Département de mathématiques

Année universitaire 2022-2023
SMA S4 - Analyse 6

Partie II : Analyse vectorielle

J. Assim
H. Bellitir

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales curvilignes

1.1 Définitions

1.1.1 Arcs paramétrés

Une fonction continue $\gamma : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, J intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, sera appelée *trajectoire.* On peut interpréter γ comme la trajectoire d'une particule dans $\mathbb{R}^n$; on dit que γ est *paramétrée* par un *paramètre* variant dans J ou parcourant J.
Dans l'interprétation évoquée, le paramètre est le temps mais on peut donner d'autres interprétations ; par exemple, on peut considérer γ comme décrivant la position d'un fil métallique dans $\mathbb{R}^n$ où le paramètre est la longueur du fil en partant d'un point fixé sur ce dernier.

Une trajectoire γ s'appelle **un chemin** lorsque $\mathrm{J} = [a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$. Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont *les extrémités* du chemin, $\gamma(a)$ étant *un point initial* (ou origine ou début) et $\gamma(b)$ *un point final* (ou la fin). On dit aussi que le chemin γ relie les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ dans $E \subset \mathbb{R}^n$ si $\gamma(\mathrm{J}) \subset E$. Le chemin γ s'appelle *un lacet* ou *chemin fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Si γ est constante, on dit que le chemin est constant. Le chemin est dit *simple* si $\gamma_{|]a,b[}$ est injective.
Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k, on dit que γ est *un chemin* C^k. On dit que γ est un *chemin* C^k *par morceaux*, s'il existe une subdivision finie de $[a, b]$ donnée par

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$$

telle que $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ est de classe C^k (et γ est continue sur $[a, b]$).

Un exemple particulier d'un chemin C^1 par morceaux est un *chemin polygonal* (*i.e* γ est continue sur $[a, b]$ et affine sur les segments $[t_{i-1}, t_i]$) (ou encore une juxtaposition de segments $[x_{i-1}, x_i]$ où $x_i = \gamma(t_i)$).

Un chemin de classe C^1 est dit *régulier* si de plus $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t. Pour un chemin régulier, on a un *vecteur tangent* τ à chaque point du chemin en posant

$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\| \gamma'(t) \|}.$$

Un chemin *régulier par morceaux* est un chemin tel que l'ensemble

$$\{t \in \mathrm{J}; \quad \gamma'(t) \text{ existe et } \gamma'(t) \neq 0\}$$

est fini.

Remarque 1 *Si* $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est une trajectoire, on dit que* x *est un point sur la trajectoire et que la trajectoire* γ *passe par* x.
Pour un tel point x*, l'ensemble*

$$E_x = \{t \in J;\, \gamma(t) = x\} \neq \emptyset.$$

Si $n = card\ (E_x) > 1$*, on dit que* x *est un point multiple de* γ *(de multiplicité* n*). Si* $n = 2$, x *est un point double de* γ *; si* $n = 1$, x *est un point simple de* γ.
Un chemin (ou une trajectoire) est simple si γ *est injective (hormis le cas où* γ *est un lacet pour lequel* $\gamma_{|]a,b[}$ *est injective).*

1.2 Formes différentielles de degré 1

Définition 1 *Soit* U *un ouvert non-vide de* $\mathbb{R}^n$*. On appelle forme différentielle de degré* 1 *toute application*

$$\omega : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

où $(\mathbb{R}^n)^*$ *est l'espace vectoriel dual de* $\mathbb{R}^n$*. Notons* $\{\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ *la base duale de* $\mathbb{R}^n$*. Pour tous* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\mathrm{d}x_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Ainsi pour toute forme différentielle ω *de degré* 1*, on a*

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\mathrm{d}x_i.$$

Pour tout $x \in U$*. La forme* ω *est dite de classe* C^k *si les fonctions* a_i *sont de classe* C^k.

Définition 2 *Soit* ω *une forme différentielle de degré* 1 *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$.

1. *On dit que* ω *est exacte s'il existe une fonction* $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *telle que* $\omega = \mathrm{d}\phi$.
2. *On dit que* ω *est fermée si elle est de classe* C^1 *et pour tous* i, j*, avec* $1 \leq i, j \leq n$,

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

On rappelle que si $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors

$$\mathrm{d}\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x_i.$$

Comme conséquence du théorème de Schwarz (S3), si une forme différentielle de classe C^1 est exacte, alors elle est fermée. On verra que la réciproque est fausse en général (et vraie si l'ouvert U est "étoilé" dans un sens à définir dans la section 4).

1.3 Intégrales

1.3.1 Intégrales curvilignes

Soit $\gamma : \ \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une trajectoire.
Imaginons par exemple que γ représente un fil (métallique).
La longueur de la partie infinitésimale du fil donné par $\gamma(t)$, t allant de t à $t + \mathrm{d}t$, est

$$\mathrm{d}s = \| \gamma'(t) \| \,\mathrm{d}t$$

et la longueur de la trajectoire γ

$$\text{longueur}(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{J}} \| \gamma'(t) \| \,\mathrm{d}t$$

pourvu que cette intégrale existe (par exemple $\gamma' : \ t \longmapsto \gamma'(t)$ est C^1 par morceaux et $\mathrm{J} = [a, b]$).

On peut interpréter ceci comme suit : $\gamma'(t)$ représente le vecteur vitesse au temps t d'une particule ayant la trajectoire γ, donc $\| \gamma'(t) \| \,\mathrm{d}t$ représente la distance parcouru par cette particule dans un laps de temps infinitésimal, t à $t + \mathrm{d}t$. D'où une intégration par rapport à t donne la longueur de γ. Plus généralement

Définition 3 *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est un champs scalaire défini sur U (f représente par exemple la masse du fil au point $x \in U$). On définit l'intégrale de f sur γ par*

$$\int_\gamma f(s) \,\mathrm{d}s = \int_J f(\gamma(t)) \| \gamma'(t) \| \,\mathrm{d}t.$$

pourvu que cette intégrale existe (par exemple $\gamma' : \ t \longmapsto \gamma'(t)$ est C^1 par morceaux et $J = [a, b]$).

Soit maintenant $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un *champ vectoriel*. Pour une interprétation de $\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$, nous considérons F comme un champ de force (par exemple). Si γ est régulière,

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (F(\gamma(t)) \cdot \tau(\gamma(t))) \| \gamma'(t) \|$$

où $\tau(\gamma(t)) = \dfrac{\gamma'(t)}{\| \gamma'(t) \|}$ est le vecteur unitaire tangent sur le chemin au point $\gamma(t)$.

Le produit scalaire $\{F \cdot \tau\}$ est la composante de F dans la direction τ. Donc l'intégrale $\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$ représente le travail accompli par F pendant le parcours γ car elle est la somme des travaux infinitésimaux

$$\{F \cdot \tau\} \,\mathrm{d}s = \{F \cdot \tau\} \| \gamma'(t) \| \,\mathrm{d}t.$$

Proposition 1 *Soient $\delta : \ [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un chemin de classe C^1 par morceaux dans $U \subset \mathbb{R}^n$, $\theta : \ [a, b] \longrightarrow [c, d]$ une application strictement monotone de classe C^1 et $\gamma = \delta \circ \theta$. Alors,*

$$\gamma : \ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est un chemin C^1 par morceaux et

1. *pour toute fonction continue* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_\delta f\,\mathrm{d}s$$

2. *pour tout champs de vecteurs* $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continue,*

$$\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \begin{cases} \int_\delta F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} & si \quad \theta \text{ est croissante} \\ -\int_\delta F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} & si \quad \theta \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Remarque 2 1. *Si* θ *est croissante (i.e* $\forall t \in [a,b]$, $\theta'(t) > 0$*), on dit que les chemins* δ *et* γ *ont la même orientation ou que* δ *et* γ *sont équivalents.*

2. *Si* θ *est décroissante (i.e* $\forall t \in]a,b[$, $\theta'(t) < 0$*), on dit que les chemins* δ *et* γ *sont opposés.*

Démonstration On a $\gamma'(t) = \delta'(\theta(t)) \cdot \theta'(t)$ à chaque point t de $[a,b]$ tel que $\theta(t)$ est un point de dérivabilité de δ. Il s'ensuit que γ est C^1 par morceaux avec $\gamma([a,b]) = \delta([c,d]) \subset U$.
On a aussi :

1.
$$\begin{aligned} \int_\gamma f\,\mathrm{d}s &= \int_a^b f(\gamma(t)) \parallel \gamma'(t) \parallel \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f\left(\delta \circ \theta(t)\right) \parallel \delta'(\theta(t)) \parallel |\theta'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(i)}{=} \int_a^b f\left(\delta(u)\right) \parallel \delta'(u) \parallel \,\mathrm{d}u \\ &= \int_\delta f\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

   où (i) est obtenu en utilisant le changement de variable $u = \theta(t)$.

2.
$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b F\left(\delta \circ \theta(t)\right) \cdot \delta'(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pm \int_a^b F\left(\delta(u)\right)\delta'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \pm \int_\delta F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

   avec le signe "+" si $\theta'(t) > 0$ et le signe "$-$" si $\theta'(t) < 0$.

Exercice :

1. Montrer que la relation "γ est équivalent à δ " est bien une relation d'équivalence.
2. Montrer que tout chemin est équivalent à un chemin

$$\delta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

   ou à un chemin

$$\delta : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

   (on pose respectivement $\theta(t) = a + (b-a)t$ et $\theta(t) = a + \frac{(b-a)}{2\pi}t$).

3. Montrer qu'on peut paramétriser un chemin par une application continue de $C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ où

$$\begin{aligned} C &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \, u^2+v^2=1\} \\ &= \text{ le cercle de centre 0 et de rayon 1} \end{aligned}$$

Proposition 2 *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un chemin C^1 par morceaux, $U \supseteq \gamma([a,b])$ et $L =$ longueur(γ). Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des champs continus.*

(i) Si $M = \sup\limits_{x\in\gamma([a,b])} |f(x)|$, alors

$$\left| \int_\gamma f \, \mathrm{d}s \right| \leq L\, M.$$

(ii) Si $M = \sup\limits_{x\in\gamma([a,b])} \|F(x)\|$, alors

$$\left| \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} \right| \leq L\, M.$$

Démonstration :

(i)

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f \, \mathrm{d}s \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \, \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \\ &\leq M \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \\ &\leq M\, L. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} \right| &= \left| \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_a^b |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^b \|F(\gamma(t))\| \, \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \\ &\leq M \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = M\, L. \end{aligned}$$

1.3.2 Intégrale d'une forme différentielle

Définition 4 *Soit $\omega = \sum\limits_{i=1}^n a_i(x) \, \mathrm{d}x_i$ une forme différentielle continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ un chemin de classe C^1 sur U. L'intégrale curviligne de ω le long de γ*

est définie par :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\gamma \omega &= \textstyle\int_a^b \omega(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\\ &\overset{def}{=} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m a_i(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est* C^1 *par morceaux,* $\exists\, t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b$ *tels que* $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ *est* C^1 *avec* $1 \leq i \leq m-1$*, on pose :*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}} \omega.$$

Remarque 3 *- Si* γ *et* δ *sont équivalents, alors* $\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$

- Si γ *et* δ *sont opposés :* $\int_\gamma \omega = -\int_\delta \omega$*.*

Proposition 3 *(Linéarité) : Soit* $\Omega_c^1(U)$ *l'espace vectoriel des formes différentielles continues sur D. Alors pour tout chemin* γ *sur* U*, tous* ω_1*,* $\omega_2 \in \Omega_c^1(U)$*, tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_\gamma (\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2.$$

1.4 Champ dérivant d'un potentiel

Soit $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5 *On dit que* F *est un champ dérivant d'un potentiel s'il existe une application* $u \in C^1(U)$ *telle que*

$$F = \ grad(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

On dit que u *est un potentiel scalaire ou simplement un potentiel pour le champ* F*. Si* U *est connexe,* u *est unique à constante additive près.*

Proposition 4 *Si* F *dérive d'un potentiel, alors pour tout chemin* $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *par morceaux, alors*

$$\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = u(B) - u(A)$$

où $B = \gamma(b)$ *et* $A = \gamma(a)$*.*

Démonstration :

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} &= \int_a^b \text{ grad } u(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(\gamma(t))\right)\mathrm{d}t\\ &= u(\gamma(b))-u(\gamma(a)) = u(B)-u(A).\end{aligned}$$

(Ceci démontre la proposition si γ est C^1, le passage au cas général est facile.)

Corollaire 1 *Si $F = \text{ grad } u = \nabla u$, $u\in C^1(U)$, U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et γ_1, γ_2 sont deux chemins C^1 par morceaux dans U ayant même début et même fin, alors :*

$$\int_{\gamma_1} F\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\gamma_2} F\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

En particulier, si γ est un lacet C^1 par morceaux dans U, alors :

$$\int_\gamma F\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$$

Démonstration : Si γ est un lacet non constant, on peut écrire γ comme la somme de deux chemins γ_1 et γ_2 : $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$.
(Détails laisser au lecteur).

Proposition 5 *Soit $F=(F_1,\cdots,F_n)$ un champ vectoriel de classe C^1 dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Pour que F dérive d'un potentiel, il est nécessaire que*

$$\forall i,\, j \quad 1\le i,\, j\le n \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \tag{1.1}$$

Démonstration : Si $F\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ et $F=\nabla u$, on a $u\in C^2(U,\mathbb{R}^n)$ et donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i} \qquad 1\le i,\, j\le n.$$

(cours analyse S3.)

Remarque 4 *Pour $n=3$, l'équation 1.1 est équivalente à rot $(F)=0$.*
La réciproque sera vérifiée si $F\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ et U vérifie une propriété géométrique appropriée. On rappelle que

$$rot\ (F)=\nabla\wedge F=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

Contre-exemple : Considérons l'application suivante

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 \quad \setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \end{aligned}$$

et $\omega = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$. on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

donc l'équation (1.1) est vérifiée et la forme différentielle ω est fermée. Mais

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 2\pi,$$

où $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta \longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$. On conclut à l'aide du corollaire ci-dessus.

On a le résultat fourre-tout suivant (une généralisation est proposée comme devoir).

Proposition 6 *Soit $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Le champ F dérive d'un potentiel $u \in C^1(U)$

(ii) F est un champ conservatif, c'est à dire pour tous chemins γ_1, γ_2 ayant même début et même fin

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\gamma_2} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}.$$

(iii) $\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$ pour tout lacet γ_1 de classe C^1 par morceaux dans U.

Démonstration : $(i) \Longrightarrow (ii)$: déjà vue.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Si γ est constant, $\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$.
Sinon, soit c, $a < c < b$ tel que $\gamma(c) \neq \gamma(a)$. Soit $\gamma_1 = \gamma_{|[a,c]}$ et $\gamma_2 = \gamma_{|[c,b]}$. Alors $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Soit $\overline{\gamma}_2$ le chemin opposé à γ_2. Alors :

$$\overline{\gamma}_2(c) = \gamma(b) = \gamma_1(a)$$

et

$$\overline{\gamma}_2(b) = \gamma(c) = \gamma_1(c)$$

donc

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\overline{\gamma}_2} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}.$$

Ensuite

$$\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} + \int_{\gamma_2} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} - \int_{\overline{\gamma}_1} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}.$$

$(iii) \Longrightarrow (ii)$: Exercice.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: On peut supposer que U est connexe (puisqu'un chemin est toujours contenu dans une composante connexe de U). Fixons un point $p \in U$. Pour $x \in U$, il existe un chemin γ_x dans U reliant p à x (par exemple, γ_x est un chemin polygonal donc C^1 par morceaux).

Posons $u(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$ (ne dépend pas du choix de γ_x d'après (ii)).
Vérifions que grad $u = F$, $i.e$ $\forall i$, $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = F_i \quad \text{si } F = (F_1, \cdots, F_n).$$

On peut supposer que $i = 1$. Soit $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
Pour $h \in \mathbb{R}^*$, soit $\gamma_x^h = \gamma_x \cup [x, x + he_1]$. Si $|h|$ est très petit, $\gamma_x^h \subseteq U$ et

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h}\left(u(x+he_1) - u(x)\right) &= \tfrac{1}{h} \int_{[x,x+he_1]} F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} \\ &= \int_0^1 F_1(x + t\,h\,e_1)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

en paramétrant le segment $[x, x + he_1]$ par $\gamma(t) = x + t\,h\,e_1$, $h \in [0, 1]$. Puisque F_1 est continue, alors

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \int_0^1 F_1(x + t\,h\,e_1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{h \longrightarrow 0} F_1(x + t\,h\,e_1)\,\mathrm{d}t = F_1(x).$$

On voit que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u(x + h\,e_1) - u(x)}{h} = F_1(x).$$

D'où le résultat.

Remarque 5 *Explication du terme conservatif*
Considérons le mouvement d'une particule de masse $m > 0$ dans $U \subseteq \mathbb{R}^3$, sous l'influence d'un champ de force $F \in C(U, \mathbb{R}^3)$. Soit $x(t)$ sa position à l'instant t :

$$m\,x''(t) = F(x(t)).$$

Si $\gamma = x_{|[t_0,t_1]}$, alors

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} &= \int_{t_0}^{t_1} F(x(t)) \cdot x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} m\,x''(t) \cdot x'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\,m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v^\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,m\,v^\epsilon(t_1) - \frac{1}{2}\,m\,v^\epsilon(t_0) \end{aligned}$$

où $v^\epsilon(t) = \|x'(t)\|^2 = x'(t) \cdot x'(t)$, $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^\epsilon)(t) = 2x''(t) \cdot x'(t)$.

L'expression

$$K(t) = \frac{1}{2}\,m\,v^2(t)$$

s'appelle l'energie cinétique de la particule à l'instant t et $\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = K(t_1) - K(t_0)$ est le travail accompli pendant $[t_0, t_1]$.

Si F est conservatif, $F = \nabla u$, et donc

$$\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = u(x(t_1)) - u(x(t_0))$$

D'où, en posant $-u(t) = u(x(t))$, *on a*

$$K(t_1) - u(t_0) = -u(t_1) + u(t_0)$$

ce qui est équivalent à

$$K(t_1) + u(t_1) = K(t_0) + u(t_0)$$

i.e $E(t) = u(t) + K(t) = cte$.
$u(t)$ *est l'énergie potentielle et* $E(t) = cte$ *est la loi de conservation de l'énergie totale.*

Chapitre 2

Intégrales de surfaces

Nous définissons les intégrales des fonctions scalaires définies sur une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ et le flux d'un champ vectoriel à travers une telle surface orientable. Nous nous limitons aux *surfaces paramétrées.*

2.1 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Une partie $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$ s'il existe un domain U dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

1. $\psi(U) = S$ et ψ est un homéomorphisme entre U et S ;
2. ψ est de classe C^1 ;
3. Pour tout $u \in U$, l'application linéaire
$$\psi'(u) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
est de rang 2.

On dit que S est paramétrée par (ψ, U) ou simplement par ψ. La variable u s'appelle le paramètre. La surface S est de classe C^p $(p \geq 1)$ si ψ est de classe C^p.

Si $u = (u_1, u_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, $\mathrm{D}_j\psi_i = \dfrac{\partial \psi_i}{\partial u_j}$ avec $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 2$, la condition (iii) peut être reformulée comme suit :

- $(iii)'$ la matrice $(\mathrm{D}_j\psi_i(u))_{i,j}$ est de rang 2.

- Pour tout $u \in U$, le produit vectoriel
$$\mathrm{D}_1\psi(u) \wedge \mathrm{D}_2\psi(u) \neq 0.$$
(Ces équivalences sont immédiates.)

On rappelle que le produit $\mathrm{D}_1\psi(u) \wedge \mathrm{D}_2\psi(u)$ (noté aussi $\mathrm{D}_1\psi(u) \times \mathrm{D}_2\psi(u)$ est donné par :

$$\mathrm{D}_1\psi(u) \times \mathrm{D}_2\psi(u) = \left(\frac{\partial(\psi_2, \psi_3)}{\partial(u_1, u_2)}, \frac{\partial(\psi_3, \psi_1)}{\partial(u_1, u_2)}, \frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right)$$

où

$$\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(u_1,u_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_i}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\psi_j}{\partial u_1} \\ \\ \dfrac{\partial\psi_i}{\partial u_2} & \dfrac{\partial\psi_j}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial\psi_i}{\partial u_1}\frac{\partial\psi_j}{\partial u_2} - \frac{\partial\psi_j}{\partial u_1}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_2} \quad \text{avec } 1 \leq i,j \leq 3.$$

Exemples :

1. Surface définie par une équation cartésienne $z = f(x,y)$.

$$\begin{aligned} \psi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,f(x,y)) \end{aligned}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Le produit vectoriel

$$\mathrm{D}_1\psi \wedge \mathrm{D}_2\psi = (-\mathrm{D}_1 f, -\mathrm{D}_2 f, 1)$$

est non nul.

2. Les coordonnées Longitude-Latitude sur la sphère unité.

$$(\phi,\theta) \in [-\pi,\pi] \times \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\overset{s}{\longmapsto} (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$$

$\dfrac{\partial s}{\partial \phi} \wedge \dfrac{\partial s}{\partial \theta} = \cos\theta\, s(\phi,\theta) \neq 0.$

3. L'intérieur d'un parallélogramme s'appliquant sur deux vecteurs $V_1 = (a_1,b_1,c_1)$ et $V_2 = (a_2,b_2,c_2)$ au point $A = (a,b,c)$

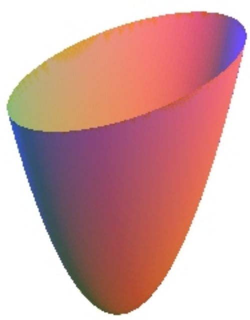
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + u\,V_1 + v\,V_2.$$

4. Le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\,\cos\theta \\ y = a\,\sin\theta \\ z = z \end{array} \right.$$

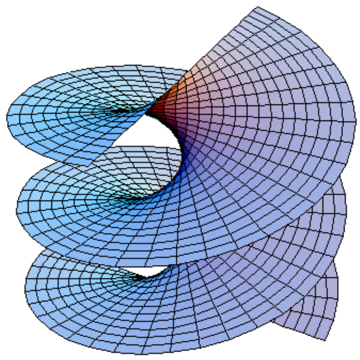
5. Le paraboloïde elliptique $z = x^2 + y^2$

$$u > 0, v \in [0,2\pi] \quad \left\{ \begin{array}{l} x = u\,\cos v \\ y = u\,\sin v \\ z = u^2 \end{array} \right.$$



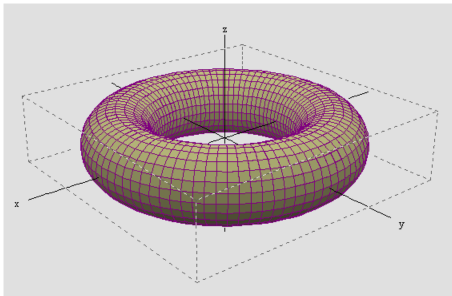
6. Hélicoïde

$$u \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$$



7. Le tore :

$$\begin{cases} x = (A + a\cos u)\cos v \\ y = (A + a\cos u)\sin v \\ z = a\sin u \end{cases}$$



Définition 6 *Plan tangent.*
Soit S une surface paramétrée par $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et soit $a = \psi(u_1, u_2) \in S$. **Le plan tangent** *à S en a est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\dfrac{\partial \psi}{\partial u_1}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial u_2}$ où $\dfrac{\partial \psi}{\partial u_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_j} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u_j} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u_j} \end{pmatrix}$.*

Le produit vectoriel

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$$

est un vecteur normal à la surface au point a. Les vecteurs unitaires

$$\nu(u_1, u_2) = \pm \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u_1, u_2) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(u_1, u_2)}{\|\frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u_1, u_2) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(u_1, u_2)\|}$$

sont les deux normales unitaires à S au point a. Le choix du signe $+$ définit une orientation et le choix du signe $-$ définit l'autre orientation.

2.2 Intégrale d'une fonction scalaire

Soit toujours S une surface paramétrée par $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. L'objectif est de définir $\int_S f \mathrm{d}\sigma$.

Exercice : Si les sommets d'un parallélogramme sont 0, a, b et $a+b$, montrer que son aire est $\|a \wedge b\|$.

Nous pouvons maintenant expliquer intuitivement "l'élément de surface" $\mathrm{d}\sigma$.

Heuristique : L'image par ψ d'un rectangle de sommets (u,v) et dont les côtés δu et δv sont très petits est approximativement un parallélogramme construit sur les vecteurs $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\,\delta u$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)\,\delta v$ donc son aire est

$$\mathrm{d}\sigma = \left| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \right| \delta u\, \delta v.$$

Ceci motive les définitions suivantes.

Définition 7 *L'aire d'une surface S paramétrée par (ψ, u) est donnée par l'intégrale double :*

$$\sigma(S) = \textit{aire } (S) = \int \int_U \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Définition 8 *Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire. On définit $\int_S f \,\mathrm{d}\sigma$ par la formule suivante*

$$\int_S f \,\mathrm{d}\sigma = \int \int_U f(\psi(u)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

pourvu que l'intégrale à droite existe.

Exemples :

1. L'aire du triangle T de sommets $a = (1,0,0)$, $b = (0,-1,2)$ et $c = (0,2,1)$ avec

$$\begin{aligned} \psi \ : \ \ \{(u,v)/u \leq 0, v \leq 0, u+v \geq 1\} &\longrightarrow S \\ (u,v) &\longmapsto a + u(b-a) + v(c-a) \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \right\| = \|(b-a) \wedge (c-a)\| = \|(-5,-1,-3)\| = \sqrt{35}.$$

$$\sigma(S) = \int \int_T \sqrt{35}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

2. L'aire de la sphère de centre 0 et de rayon R. On a

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right\| = R^2 \cos\theta.$$

$$\text{Aire (sphère)} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

Théorème 1 *$\int f\,\mathrm{d}\sigma$ ne dépend pas du paramétrage choisi.*

Démonstration : Changer de paramétrage, c'est remplacer (u,v) par (u',v') qui sont des fonctions inversibles de u et v.
Le nouveau paramétrage $\psi_1(u',v') = \psi(u,v)$ satisfait

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u'} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u'}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v'} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial v'}.$$

Il vient

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u'} \wedge \frac{\partial \psi_1}{\partial v'} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}\right) J(u,v)$$

et on conclut à l'aide de la formule de changement de variables dans les intégrales doubles.

2.3 Flux

Soit $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel dans S. Le *flux* de F à travers S orienté par un choix de la normale unitaire ν est défini par la formule

$$\int_S F \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma$$

en supposant que cette intégrale existe. Ainsi

$$\int_S F \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma = \pm \int\int F(\psi(u,v)) \cdot [\mathrm{d}_u \psi \wedge \mathrm{d}_v \psi] \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Évidemment, le flux dépend de l'orientation. En renversant l'orientation, on change le signe du flux.

Exemple : Calculer le flux du champ de vecteurs $w(x,y,z) = (x,y,0)$ à travers la sphère unité S orientée par la normale rentrante. On a

$$w(\psi(\theta,\phi)) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right) = -\cos^3\theta$$

et on intègre

$$\begin{aligned} Flux(F,S) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= 2\pi \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\left(\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\right] \\ &= \frac{-8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Théorème 2 *Le flux ne dépend pas du choix du paramétrage de la surface, seulement de son orientation. Changer l'orientation change le signe du flux.*

Preuve : Identique à celle concernant $\int_S f \, \mathrm{d}\sigma$.

Exemple : Angle solide (facultatif).
On appelle angle solide d'une surface vue d'un point p le flux à travers cette surface du champ vectoriel w_p défini en tout point $q \neq p$ par

$$w_p(q) = \frac{q-p}{|q-p|^3}.$$

(proportionnel au champ électrique d'une charge ponctuelle placée en p).

Exemple : Soit S une surface centrée en p et de rayon R. Alors

$$w_p \cdot \nu = R^{-2}$$

or l'aire de la sphère est $4\pi R^2$.
Ainsi toute sphère de centre p voit de p un angle solide égale à 4π.

2.4 Lien entre intégrales de surface et intégrales triple

Soit $F = (F_1, F_2, F_3)$ un champ vectoriel défini sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$ et de classe C^1. La divergence de F est définie par

$$\mathrm{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Théorème 3 *(Formule d'Ostrogradsky ou théorème de la divergence)*
Soit S une surface fermée qui délimite un domaine D de $\mathbb{R}^3$. Soit F un champ vectoriel de classe C^1 sur D. On paramètre S de sorte que le vecteur normal $\frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}$ pointe vers l'extérieur de D. Alors

$$Flux(F, S) = \int\int\int_D div\ (F) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Chapitre 3

Formes différentielles

3.1 Formes multilinéaires alternées

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, on note $\mathcal{L}_k(E)$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires sur E. Un élément $u \in \mathcal{L}_k(E)$ est une application

$$u : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $a \longmapsto u(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_k)$ est linéaire pour tout choix de i, $x_1, \cdots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \cdots, x_k$. On rappelle que $\mathcal{L}_1(E) = E'$ est l'espace dual de E et que $u \in E'$ est une forme linéaire sur E.
Une forme $u \in \mathcal{L}_k(E)$ est dite *alternée* si

$$u(x_1, \cdots, x_k) = 0$$

dès que $x_i = x_j$ pour $i \neq j$, $(x_1, \cdots, x_k) \in E^k$. Notons $\mathcal{A}_k(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_k(E)$ formé des formes k-linéaires alternées sur E. On convient que $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{L}_1(E) = \mathcal{A}_1(E) = E'$.

Exercice :

1. Montrer que $u \in \mathcal{A}_k(E)$ si et seulement si u est anti-symétrique, c'est-à-dire

   $$u(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_k) = -\,u(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_k)$$

   pour tout choix $u(x_1, \cdots, x_k) \in E^k$, $1 \leq i < j \leq k$.
2. Soit $\sigma \in S_k$ une permutation de $\{1, \cdots, k\}$. Montrer que si $u \in \mathcal{A}_k(E)$, alors

   $$u(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma)\, u(x_1, \cdots, x_k)$$

   pour tout $(x_1, \cdots, x_k) \in E^k$, $\epsilon(\sigma)$ étant la signature de σ.

Maintenant, si $u_1, \cdots, u_k \in E'$, on définit le produit extérieur $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ par

$$\begin{array}{rcc} u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \;:\; E^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_k) & \longmapsto & \begin{vmatrix} u_1\,(x_1) & \ldots & u_1\,(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ u_k\,(x_1) & \cdots & u_k\,(x_k) \end{vmatrix} \end{array}$$

Il est alors clair que $u \in \mathcal{A}_k(E)$. En fait, toutes les formes k-linéaires peuvent s'obtenir de cette façon. Plus précisément

Théorème 4 *Soit $\{u_1, \cdots, u_n\}$ la base de E'. Alors la famille $\{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k},\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$ est une base de $\mathcal{A}_k(E)$. En particulier*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_k(E) = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Dans la suite $E = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale. Par commodité, on note pour tout i, $1 \le i \le n$, $\mathrm{d}x_i = e_i^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_i \ : \ E = \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \sum_{j=1}^n x_j\, e_j &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_k(E)$,

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1, \cdots, i_k}\ \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

où les $a_{i_1, \cdots, i_k}$ sont des réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{A}_0(E)$. Si

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1, \cdots, i_p}\ \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \in \mathcal{A}_p(E)$$

et

$$\beta = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n} b_{j_1, \cdots, j_q}\ \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q} \in \mathcal{A}_q(E)$$

On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}_{p+q}(E)$ par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n}} a_{i_1, \cdots, i_p} b_{j_1, \cdots, j_q}\ \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}.$$

Proposition 7 *On a :*

1. *Linéarité*
   - $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma.$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A}_p(E),\ \gamma \in \mathcal{A}_q(E)$
   - $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma,$ $\qquad \alpha \in \mathcal{A}_p(E),\ \ \beta, \gamma \in \mathcal{A}_q(E)$
   - $t\,\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge t\,\beta + t\,(\alpha \wedge \beta).$ $\qquad \alpha \in \mathcal{A}_p(E),\ \ \beta \in \mathcal{A}_q(E),\ \ t \in \mathbb{R}.$
2. *Anti-commutativité*
   $\forall \alpha \in \mathcal{A}_p(E)$, $\forall \beta \in \mathcal{A}_q(E)$
   $$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\, \beta \wedge \alpha.$$
3. *Associativité*
   $\forall \alpha \in \mathcal{A}_p(E)$, $\forall \beta \in \mathcal{A}_q(E)$, $\forall \gamma \in \mathcal{A}_r(E)$
   $$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Preuve : Exercice.

3.2 Formes différentielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $p \geq 0$ est un entier, une forme différentielle de degré p sur U (ou une p-forme sur U) est une application

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n).$$

Rappelons que $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ et donc une 0-forme est une application $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable (ou une 0-forme dérivable), sa différentielle

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$$

est une 1-forme sur U.

On sait que $\{\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ est une base de $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi si ω est une p-forme différentielle dans U, on a pour tout $a \in U$,

$$\omega(a) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\cdots,i_p}(a)\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

où les $f_{i_1,\cdots,i_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont uniquement déterminées (section 1). C'est l'écriture canonique de la p-forme ω et les $f_{i_1,\cdots,i_p}$ sont les composantes de ω.
Pour tout $p \geq 0$, on note $\Omega^p(U)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des p-formes différentielles sur U.

Produit extérieur

Soient $(\alpha, \beta) \in \Omega^p(U) \times \Omega^q(U)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\cdots,i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \in \mathcal{A}_p(E)$$

et

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n} g_{j_1,\cdots,j_q}\, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q} \in \mathcal{A}_q(E)$$

On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n}} f_{i_1,\cdots,i_p}\, g_{j_1,\cdots,j_q}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$$

Exercice : Vérifier que si $p + q > n$, alors $\alpha \wedge \beta = 0$.

Différentiation extérieure

Si $f \in \Omega^0(U)$ est une 0-forme de classe C^r $(r \geq 1)$ dans U, on définit

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$$

C'est une 1-forme de classe C^{r-1} dans U. Si

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1, \cdots, i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

est une p-forme de classe C^r ($r \geq 1$), on définit la différentielle extérieure de ω par :

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathrm{d}f_{i_1, \cdots, i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

Ainsi $\mathrm{d}\omega$ est une $(p+1)$-forme de classe C^{r-1} dans U.

Proposition 8

1. *$\forall \alpha, \beta \in \Omega^p(U)$,* $\quad \mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta$.
2. *$\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \Omega^p(U)$,* $\quad \mathrm{d}(t\,\alpha) = t\,\mathrm{d}\alpha$.
3. *$\forall \alpha, \beta \in \Omega^p(U)$, $\forall \beta \in \Omega^q(U)$ de classe C^1 sur U,*

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \, \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

4. *Pour toute forme $\omega \in \Omega^p(U)$ de classe C^2 sur U*

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

Preuve :Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes. La propriété (3) est laissée à titre d'exercice. Pour (4) :

- Si ω est une 0-forme, $\omega = f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \, \mathrm{d}x_j \right) \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

car

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

puisque f est de classe C^2 sur U.

- Pour $p \geq 1$, écrivons

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1, \cdots, i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

Alors

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathrm{d}f_{i_1, \cdots, i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathrm{d}(\mathrm{d}f_{i_1, \cdots, i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \left[\mathrm{d}^2 f_{i_1, \cdots, i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} + (-1)^p \, \mathrm{d}f_{i_1, \cdots, i_p} \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p})\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\mathrm{d}^2 f_{i_1, \cdots, i_p} = 0$ et $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}) = 0$.

3.3 Changement de variables (facultatif)

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \quad & U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto (y_1 = \phi_1(x), \cdots, y_m = \phi_m(x)) \end{aligned}$$

Soit $\omega = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1, \cdots, i_p} \, \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_p}$ une p-forme sur V. On obtient une p-forme sur U par la formule

$$\phi^* \omega = \sum_{|I| = p} (f_I \circ \phi) \, \mathrm{d}\phi_I$$

où $\mathrm{d}\phi_I = \mathrm{d}\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\phi_{i_p}$ et $\mathrm{d}\phi_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_j$.

Exercice : Vérifier que $\forall \alpha, \beta \in \Omega^p(V)$

1. $\phi^*(\alpha + \beta) = \phi^*(\alpha) + \phi^*(\beta)$.
2. $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$.
3. Supposons que ϕ est de classe C^2 et α de classe C^1, alors

$$\mathrm{d}(\phi^*(\alpha)) = \phi^*(\mathrm{d}\alpha)$$

4. Si $U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} W$ où U, V, W sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^s$ respectivement

$$(\psi \circ \phi)^* \alpha = \phi^*(\psi^* \alpha).$$