant conjugué, c'est-à-dire, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{p'}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \leq +\infty.$$

Corollaire 2.1.10. Soient p et p' deux exposants conjugués. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, alors $f\,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\|f\,g\|_1 \leq \|f\|_p\,\|g\|_{p'}.$$

Proposition 2.1.11. "Inégalité d'interpolation entre les espaces de Lebesgue"
Si $1 \leq p < q < +\infty$, alors pour tout $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ on a $f \in L^r(\Omega)$, pour tout $r \in [p, q]$ et

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{1-\alpha}, \tag{2.1.2}$$

où $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

2.2 Les espaces de Sobolev

Définition 2.2.1. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ *et* $m \in \mathbb{N}$. *On appelle* ***espace de Sobolev sur*** Ω ***d'ordre*** m, *le sous-espace de* $L^p(\Omega)$, *noté* $W^{m,p}(\Omega)$ *et définie par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \textit{ tel que } |\alpha| \leq m\},$$

où D^α *désigne la dérivée partielle d'ordre* α *au sens des distributions.*

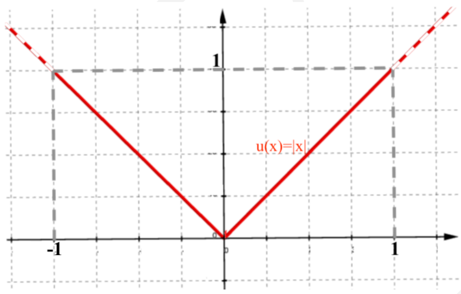
L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \displaystyle\max_{0\leq|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Remarque 2.2.2. On vérifie aisément que la définition 2.2.1 est équivalente à
$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, \text{ il existe } g_\alpha \in L^p(\Omega), \\ \text{tel que } \displaystyle\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \end{array} \right\}.$$
On appelle g_α la dérivée faible (ou la dérivée au sens de distributions) de u à l'ordre α et la note $D^\alpha u$.

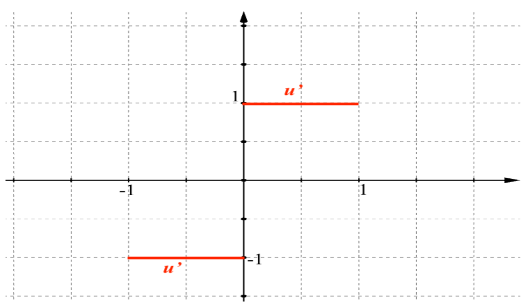
Exemples 2.2.3. 1. $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

2. Soit u la distribution régulière définie sur $\Omega =]-1,1[$ par $u(x) = |x|$.



Pour tout $1 \leq p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$), on a $\displaystyle\int_{]-1,1[} |u(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty$ (resp. $\displaystyle\sup\text{ess}_{x\in]-1,1[} |u(x)| < +\infty$), alors $u \in L^p(]-1,1[)$ (resp. $u \in L^\infty(]-1,1[)$). Concernant la dérivée de u au sens des distributions et d'après le Théorème de la formule des sauts 1.4.5, on a $[u]' = [u']$ puisque u est continue. Or

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1[; \\ -1 & \text{si } x \in]-1,0[, \end{cases}$$



alors, pour tout $1 \leq p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$), on a $\displaystyle\int_{]-1,1[} |u'(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty$ (resp. $\displaystyle\sup_{x\in]-1,1[} \mathrm{ess}|u'(x)| < +\infty$), donc $u' \in L^p(]-1,1[)$ (resp. $u' \in L^\infty(]-1,1[)$). Par conséquence, $u \in W^{1,p}(]-1,1[)$, pour tout $p \in [1,+\infty]$. Par contre, $[u]'' = [u''] + 2\delta = 2\delta$, alors $[u]'' \notin L^p(]-1,1[)$. Par suite, $u \notin W^{2,p}(]-1,1[)$.

Théorème 2.2.4. *L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

Preuve. "Faite au cours" □

Remarques 2.2.5. 1. On peut munir aussi l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par la norme équivalente

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \displaystyle\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Les deux normes (2.2.1) et (2.2.2) sont notées indifféremment $\| \ \|_{W^{m,p}(\Omega)}$ ou $\| \ \|_{m,p,\Omega}$ (ou tout simplement $\| \ \|_{W^{m,p}}$ ou $\| \ \|_{m,p}$). L'intérêt principal de la norme (2.2.1) est que dans le cas où $p = 2$, elle confère à $W^{m,2}$ une structure hilbertienne, ce qui n'est pas le cas avec la norme définie par (2.2.2).

2. Pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$, noté $H^m(\Omega)$, est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire défini, pour tous $u,\ v \in H^m(\Omega)$, par

$$\begin{aligned}(u|v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u|D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)(x)(D^\alpha v)(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et on a $\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u|u)^{\frac{1}{2}}_{H^m(\Omega)} = \left(\displaystyle\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. D'après le Théorème 2.2.4, l'espace de Hilbert $H^m(\Omega)$ est séparable et réflexif.

3. En général, $\mathscr{E}(\Omega) \not\subseteq L^p(\Omega)$, alors $\mathscr{E}(\Omega) \not\subseteq W^{m,p}(\Omega)$. Par contre $\mathfrak{D}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$.

Définitions 2.2.6. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$ et p' le conjugué de p, c'est-à-dir,e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

⋆ *On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}^{\| \ \|_{m,p}} \subset W^{m,p}(\Omega) \quad \textit{avec inclusion stricte en général.}$$

⋆ *On désigne par* $W^{-m,p'}(\Omega)$ *le dual topologique de* $W_0^{m,p}(\Omega)$*, c'est-à-dire,*

$$W^{-m,p'}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))' \subset \mathfrak{D}'(\Omega).$$

On peut Caractériser ce dual topologique par

$$W^{-m,p'}(\Omega) = \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha \;\mid\; g_\alpha \in L^{p'}(\Omega) \right\}.$$

Alors, si $T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha \in W^{-m,p'}(\Omega)$, on a pour tout $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$,

$$\langle T, u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha g_\alpha, u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\langle g_\alpha, D^\alpha u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, D^\alpha u \,\mathrm{d}x.$$

Exemples 2.2.7. 1. $\delta \in \mathfrak{D}'(]-1,1[)$ où $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0),\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(]-1,1[)$.

On a $\delta = H'$ et $H \in L^\infty(]-1,1[)$, alors $\delta \in W^{-1,\infty}(]-1,1[)$ et pour tout $u \in W_0^{1,1}(]-1,1[)$, on a

$$\langle \delta, u\rangle = -\langle H, u'\rangle = -\int_0^1 u'(t)\,\mathrm{d}t = u(0).$$

2. On pose $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' + \dfrac{1}{x^2+1}$.

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\dfrac{1}{x^2+1} \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f \in W^{-1,2}(\mathbb{R})$ et pour tout $u \in W_0^{1,2}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle f, u\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \frac{u'(t)}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.2.8. Dans le deuxième exemple, on a $p = p' = 2$ et $m = 1$. Dans ce cas, on note $W_0^{1,2}(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$ et son dual topologique $W^{-1,2}(\Omega)$ par $H^{-1}(\Omega)$. Plus généralement, on note $W_0^{m,2}(\Omega)$ par $H_0^m(\Omega)$ et son dual topologique $W^{-m,2}(\Omega)$ par $H^{-m}(\Omega)$.

2.3 Théorèmes d'approximation

Rappel.

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et Ω' un ouvert dont la fermeture $\overline{\Omega'}$ est compacte dans Ω. On note $\Omega' \subset\subset \Omega$.

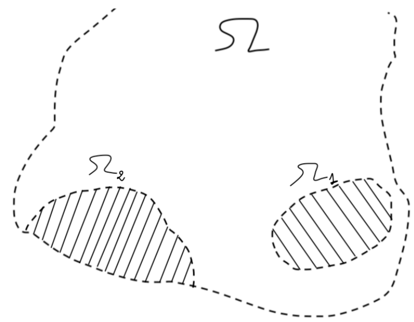
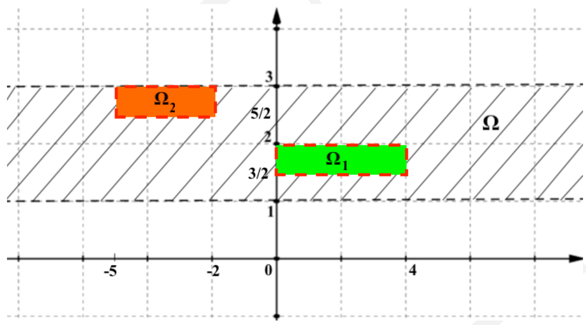


FIGURE 2.1 – $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, par contre $\overline{\Omega_2}$ n'est pas compact dans Ω.

Exemple 2.3.1. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 < y < 3\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ouvert $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x < 4 \text{ et } \dfrac{3}{2} < y < 2\}$ a la fermeture compacte dans Ω, c'est-à-dire, $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Par contre, la fermeture d'ouvert $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -5 < x < -2 \text{ et } \frac{5}{2} < y < 3\}$ n'est pas compacte dans Ω.



2. Soit $J \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\operatorname{supp} J \subset B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$, $0 \leq J \leq 1$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On pose pour tout $\varepsilon > 0$, $J_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^N} J(\dfrac{x}{\varepsilon})$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. On a $J_\varepsilon \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp} J_\varepsilon \subset B_{\mathbb{R}^N}(0,\varepsilon)$, $0 \leq J_\varepsilon \leq \varepsilon^{-N}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon\,\mathrm{d}x = 1$. La famille $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ s'appelle **<u>une famille régularisante.</u>**

3. Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Pour ε assez petit et $x \in \Omega'$ on a

$$(J_\varepsilon * u)(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} u(x-y) J_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B(x,\varepsilon)} u(z) J_\varepsilon(x-z)\,\mathrm{d}z.$$

Il suffit de prendre $0 < \varepsilon < \mathrm{d}(\Omega', \partial\Omega)$ pour s'assurer que la convolution $J_\varepsilon * u$ est bien définie. Grâce au Théorème de dérivation sous l'intégrale, on montre que la fonction $x \longmapsto J_\varepsilon * u(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω'.

4. Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que u est à support compact dans Ω, alors pour ε assez petit, $J_\varepsilon * u$ est aussi à support compact dans Ω.

5. Si $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty[$, alors pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$ on a

$$J_\varepsilon * u \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u \text{ dans } L^p(\Omega').$$

Théorème 2.3.2. *Soit $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante. Soit $u \in W^{m,p}(\Omega)$, alors*

$$J_\varepsilon * u \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u \text{ dans } W^{m,p}(\Omega'), \text{ pour tout } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Preuve. "Faite au cours" □

Corollaire 2.3.3. Si $\operatorname{supp}(u)$ est compact dans Ω, alors $J_\varepsilon * u \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u$ dans $W^{m,p}(\Omega)$

Preuve. Exercice. □

Théorème 2.3.4. ***"Théorème de Friedrichs"***
Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que
(i) $u_k|_\Omega \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$;
(ii) $\nabla u_k|_{\Omega'} \longrightarrow \nabla u|_{\Omega'}$ dans $\left(L^p(\Omega')\right)^N$ pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Preuve. Voir H. Brézis : "Analyse fonctionnelle : Théorie et applications". □

Théorème 2.3.5. $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire,*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \ \forall p \in [1, +\infty[.$$

Preuve. "Faite au cours" □

Remarque 2.3.6. Pour un ouvert $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$, si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, alors $\tilde{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, où $\tilde{u}$ est définie par

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega; \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^\complement. \end{cases}$$

Ce résultat n'est pas toujours vérifié lorsque $u \in W^{m,p}(\Omega)$. On peut donner comme contre-exemple, la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $u(x) = 1$. On a $u \in W^{m,p}(]-1, 1[)$ pour tout m, mais $\tilde{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.3.7. ***"Théorème de Meyers-Serrin"*** *: Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $(u_k)_k$ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ telle que $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

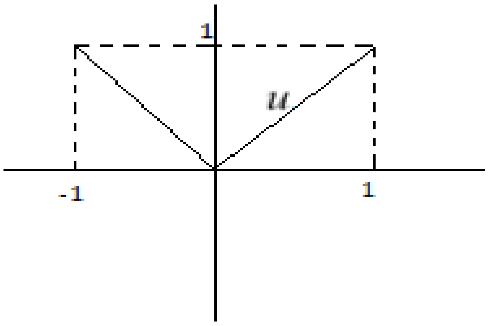
Autrement dit, $H^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W^{m,p}(\Omega)$.

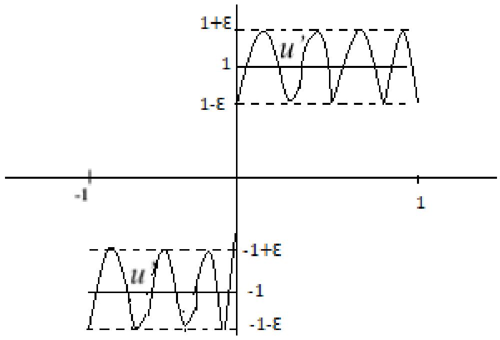
Preuve. Voir R.A.ADAMS : "Sobolev spaces". □

Remarques 2.3.8. 1. Plus précisément, $H^{m,p}(\Omega)$ signifie $\overline{\mathscr{C}^m(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$, mais la suite $(u_k)_k$ utilisée dans la preuve se trouve dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$. Donc, on peut écrire

$$W^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = \overline{\mathscr{C}^m(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = H^{m,p}(\Omega).$$

2. Pour le cas $p = +\infty$, ce résultat n'est pas vérifié. On peut donner comme contre-exemple la fonction $u(x) = |x|$ définie sur l'ouvert $\Omega =]-1, 1[$. On a $u \in W^{1,+\infty}(\Omega)$, mais $u \notin H^{1,+\infty}(\Omega)$.

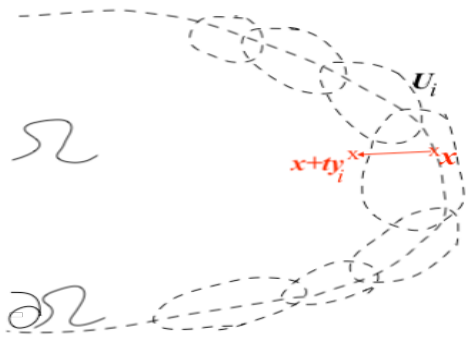




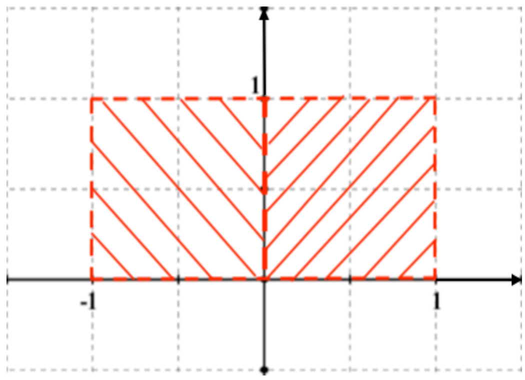
En effet, pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, il n'existe aucune fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1(]-1,1[)$ telle que $\|u' - \varphi'\|_\infty < \varepsilon$ à cause du problème de discontinuité de φ en 0.

Définition 2.3.9. *Un ouvert de $\mathbb{R}^N$ est dit satisfaisant* ***la propriété du segment*** *s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $\partial\Omega$ (la frontière de Ω) et une famille de vecteurs $(y_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tels que,*

$$\forall i \in I,\ \forall x \in \overline{\Omega} \cap U_i,\ \text{ on a } x + ty_i \in \Omega,\ \forall t \in]0,1[.$$



Géométriquement, Ω vérifie la propriété du segment s'il est situé d'un même côté par rapport à sa frontière. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < |x| < 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$ ne vérifie pas la propriété du segment.



Remarque 2.3.10. On note par $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ l'espace de restrictions à Ω des fonctions test de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire,

$$\mathfrak{D}(\overline{\Omega}) = \{u_{|\Omega} \;\mid\; u \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)\} \subset W^{m,p}(\Omega).$$

Comme conséquence du Théorème de Friedrichs 2.3.4, on peut vérifier que si Ω satisfait la propriété du segment, alors $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$. Par contre si Ω ne vérifie pas la propriété du segment, on peut donner comme contre-exemple la fonction définie sur l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < |x| < 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$ par

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pour tout $1 \leq p < +\infty$, mais pour ε assez petit, il n'existe aucune fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ telle que $\|u - \varphi\|_{1,p} < \varepsilon$.

2.4 Théorèmes d'injection : Inégalités de Sobolev

2.4.1 Cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$:

Lemme 2.4.1. Soit $(f_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ une famille de N fonctions dans $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose $f(x) = f_1(\tilde{x_1})\, f_2(\tilde{x_2}) \,\dots\, f_N(\tilde{x_N})$, où $\tilde{x_i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Alors

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ et } \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Preuve. On suit un raisonnement par récurrence sur N.

Théorème 2.4.2. ***"Théorème de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg"***
Soit $1 \leq p < N$, alors l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, où p^* est l'exposant (ou le conjugué) de Sobolev définie par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, $(p^* > p)$. On écrit

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Plus précisément, il existe $C > 0$ $\left(C = C(p,N) = \frac{(N-1)p}{N-p}\right)$, tel que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Notons que $\|\nabla u\|_p = \left(\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$, c'est-à-dire, $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Preuve. Soit $\psi \in \mathscr{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$ (de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact). On a

$$\psi(x_1,\ldots,x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t,x_2,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}t, \text{ alors } |\psi(x_1,\ldots,x_N)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t,x_2,\ldots,x_N)\right| \mathrm{d}t.$$

De même pour les autres variables, on a pour tout $1 \leq i \leq N$

$$|\psi(x_1,\ldots,x_N)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_N)\right| \mathrm{d}t = f_i(\tilde{x}_i).$$

Remarquons que f_i est continue à support compact, alors $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{N-1})$. Donc

$$|\psi(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N (f_i(\tilde{x}_i))^{\frac{1}{N-1}}.$$

D'après le Lemme 2.4.1, appliqué à la famille $(f_i^{\frac{1}{N-1}})_{i\in\{1,\ldots,N\}}$, on a

$$\|\psi\|^{\frac{N}{N-1}}_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^N \|f_i^{\frac{1}{N-1}}\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \prod_{i=1}^N \|f_i\|^{\frac{1}{N-1}}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} = \prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\|^{\frac{1}{N-1}}_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où,

$$\|\psi\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\|_1^{\frac{1}{N}}. \tag{2.4.1}$$

Fixons maintenant $1 \leq p < N$. Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $t \geq 1$, on a $\psi = |\varphi|^{t-1}\varphi \in \mathscr{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$. En appliquant l'estimation (2.4.1) à ψ, on obtient

$$\|\varphi\|^t_{\frac{tN}{N-1}} \leq t\prod_{i=1}^N \left\||\varphi|^{t-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_1^{\frac{1}{N}}$$

et par l'inégalité de Hölder, on en déduit que

$$\|\varphi\|^t_{\frac{tN}{N-1}} \leq t\|\varphi\|^{t-1}_{p'(t-1)} \prod_{i=1}^N \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_p^{\frac{1}{N}}, \text{ où } p' \text{ est le conjugué de } p. \tag{2.4.2}$$

Remarquons que l'estimation (2.4.2) est vérifiée pour tout $p \geq 1$. Alors, si $1 < p < N$, on choisit $t \geq 1$ tel que $\frac{tN}{N-1} = p'(t-1)$, c'est-à-dire, $t = \frac{N-1}{N}p^*$, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ est l'exposant de Sobolev. Ce qui donne

$$\|\varphi\|_{p^*} \leq \frac{p(N-1)}{N-p} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_p^{\frac{1}{N}}.$$

D'où

$$\|\varphi\|_{p^*} \leq \frac{p(N-1)}{N-p} |\nabla \varphi|_p, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N). \tag{2.4.3}$$

Si $p = 1$, c'est-à-dire, $p^* = \frac{N}{N-1}$, l'inégalité (2.4.3) est vérifie d'après (2.4.1).
En utilisant le fait que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(\varphi_j)_j$ dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. D'après (2.4.3), on a $\|\varphi_i - \varphi_j\|_{L^{p^*}} \leq C|\nabla\varphi_i - \nabla\varphi_j|_{L^p}$, où $C = \frac{N-1}{N}p^*$. Comme $\nabla\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \nabla u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $|\nabla\varphi_i - \nabla\varphi_j|_{L^p} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$, ce qui entraine que $(\varphi_j)_j$ est de Cauchy dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ qui est un espace de Banach. Il existe donc $V \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} V$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. La suite $(\varphi_j)_j$ possède alors une sous-suite, notée aussi $(\varphi_j)_j$ qui converge presque partout vers V. Cette sous-suite converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors elle admet une sous-suite notée aussi φ_j qui converge vers u presque partout. D'où $V = u$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire, $u = V$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.
Finalement, par passage à la limite pour l'estimation $\|\varphi_j\|_{L^{p^*}} \leq C|\nabla\varphi_j|_{L^p}$, d'après (2.4.3), on obtient

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq p\frac{N-1}{N-p}|\nabla u|_{L^p}. \qquad \square$$

Corollaire 2.4.3. Si $p \in [1, N[$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [p, p^*]$. C'est-à-dire,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall q \in [p, p^*].$$

Preuve. "Faite au cours" □

Théorème 2.4.4. *"Cas limite où $p = N$"*
L'espace de Sobolev $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans tous les espaces de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^N)$, où $q \in [N, +\infty[$. C'est-à-dire,

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall q \in [N, +\infty[.$$

Preuve. "Faite au cours" □

Théorème 2.4.5. ***"Morrey"***
Soit $p > N$, alors l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, il existe $C = C(N,p) > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|x-y\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_p \text{ pour presque tout } x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4.4}$$

Preuve. Voir H. Brézis : "Analyse fonctionnelle : Théorie et applications". □

Remarques 2.4.6. 1. L'inégalité précédente (2.4.4) implique l'existence d'une fonction $\tilde{u} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p sur $\mathbb{R}^N$. Autrement dit, toute fonction $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pour $p > N$, admet un représentant continu, c'est-à-dire, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

2. Si $N < p < +\infty$, alors pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on a $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} u(x) = 0$.

Corollaire 2.4.7. "Cas d'espace de Sobolev d'ordre supérieur".
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty[$. On les injections suivants selon les valeurs de m et p :

(i) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$, c'est-à-dire, $m < \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p_m}(\mathbb{R}^N)$, où $\frac{1}{p_m} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$. Ainsi, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall q \in [p, p_m]$.

(ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, c'est-à-dire, $m = \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall q \in [p, +\infty[$.

(iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, c'est-à-dire, $m > \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
De plus, si $m - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas entier, en posant $k = E(m - \frac{N}{p})$ et $\theta = (m - \frac{N}{p}) - E(m - \frac{N}{p}) \in]0, 1[$, pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\|D^\alpha u\|_\infty \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ telque } |\alpha| \leq k$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| = k$,

$$|D^\alpha u(x) - |D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \|x - y\|^\theta \text{ p.p. tout } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

En particulier,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^N).$$

Preuve. Tous les résultats du corollaire s'obtiennent par application réitérée de Théorèmes 2.4.2, 2.4.4 et 2.4.5.

Remarque 2.4.8. Le cas $p = 1$ et $m = N$ est assez particulier. En procédant par densité, on vérifie aisément que

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

2.4.2 Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

Définitions 2.4.9.

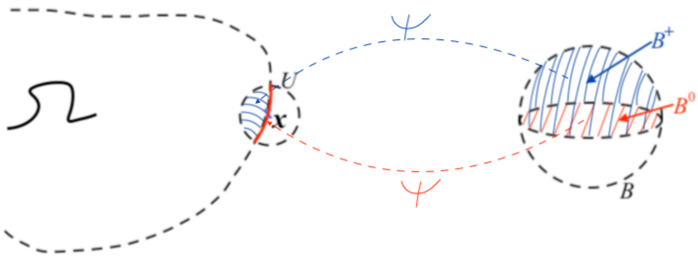
(i) *On appelle le demi-espace supérieur la partie de $\mathbb{R}^N$, notée $\mathbb{R}^N_+$, définie par*

$$\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\right\}.$$

(ii) *Si $B = B_{\mathbb{R}^N}(0, 1)$ est la boule unité ouverte, alors on note*

$$B^+ = B \cap \mathbb{R}^N_+ \text{ et } B^0 = \{x \in B \mid x_N = 0\}.$$

(iii) Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit de classe $\mathscr{C}^m$ ($m \in \mathbb{N}$), si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ouvert U de x et une bijection $\psi : B \longrightarrow U$ tels que $\psi \in \mathscr{C}^m(\overline{B})$ et $\psi^{-1} \in \mathscr{C}^m(\overline{U})$ avec $\psi(B^+) = U \cap \Omega$ et $\psi(B^0) = U \cap \partial\Omega$.



Théorème 2.4.10. *"Théorème de prolongement"*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathscr{C}^1$ et à frontière bornée (ou $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Alors, il existe un opérateur linéaire $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que
(i) $P(u)|_\Omega = u, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$;
(ii) $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$;
(iii) $\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C' \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$,
où C et C' sont des constantes dépendent seulement de p, N et Ω.

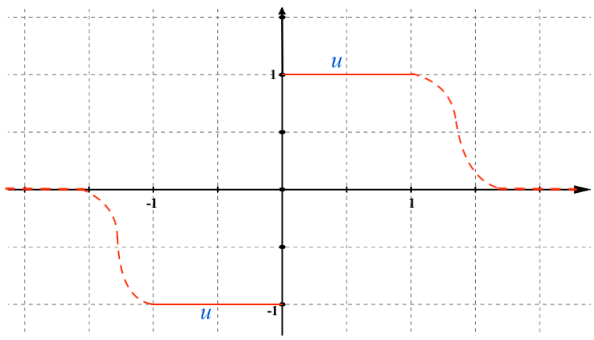
Preuve. Voir H. Brézis : "Analyse fonctionnelle : Théorie et applications". □

Remarques 2.4.11.

1. Soit F l'opérateur de prolongement par 0 en dehors de Ω, c'est-à-dire, $F(u) = \tilde{u}$. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $F(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et F vérifie les 3 propriétés (i), (ii) et (iii) du Théorème précédent 2.4.10. Par contre, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors on n'a pas en général $F(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. On peut donner comme contre-exemple la fonction $u(x) = 1$ sur $\Omega =]-1,1[$ ($N = 1$). On a $u \in W^{1,p}(]-1,1[)$ mais $F(u) = \tilde{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquence, F est différent de P.

2. Sur $\Omega =]-1,0[\cup]0,1[$, on pose
$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1; \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

On a $u \in W^{1,p}(\Omega)$, mais pour tout prolongement de u à $\mathbb{R}$, noté $P(u)$, on a $P(u) \notin W^{1,p}(\mathbb{R})$ puisque $P(u)$ va présenter un saut en 0.



Corollaire 2.4.12. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec frontière bornée, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

(i) Si $m < \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, p^*]$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.

(ii) Si $m = \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$.

(iii) Si $m > \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Preuve. "Faite au cours" □

Remarque 2.4.13. La conclusion du Corollaire 2.4.7 reste vraie si l'on remplace $\mathbb{R}^N$ par Ω. Plus précisément, pour le cas $m > \frac{N}{p}$, si $m - \frac{N}{p}$ n'est pas entier, alors

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^k(\overline{\Omega}), \text{ où } k = E(m - \frac{N}{p}).$$

<u>**Rappel.**</u> ★ Rappelons que $E \hookrightarrow F$ signifie l'injection continue de E dans F, c'est-à-dire, E est un sous-espace de F et $Id : E \longrightarrow F$ est continue. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que $\|x\|_F \leq M \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

★ On rappelle aussi de **l'injection compacte**, notée $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ et qui signifie que A est précompact, c'est-à-dire, $\overline{A}$ est compact, dans F, pour tout ensemble A borné dans E. Autrement dit, de toute suite bornée dans E, on peut extraire une sous-suite convergente dans F.

Théorème 2.4.14. ***"Théorème de Rellich-Kondrachov"***
Soit Ω un ouvert <u>borné</u> de classe $\mathscr{C}^1$.

(i) *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*

(ii) *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.*

(iii) *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.*

Preuve. Voir H. Brézis : "Analyse fonctionnelle : Théorie et applications". □

Corollaire 2.4.15. Pour tout p on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Preuve. Exercice.

Remarque 2.4.16. Pour l'espace $W^{1,p}_0(\Omega)$, le Théorème de Rellich-Kondrachov 2.4.14 reste vrai mais seulement avec l'hypothèse Ω est borné.

2.5 Inégalité de Poincaré

Théorème 2.5.1. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tel que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega),$$

où $|\nabla u|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Preuve. "Faite au cours" □

Remarques 2.5.2. 1. L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné seulement dans une seule direction.

2. Si Ω est un ouvert quelconque, alors l'inégalité de Poincaré n'est pas valable en général (Voir TD).

3. L'inégalité de Poincaré est vérifie seulement sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et pas sur $W^{1,p}(\Omega)$ en général. Donner un contre-exemple.

Corollaire 2.5.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné au moins dans une direction. Alors la semi-norme sur $W^{1,p}(\Omega)$ définie par

$$|u|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = |\nabla u|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Exercice.

2.6 Trace et formule de Green

Lemme 2.6.1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\operatorname{supp}(u)$ est compact dans Ω, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. "Faite au cours" □

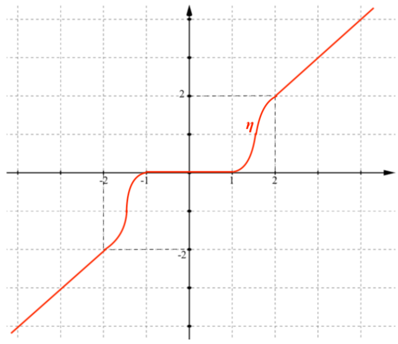
Théorème 2.6.2. ***"Notion de trace"***
Soit Ω un ouvert de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$ avec $p \in [1, +\infty[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u = 0$ sur $\partial\Omega$;

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Pour $(i) \Longrightarrow (ii)$. Commençons d'abord par le cas où $\operatorname{supp}(u)$ est borné. Utilisons une fonction $\eta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $|\eta(t)| \leq |t|, \ \forall t \in \mathbb{R}$ et

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leq 1; \\ t & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases}$$



Posons $u_k(x) = \frac{1}{k}\eta(ku(x))$. On peut vérifier aisément que $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ et $u_k \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. D'autre part $\operatorname{supp}(u_k) \subset \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \frac{1}{k}\} \subset \operatorname{supp}(u)$. Donc $\operatorname{supp}(u_k)$ est compact contenu dans Ω. Notons que pour les inclusions précédentes, on a besoin de vérifier que $A_k = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \frac{1}{k}\}$ est fermé. En effet, si $(x_j)_j$ est une suite dans A_k telle que $x_j \longrightarrow x$, alors $|u(x_j)| \geq \frac{1}{k}$, $\forall j$. Ce qui implique que $|u(x)| \geq \frac{1}{k}$ puisque $u \in \mathscr{C}(\overline{\Omega})$. De plus $x \in \overline{\Omega}$, mais $x \notin \partial\Omega$ car $u|_{\partial\Omega} = 0$. Donc $x \in \Omega$ tel que $|u(x)| \geq \frac{1}{k}$, c'est-à-dire, $x \in A_k$. En utilisant le Lemme 2.6.1, on déduit que $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et par suite $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Dans le cas général, c'est-à-dire, $\operatorname{supp}(u)$ n'est pas borné, on utilise la suite $u_k = \varphi_k u$ des "tronquées" de u où $\varphi_k(x) = \varphi(\frac{x}{k})$ avec $\varphi \in \mathfrak{D}(B(0,2))$ et $\varphi = 1$ sur $\overline{B}(0,1)$. On a $u_k \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}(u_k)$ est borné et $u_k|_{\partial\Omega} = 0$. Alors $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall k$. Comme $u_k \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pour la réciproque $(ii) \Longrightarrow (i)$, en utilisant la régularité du bord et une partition de l'unité, le problème se réduit à l'implication suivante :

$$u \in W_0^{1,p}(B^+) \cap \mathscr{C}(\overline{B}_+) \Longrightarrow u|_{B^0} = 0.$$

Comme $u \in W_0^{1,p}(B^+)$, alors il existe $(\varphi_k)_k \in \mathfrak{D}(B^+)$ tel que $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) = (x', x_N) \in B^+$, on a

$$|\varphi_k(x', x_N)| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_N}(x', t) \right| \mathrm{d}t.$$

Alors, pour $0 < \varepsilon < 1$ fixé, on a

$$\int_{\|x'\|<1} \int_0^{\varepsilon} |\varphi_k(x', x_N) \, \mathrm{d}x' \mathrm{d}x_N \leq \varepsilon \int_{\|x'\|<1} \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_N}(x', t) \right| \mathrm{d}x' \mathrm{d}t.$$

A la limite, quand $k \to +\infty$, on obtient

$$\int_{\|x'\|<1} \int_0^{\varepsilon} |u(x', x_N) \mathrm{d}x' \mathrm{d}x_N \leq \varepsilon \int_{\|x'\|<1} \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t) \right| \mathrm{d}x' \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\|x'\|<1}\int_0^{\varepsilon}|u(x',x_N)|\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_N \leq \int_{\|x'\|<1}\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\right|\mathrm{d}x'\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variable $x_N = \varepsilon\, t$ qui implique que $\displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|u(x',x_N)|\,\mathrm{d}x_N = \int_0^1 |u(x',\varepsilon\, t)|\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u(x',0)|$, et en passant à la limite, quand $\varepsilon \to 0$ on obtient,

$$\int_{\|x'\|<1}|u(x',0)|\mathrm{d}x' \leq 0.$$

Ce qui entraine que

$$u(x',0) = 0, \text{ pour tout } x' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ tel que } \|x'\| < 1.$$

C'est-à-dire, $u|_{B^0} = 0$. $\square$

Corollaire 2.6.3. "Opérateur trace"
Soit Ω un ouvert de classe C^1 à frontière bornée où $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\gamma_0 : \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^p(\partial\Omega)\\ u &\longrightarrow u|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Alors γ_0 est bien définie et elle admet un prolongement $\widetilde{\gamma_0}$ linéaire, continue à $W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\ker\widetilde{\gamma_0} = W^{1,p}_0(\Omega)$.
L'application $\widetilde{\gamma_0} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ est appelée **l'opérateur trace** d'ordre zéro. Ainsi, $W^{1,p}_0(\Omega)$ est l'espace des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ de trace nulle sur $\partial\Omega$.

Propriété 2.6.4. "Formule de Green"
Soit Ω un ouvert borné de frontière $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et tout $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\, v\,\nu_i\,\mathrm{d}\sigma \;\; (i = 1,\ldots,n),$$

où ν_i est le cosinus directeur de $\overrightarrow{\nu}$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire, $\nu_i = \overrightarrow{\nu}.\overrightarrow{e_i}$ avec $\overrightarrow{\nu} = \displaystyle\sum_{i=1}^N \cos(\alpha_i).\overrightarrow{e_i}$. Notons que l'intégrale de surface a un sens puisque $u|_{\partial\Omega},\; v|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$, d'après le Corollaire 2.6.3.
De la même manière, on peut parler de $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ pour une fonction $u \in W^{2,p}(\Omega)$, en posant $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = (\nabla u/_{\partial\Omega})\,.\overrightarrow{\nu} \in L^p(\partial\Omega)$ et on a la formule de Green suivante :

$$-\int_\Omega \Delta u\, v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,v\,\mathrm{d}\sigma,\;\; \forall u,v \in H^2(\Omega),$$

avec $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est l'opérateur Laplacien et $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.

2.7 Exercices

Exercice 2.7.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si, et seulement si, $u \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq m$, il existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$, tel que $\displaystyle\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi,\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

Exercice 2.7.2. On considère la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$u(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$. A-t-on $u \in H^2(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $v = 1 - u \in H^1(]-2, 2[)$. A-t-on $v \in H^1(\mathbb{R})$?

Exercice 2.7.3. L'application suivante $u(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ 0 & \text{si } -1 < t \leq 0 \end{cases}$ appartient-elle aux espaces de Sobolev suivants : $W^{1,2}(]-1, 1[)$, $H_0^1(]-1, 1[)$ et $H^2(]-1, 1[)$?

Exercice 2.7.4. Soit $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $|\rho(t)| \leq |t|$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leq 1; \\ t & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_k(x) = \frac{1}{k}\rho(k\, u(x)),\ \forall x \in \Omega.$$

Montrer que la suite $(u_k)_k$ converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 2.7.5. Montrer par des contre-exemples que l'inégalité de Poincaré n'est vérifiée ni sur $W^{1,p}(\Omega)$, ni pour un ouvert Ω non borné dans toutes les directions.

Exercice 2.7.6. Soit $p \in [1, 3[$. On désigne par $B = B_{\mathbb{R}^3}(0, 1)$ la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^3$.

1. Dans quels espaces de Lebesgue $L^q(B)$, s'injecte continûment l'espace de Sobolev $W^{1,p}(B)$.
2. Pour $q > \frac{3p}{3-p}$, on considère la fonction u définie sur $B\backslash\{0\}$ par

$$u(x, y, z) = \|(x, y, z)\|_2^\lambda,\ \text{avec } \lambda < 0.$$

   2.1. Montrer que $u \in L^p(B)$ si, et seulement si, $\lambda > -\frac{3}{p}$.
   2.2. Vérifier que $u \in W^{1,p}(B)$ si $\lambda > 1 - \frac{3}{p}$.
   2.3. Déduire que $W^{1,p}(B) \nsubseteq L^q(B)$.

Exercice 2.7.7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe assez régulier (de frontière $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

1. Montrer que l'application $v \longmapsto |||v||| = \left(|v|_{1,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Gamma}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $H^1(\Omega)$, où $|v|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2$, $\|v\|_{0,\Gamma}^2 = \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2$ et $\Gamma = \partial\Omega$ est la frontière de Ω.
2. Montrer que la norme $|||\ |||$ est équivalente sur $H^1(\Omega)$ à la norme $\|\ \|_{1,\Omega}$.

Chapitre 3

Formulation variationnelle de certains problèmes aux limites

3.1 Préliminaires

3.1.1 Introduction

Par définition, une équation aux dérivées partielles (EDP) a pour inconnue une fonction de plusieurs variables, alors qu'une équation différentielle ordinaire (EDO) a pour inconnue une fonction d'une seule variable.

L'analyse mathématique (et numérique) des EDP est un très vaste domaine dont l'objectif est de comprendre et d'étudier les problèmes modélisant plusieurs phénomènes distribués souvent d'origine physique, à savoir, la mécanique quantique, la relativité générale, la théorie électromagnétique, la dynamique des fluides, le fonctionnement du GPS (Global Positioning System), l'aéronautique, l'astronomie, la biologie, la dynamique du populations, etc .... L'étude des EDP occupe l'intérêt des mathématiciens depuis la deuxième moitié du $17^{ème}$ siècle, à travers les travaux élaborés par Newton et Leibniz concernant la dynamique du point matériel. Cette théorie a vu le jour avec Euler et d'Alembert quelque 70 ans plus tard, et Laplace encore 40 ans après. Au cours de la seconde moitié de dernier siècle et au début du siècle actuel, les études des EDP se sont intensifiées avec l'avancement de divers domaines scientifiques.

Notre but dans ce chapitre, est d'introduire quelques idées simples afin de comprendre des problèmes élémentaires en suivant l'approche variationnelle, pour étudier l'existence (ainsi que l'unicité) de solution à certaines équations aux dérivées partielles satisfaisant des conditions supplémentaires, à savoir les valeurs en certains points de la fonction inconnue ou de ses dérivées.

3.1.2 Types de problèmes

Problème de type Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = f \ \text{ dans } \ \Omega; \\ \qquad\quad u & = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \longleftarrow \text{"Condition de Dirichlet"}$$

Problème de type Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = f \ \text{ dans } \ \Omega; \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \longleftarrow \text{"Condition de Neumann"}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \overrightarrow{\nu}$ désigne la dérivée normale extérieure de u avec $\overrightarrow{\nu}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Problème de type Fourier

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = f \ \text{ dans } \ \Omega; \\ \quad u + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \longleftarrow \text{"Condition de Fourier"}$$

3.1.3 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 3.1.1. ***"Théorème de Lax-Milgram (Exposé)"***
Soit H un espace de Hilbert. Soient $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H \times H$ et $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H, c'est-à-dire,

(i) Il existe $K > 0$ tel que $|a(u,v)| \leq K \|u\| \|v\|$, $\forall (u,v) \in H \times H$, "La continuité de la forme bilinéaire a";

(ii) Il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u \in H$, "La coercivité de la forme bilinéaire a";

(iii) Il existe $M > 0$ tel que $|L(u)| \leq M\|u\|$, $\forall u \in H$, "La continuité de la forme linéaire L".

Alors, le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H \quad \text{tel que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H, \end{cases}$$

admet une solution unique. Autrement dit,

$$\forall L \in H', \exists! u \in H \ \text{ tel que } a(u,v) = \langle L, v\rangle, \ \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, c'est-à-dire, $a(u,v) = a(v,u)$ pour tout $(u,v) \in H^2$, alors la solution u de $(\mathcal{P})$ est caractérisée comme solution du problème de minimisation suivant,

$$\begin{cases} \qquad\qquad u \in H \quad \text{tel que} \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - \langle L, u\rangle \ = \min\limits_{v \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v,v) - \langle L, v\rangle \right\} \end{cases}$$

3.2 Étude de certaines problèmes linéaires

3.2.1 Formulation variationnelle d'un problème de Dirichlet homogène

Soit Ω un ouvert borné assez régulier. On propose d'aborder la résolution du problème elliptique $(\mathcal{P}_0)$ du second ordre de type Dirichlet homogène :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \quad & \text{tel que} \\ -\Delta u + c(x)\, u = f \quad & \text{dans } \Omega, && (3.2.1) \\ u = 0 \quad & \text{sur } \partial\Omega, && (3.2.2) \end{aligned}$$

où $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. Notons que $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien de u. La condition aux limites (3.2.2) s'appelle la condition de Dirichlet "homogène".

Une solution classique de $(\mathcal{P}_0)$ est une fonction $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (3.2.1) et (3.2.2) les deux équations du problème $(\mathcal{P}_0)$ au sens usuel. Le programme suivant décrit les grandes lignes de l'approche variationnelle en théorie des équations aux dérivées partielles.

Étape A : On précise la notion de solution faible, celle-ci fait intervenir les espaces de Sobolev qui sont les outils de base.

Étape B : On établit l'existence et l'unicité d'une solution faible par la méthode variationnelle, via le théorème de Lax-Milgram.

Étape C : On prouve que la solution faible est régulière (de classe $\mathscr{C}^2$ par exemple), c'est un résultat de régularité.

Étape D : Retour aux solutions classiques. C'est-à-dire, on montre qu'une solution faible de classe $\mathscr{C}^2$ est une solution classique.

Commençons par la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_0)$. On suppose que la solution u est suffisamment régulière (par exemple $u \in H^2(\Omega)$). En multipliant (3.2.1) la première équation du problème $(\mathcal{P}_0)$ par $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega -\Delta u\, v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)\, u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'après la formule de Green (2.6.4), on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v \,\mathrm{d}\sigma}_{=0, \text{ car } v|_{\partial\Omega}=0} + \int_\Omega c(x)\, u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$. C'est-à-dire,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)\, u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (3.2.3)$$

Notons que la solution classique de (3.2.1) est de classe $\mathscr{C}^2$, par contre l'équation (3.2.3) a un sens dès que $u \in H^1(\Omega)$, c'est-à-dire, $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^2(\Omega))^N$. Remarquons aussi que le problème $(\mathcal{P}_0)$ est de type Dirichlet homogène "$u = 0$ sur $\partial\Omega$", donc on peut prendre $u \in H_0^1(\Omega)$. On obtient alors le problème variationnel suivant

$$(\mathcal{P}_0)_V \begin{cases} \text{Pour une donnée } f \in L^2(\Omega), \text{ trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)\, u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Définitions 3.2.1.

1. *Le problème $(\mathcal{P}_0)_V$ est appelé formulation variationnelle du problème aux limites $(\mathcal{P}_0)$.*
2. *Une fonction u vérifiant $(\mathcal{P}_0)_V$ est appelée solution faible du problème aux limites $(\mathcal{P}_0)$.*
3. *On dit que le problème est bien posé si,*
   - (i) *Il admet une solution unique ;*
   - (ii) *La solution du problème dépend continûment des données.*

Proposition 3.2.2. Soit $u \in H^2(\Omega)$. u est solution du problème aux limites $(\mathcal{P}_0)$ si, et seulement si, u est solution du problème variationnel $(\mathcal{P}_0)_V$.

Preuve.
$\boxed{\Longrightarrow}$ L'implication directe est déjà démontrée pour obtenir le problème variationnel (3.2.4).
$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, soit $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $(\mathcal{P}_0)_V$, c'est-à-dire, u satisfait l'équation (3.2.4) pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. En particulier pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, ce qui entraîne que

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\in L^2(\Omega)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \underbrace{c\,u}_{\in L^2(\Omega)} \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \underbrace{f}_{\in L^2(\Omega)} \varphi \,\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Comme $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, alors on obtient au sens des distributions

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle + \langle c\,u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

d'où,

$$-\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle + \langle c\,u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

ce qui signifie que

$$-\Delta u + c\,u = f \text{ dans } \mathfrak{D}'(\Omega). \tag{3.2.5}$$

Cette dernière équation (3.2.5) est identique à l'équation (3.2.1) du problème $(\mathcal{P}_0)$, mais seulement au sens faible (c'est-à-dire, au sens des distributions). En utilisant le fait que Δu, $c\,u$ et f sont des éléments de $L^2(\Omega)$, on déduit que $-\Delta u + c\,u = f$ dans $L^2(\Omega)$, d'où $-\Delta u + c\,u = f$ presque partout sur Ω.

Pour la condition de Dirichlet homogène (3.2.2), il suffit d'appliquer le Théorème de trace 2.6.2 puisque $u \in H_0^1(\Omega)$, alors on a $u = 0$ sur $\partial\Omega$. D'où u est solution du problème aux limites $(\mathcal{P}_0)$.

Remarque 3.2.3. L'intérêt de la formulation variationnelle est qu'elle est moins exigeante au point de vue régularité puisqu'elle transforme un problème du second ordre en un autre problème équivalent du premier ordre. Elle est aussi plus réaliste au point de vue physique permettant une approche numérique efficace.

Théorème 3.2.4. ***"Existence et unicité de solution"***
Si $f \in L^2(\Omega)$ et $c \in L^\infty(\Omega)$, alors le problème variationnelle $(\mathcal{P}_0)_V$ admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ sous l'une des deux conditions suivantes :

$$c \geq 0 \ p.p. \ sur \ \Omega, \quad ou \ \|c^-\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{[C_p(\Omega)]^2}$$

où $C_p(\Omega)$ est la constante de l'inégalité de Poincaré et $c^-(x) = \begin{cases} c(x) & si\ c(x) \leq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$.

Preuve. Il suffit d'utiliser le Théorème de Lax-Milgram 3.1.1, en choisissant

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, \mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)\, u\, v\, \mathrm{d}x \text{ et } L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,$$

le problème variationnel $(\mathcal{P}_0)_V$ devient

$$(\mathcal{P}_0)_V \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \ \text{ tel que;} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

L'application L est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. En effet, pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et tout $v,\ w \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$L(\alpha\, v + \beta\, w) = \int_\Omega f\, (\alpha\, v + \beta\, w)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega f\, v\, \mathrm{d}x + \beta \int_\Omega f\, w\, \mathrm{d}x = \alpha\, L(v) + \beta\, L(w).$$

Ainsi, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, et d'après l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré on a

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f\, v\, \mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |f|\, |v|\, \mathrm{d}x \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq C_p(\Omega)\, \|f\|_2 |v|_{1,\Omega},$$

avec $|\ |_{1,\Omega} = (\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\right\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ est la norme réduite sur $H_0^1(\Omega)$.

L'application $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. En effet, pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et tout $v,\ w_1,\ w_2 \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} a(\alpha w_1 + \beta w_2, v) = & \int_\Omega \nabla(\alpha w_1 + \beta w_2).\nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)\,(\alpha w_1 + \beta w_2)\,v \,\mathrm{d}x \\ = & \ \alpha \int_\Omega \nabla w_1.\nabla v \,\mathrm{d}x + \beta \int_\Omega \nabla w_2.\nabla v \,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Omega c(x)\,w_1\,v \,\mathrm{d}x + \beta \int_\Omega c(x)\,w_2\,v \,\mathrm{d}x \\ = & \ \alpha a(w_1, v) + \beta a(w_2, v). \end{aligned}$$

De même pour la linéarité par rapport à la deuxième composante. Ainsi, pour la continuité et d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x \leq & \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_2 \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2 \\ \leq & \left(\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ = & \ |w|_{1,\Omega}\,|v|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

On a aussi $\int_\Omega |c(x)|\,|w|\,|v|\,\mathrm{d}x \leq \|c\|_\infty \|w\|_2 \|v\|_2$. Alors,

$$\begin{aligned} |a(w,v)| \leq & \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x + \int_\Omega |c(x)|\,|w|\,|v|\,\mathrm{d}x \\ \leq & \ |w|_{1,\Omega}\,|v|_{1,\Omega} + \|c\|_\infty \|w\|_2 \|v\|_2 \\ \leq & \ |w|_{1,\Omega}\,|v|_{1,\Omega} + [C_p(\Omega)]^2 \|c\|_\infty |w|_{1,\Omega}\,|v|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

où $C_p(\Omega)$ est la constante associée à l'inégalité de Poincaré. Par conséquent,

$$|a(w,v)| \leq (1 + [C_p(\Omega)]^2 \|c\|_\infty) |w|_{1,\Omega}\,|v|_{1,\Omega}.$$

Reste à vérifier la coércivité de l'application $a(.,.)$. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$a(v,v) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)\,v^2 \,\mathrm{d}x = |v|_{1,\Omega}^2 + \int_\Omega c(x)\,v^2 \,\mathrm{d}x.$$

Alors, si $c \geq 0$ p.p. sur Ω, on a $a(v,v) \geq |v|_{1,\Omega}^2$, d'où la coércivité de $a(.,.)$. Sinon, on pose

$$c^-(x) = \begin{cases} c(x) & \text{si } \ c(x) \leq 0; \\ 0 & \text{si } \ c(x) > 0. \end{cases}$$

Alors $\int_\Omega c^-(x)\,v^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega c(x)\,v^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ce qui entraîne que

$$-\|c^-\|_\infty \int_\Omega v^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega c(x)\,v^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'où,

$$\begin{aligned} a(v,v) = &\ |v|_{1,\Omega}^2 + \int_\Omega c(x)\, v^2 \,\mathrm{d}x \\ \geq &\ |v|_{1,\Omega}^2 - \|c^-\|_\infty \,\|v\|_2^2 \\ \geq &\ |v|_{1,\Omega}^2 - \|c^-\|_\infty [C_p(\Omega)]^2 \,|v|_{1,\Omega}^2 \\ = &\ (1 - [C_p(\Omega)]^2 \,\|c^-\|_\infty)\ |v|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Finalement, la condition $\|c^-\|_\infty < \dfrac{1}{[C_p(\Omega)]^2}$ assure la coércivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$. Par conséquence, le problème variationnel $(\mathcal{P}_0)_V$ admet une solution unique u dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, d'après le Théorème de Lax-Milgram 3.1.1.

Remarque 3.2.5. Pour le régularité de la solution, on a déjà montré que la solution u du problème $(\mathcal{P}_0)_V$ vérifie $\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Théorème 3.2.6. *Avec les mêmes hypothèses du Théorème précédent 3.2.4, il existe $C_0 > 0$ tel que*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. D'après la coercivité de a et la continuité de L, on a

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u,u) = L(u) \leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où $M = C_p(\Omega)\, \|f\|_{L^2(\Omega)}$ et $\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } c \geq 0 \text{ p.p sur } \Omega; \\ 1 - [C_p(\Omega)]^2 \,\|c^-\|_\infty & \text{si} \|c^-\|_\infty < \frac{1}{[C_p(\Omega)]^2}. \end{cases}$

Alors,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_p(\Omega)}{\alpha} \,\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où le résultat.

Remarque 3.2.7. Les deux derniers théorèmes prouvent que le problème $(\mathcal{P}_0)$ est bien posé.

Exercice 3.2.2. Refaire la même étude pour un problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(\mathcal{P}_g) \begin{cases} \text{Trouver } u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tel que} \\ -\Delta u + c(x)\, u = f & \text{dans } \Omega; \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour que $\widetilde{\gamma_0}(u) = g$ a un sens avec $u \in H^1(\Omega)$, on suppose que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) = Im(\widetilde{\gamma_0}) \subset L^2(\partial\Omega)$, où $\widetilde{\gamma_0}$ est l'opérateur trace. Pour simplifier, on suppose qu'il existe $G \in H^2(\Omega)$ tel que $\widetilde{\gamma_0}(G) = g$.

3.2.3 Formulation variationnelle d'un problème de Neumann

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ suffisamment régulier et f une donnée dans $L^2(\Omega)$, on considère le problème elliptique $(\mathcal{P}_N)$ de type Neumann

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ -\Delta u + u = f & \quad \text{dans } \Omega, \qquad (3.2.6) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \quad \text{sur } \partial\Omega, \qquad (3.2.7) \end{aligned}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \overrightarrow{\nu}$ désigne la dérivée normale extérieur de u avec $\overrightarrow{\nu}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieur à $\partial\Omega$. On suppose que la solution u de $\mathcal{P}_N$ est suffisamment régulière ($u \in H^2(\Omega)$). En multipliant la premier équation (3.2.6) du problème $(\mathcal{P}_N)$ par $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u\, v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v\,\mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

La formule de Green (2.6.4) entraîne

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega u\, v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v\,\mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v\,\mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

D'où la formulation faible (ou variationnelle) suivante

$$(\mathcal{P}_N)_V \begin{cases} \text{Pour une donnée } f \in L^2(\Omega), \text{ trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v\,\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \qquad (3.2.8)$$

Réciproquement, si u est une solution de $(\mathcal{P}_N)_V$, alors pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ on a

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\,\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Au sens de distributions on obtient

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle + \langle u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

c'est-à-dire,

$$-\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle + \langle u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

D'où,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(\Omega).$$

Comme $f \in L^2(\Omega)$ (de même pour u et Δu), alors $-\Delta u + u = f$ dans $L^2(\Omega)$, d'où $-\Delta u + u = f$ presque partout sur Ω.

Pour s'assurer de la condition de Neumann (3.2.7), on applique la formule de Green (2.6.4) à l'équation du problème variationnel (3.2.8) pour conclure que

$$-\int_\Omega \Delta u\, v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

C'est-à-dire,

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\ v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \,\mathrm{d}\sigma = 0, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or $-\Delta u + u - f = 0$ p.p sur Ω, alors

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \,\mathrm{d}\sigma = 0, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

En admettant que l'espace des traces $Im(\widetilde{\gamma_0})$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$, alors

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \,\mathrm{d}\sigma = 0, \ \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

D'où,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ p.p sur } \partial\Omega.$$

Théorème 3.2.8. *Pour une donnée $f \in L^2(\Omega)$, le problème variationnelle $(\mathcal{P}_N)_V$ admet une unique solution.*
De plus, il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. Appliquer le Théorème de Lax-Milgram 3.1.1, en posant

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x) \,\mathrm{d}x.$$