UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année Universitaire 2022 / 2023
Filière : SMP 4
Module : Electricité 3

Examen de rattrapage, juillet 2023
Corrigé

-I- QUESTIONS DU COURS :

1) Equations de Maxwell qui regroupent champ électrique et champ magnétique, en milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de permittivité diélectrique absolue ε et de perméabilité magnétique μ_0,

Remarque : Dans un milieu diélectrique parfait ne contenant pas de charge réelle, il faut écrire les deux équations demandées en tenant compte des caractéristiques suivantes :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \; ; \; \rho = 0 \; ; \; \vec{j} = \vec{0} \; ; \; \mu = \mu_0$$

Soit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \qquad \text{Relation de Maxwell – Faraday} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B}(M,t) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}(M,t)}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \qquad \text{Relation de Maxwell – Ampère} \qquad (2)$$

2) Equations de propagation des champs **électrique** $\vec{E}(M,t)$ **et magnétique** $\vec{B}(M,t)$ **:**

On appliquera aux équations (1) et (2) la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B}$$

En tenant compte des relations : $\text{div}\vec{E} = 0$ et $\text{div}\vec{B} = 0$

On obtient comme équations de propagation des champs électrique et magnétique :

$$\Delta\vec{E}(M,t) - \mu_0\, \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{B}(M,t) - \mu_0\, \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

3) Expression et définition de la jauge de Lorentz :

Expression de la condition de Jauge ou Jauge de LORENTZ :

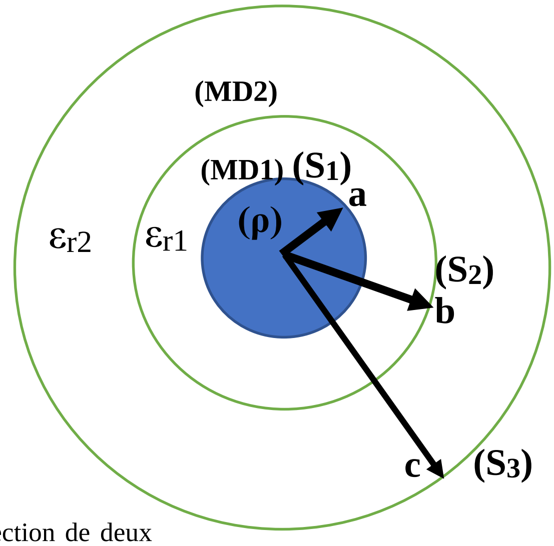
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\,\vec{A}(M,t) + \mu\,\varepsilon \dfrac{\partial V(M,t)}{\partial t} = 0 \\ \vec{A}(\infty) = 0 \\ V(\infty) = 0 \end{cases}$$

Utilité : La condition de Lorentz permet de limiter les solutions possibles du potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$ qui n'est pas défini de manière unique à partir du champ magnétique : $\vec{B}(M,t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M,t)$.

Cette condition impose un lien entre le potentiel scalaire $V(M,t)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$ pour qu'ils se propagent de la même manière que les champs électrique $\vec{E}(M,t)$ et magnétique $\vec{B}(M,t)$ auxquels ils sont associés.

II- MILIEUX DIELECTRIQUES SPHERIQUES :

1) ■ Etude de l'invariance et de la symétrie de la distribution de charge :



♦ Etude de l'invariance de la distribution de charge ρ :

En tout point $M(r,\theta,\varphi)$ la densité de charge $\rho(M)$ est définie par :

$$\rho(M)\begin{cases} =\rho & \text{si } r \le a \\ =0 & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

Donc $\rho(M)$ ne dépend que de r : $\rho(M)=\rho(r)$. Elle est donc invariante par rapport à θ et φ . Il en est de même pour le champ $\vec{E}_0(M)$ qu'elle crée : $\vec{E}_0(M)=\vec{E}_0(r)$

♦ Etude de la symétrie de la distribution de charge ρ :

Tout plan diamétral est un plan de symétrie de la distribution ρ .

Le champ électrique $\vec{E}_0(M)$ appartient au plan de symétrie. L'intersection de deux plans de symétrie contenant le point M, est une droite confondue avec le diamètre de la sphère. Elle donc colinéaire avec le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ de la base sphérique $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$. Soit $\vec{E}_0(M)=E_0(M).\vec{e}_r$

Donc en raison de l'invariance de la distribution et de l'existence des plans de symétrie, le champ $\vec{E}_0(M)$ est radial (dirigé suivant la direction du vecteur radial $\vec{e}_r$, et son module ne dépend que de la coordonnée **r** du point $M(r,\theta,\varphi)$: $\vec{E}_0(M)=E_0(r).\vec{e}_r$

Etant donné que les deux milieux diélectriques sont parfaits alors le champ électrique dépolarisant $\vec{E}_d(M)$ (champ créé par chaque MD) est également de la même forme : $\vec{E}_d(M)=E_d(r).\vec{e}_r$

Par suite le champ électrique total est tel que :

$$\vec{E}_{tot}(M)=E_o(r).\vec{e}_r+E_d(r).\vec{e}_r=E_{tot}(r).\vec{e}_r$$

Il en est de même pour l'induction électrique : $\vec{D}(M)=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}_{tot}(M)=\varepsilon_0\varepsilon_r E_o(r).\vec{e}_r=D(r).\vec{e}_r$

2) ■ Expressions des champs $\vec{D}(M)$ et $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace :

Le théorème de GAUSS généralisé est donné par l'expression intégrale :

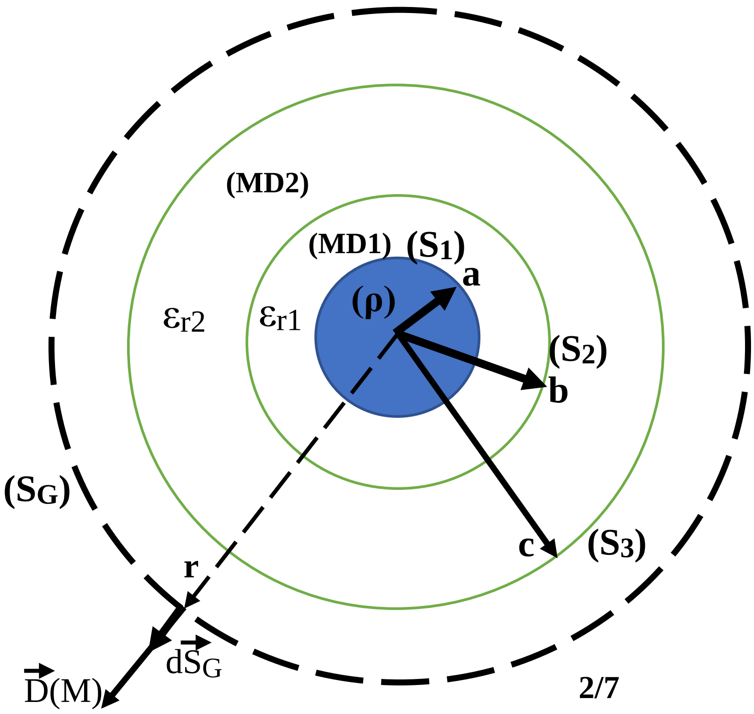
$$\oint\!\!\oint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = Q_{tot}^{réelle}$$

En raison de la symétrie sphérique, la surface fermée de GAUSS convenable est une sphère **SG** de centre O et de rayon **r**. Elle est représentée en pointillés sur la figure ci-contre.

En tout point de la surface de Gauss on a :

$$\begin{cases} \vec{D}(M)=D(r).\vec{e}_r \\ d\vec{S}_G=dS_G.\vec{e}_r \end{cases}$$

En plus, $\vec{D}(M)$ ne dépend que de la coordonnée **r** du point **M**, donc elle est constante en tout point **M** de la sphère de Gauss de rayon **r** fixe, d'où :



$$\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = \oiint_{(S_G)} D(r).\vec{e}_r.dS_G.\vec{e}_r = \oiint_{(S_G)} D(r).dS_G = D(r).\oiint_{(S_G)} .dS_G = D(r).4\pi.r^2 = Q_{tot}^{réelle}$$

Soit : $$\vec{D}(M) = \frac{Q_{tot}^{réelle}}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$$

Il faut donc exprimer la charge électrique totale $Q_{tot}^{réelle}$ pour chaque région de l'espace :

♦ Si $r > c$: $Q_{tot}^{réelle} = Q$; $\vec{D}(M) = \dfrac{Q}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$

On est dans l'air : $\vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\vec{e}_r$

♦ Si $b < r < c$: $Q_{tot}^{réelle} = Q$; $\vec{D}_2(M) = \dfrac{Q}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$

On est dans le **MD2** : $\varepsilon_r = \varepsilon_{r_2} \neq 1 \Rightarrow \vec{E}_{2,tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}.r^2}.\vec{e}_r$

♦ Si $a < r < b$: $Q_{tot}^{réelle} = Q$; $\vec{D}_1(M) = \dfrac{Q}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$

On est dans le **MD1** ; $\varepsilon_r = \varepsilon_{r_1} \neq 1 \Rightarrow \vec{E}_{1,tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}.r^2}.\vec{e}_r$

♦ Si $r < a$: $Q_{tot}^{réelle} = \rho.V_{SG} = \rho.\dfrac{4\pi}{3}r^3 = \dfrac{3Q}{4\pi a^3}.\dfrac{4\pi}{3}r^3 = \dfrac{r^3}{a^3}Q$; $\vec{D}(M) = \dfrac{Q.}{4\pi.a^3}r.\vec{e}_r$

Où $V_{SG} = \dfrac{4\pi}{3}r^3$ est le volume de la surface de Gauss de rayon **r** et $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi a^3}$ la densité volumique de charge réelle.

On est à l'intérieur du volume sphérique de rayon **a**, qui n'est pas diélectrique, donc $\varepsilon_r = 1$, soit :

$$\vec{E}_{tot}(M) = \frac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0} = \frac{Q.}{4\pi\varepsilon_0.a^3}r.\vec{e}_r$$

3) ■ Expression du champ dépolarisant $\vec{E}_d(M)$ créé en tout point de l'espace situé en dehors de la sphère (S_1) de rayon a :

A partir de l'expression du champ total donnée par : $\vec{E}_{tot}(M) = \vec{E}_d(M) + \vec{E}_0(M)$

On a : $\vec{E}_d(M) = \vec{E}_{tot}(M) - \vec{E}_0(M)$

Où $\vec{E}_0(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r$ (champ créé par une sphère chargée, en tout point extérieur (voir cours d'électrostatique).

♦ Si $r > c$: $\vec{E}_d(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r = \vec{0}$

♦ Si $b < r < c$: $\vec{E}_{d2}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}.r^2}.\vec{e}_r - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{r_2}} - 1\right)\vec{e}_r$

♦ Si $a < r < b$: $\vec{E}_{d1}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}.r^2}.\vec{e}_r - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{r_1}} - 1\right)\vec{e}_r$

4) ■ Expressions des vecteurs polarisation $\vec{P}_1(M)$ et $\vec{P}_2(M)$ des milieux MD1 et MD2 :

Les deux milieux diélectriques sont parfaits, donc :

• Dans le milieu **MD1** : $\begin{cases} \vec{P}_1(M) = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)\vec{E}_{1,tot}(M) \\ \vec{E}_{1,tot}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}.r^2}.\vec{e}_r \end{cases}$ soit $\vec{P}_1(M) = \dfrac{(\varepsilon_{r_1} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_1}.r^2}.\vec{e}_r$

• Dans le milieu **MD2** : $\begin{cases} \vec{P}_2(M) = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_2} - 1)\vec{E}_{2,tot}(M) \\ \vec{E}_{2,tot}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}.r^2}.\vec{e}_r \end{cases}$ soit $\vec{P}_2(M) = \dfrac{(\varepsilon_{r_2} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.r^2}.\vec{e}_r$

5) a- Densités des charges fictives de polarisation :

■ Densité volumique de charge fictive de polarisation :

<u>Remarque :</u> On utilisera **l'**expression de la divergence en coordonnées sphériques en un point $M(r, \theta, \varphi)$:

$$\mathrm{div}.\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(P_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi}$$

•Densité volumique de charge fictive équivalente au milieu MD1 :

$$\begin{cases} \vec{P}_1(M) = P_{1r}(r).\vec{e}_r = \dfrac{(\varepsilon_{r_1} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_1}.r^2}.\vec{e}_r \\ \text{où } P_{1\theta} = P_{1z} = 0 \\ \rho_{P_1}(M) = -\mathrm{div}\vec{P}_1(M) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{(\varepsilon_{r_1} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_1}.r^2}\right) = 0 \end{cases}$$

•Densité volumique de charge fictive équivalente au milieu MD2 :

$$\begin{cases} \vec{P}_2(M) = P_{2r}(r).\vec{e}_r = \dfrac{(\varepsilon_{r_2} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.r^2}.\vec{e}_r \\ \text{où } P_{2\theta} = P_{2z} = 0 \\ \rho_{P2}(M) = -\mathrm{div}\vec{P}_2(M) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{(\varepsilon_{r_2} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.r^2}\right) = 0 \end{cases}$$

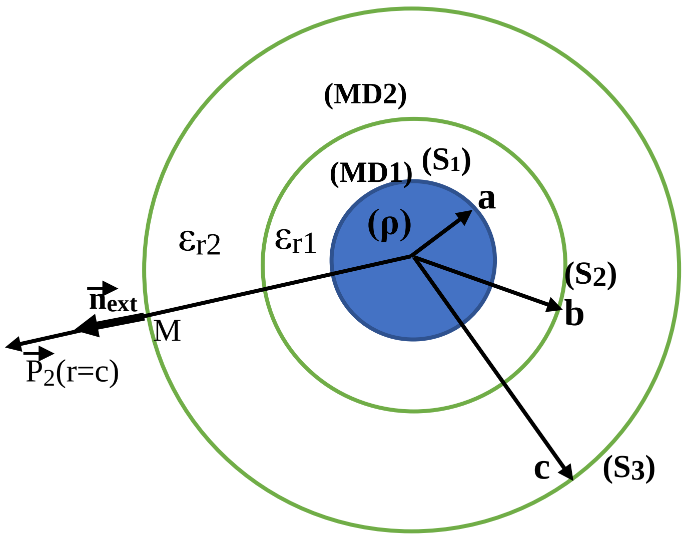
■ Densités surfaciques de charges fictives :

REMARQUE : Les orientations du vecteur unitaire $\vec{n}_{ext}$ normal aux surfaces des milieux du **MD1** et **MD2**, sont représentées sur les figures ci-dessous :

•Densité surfacique de charge de polarisation au niveau de la surface (S_3) de rayon c :

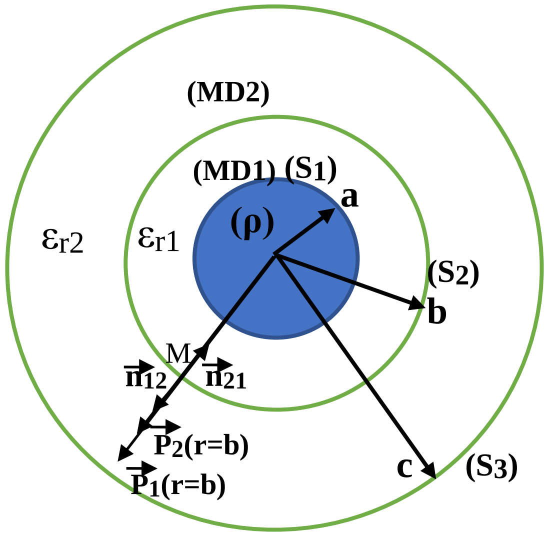
$$\sigma_{P_{S_3}}(M \in S_3) = \vec{P}_2(r = c).\vec{n}_{ext}(M \in S_3) = \frac{(\varepsilon_{r_2} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.c^2}.\vec{e}_r.\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_{r_2} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.c^2}$$

Où $\vec{n}_{ext} = \vec{e}_r$



•Densité surfacique de charge de polarisation au niveau de la surface (S_2) de rayon b commune aux milieux MD1 et MD2 :

REMARQUE : Au niveau de l'interface (S2) entre les milieux MD1 et MD2, il y a la charge surfacique fictive de densité $\sigma_{P_{12}}$, équivalente au MD1, et la charge surfacique fictive de densité $\sigma_{P_{22}}$, équivalente au milieu MD2.



$$\sigma_{P_{S_2}}(M \in S_2) = \sigma_{P_{12}}(M \in S_2) + \sigma_{P_{22}}(M \in S_2)$$

$$= \vec{P}_2(r=b).\vec{n}_{21} + \vec{P}_1(r=b).\vec{n}_{12}$$

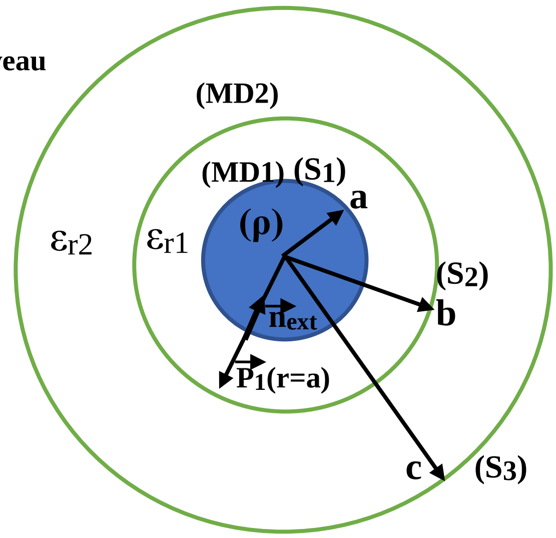
Où $\vec{n}_{21} = -\vec{e}_r$ et $\vec{n}_{12} = \vec{e}_r$

Soit :

$$\sigma_{P_{S_2}}(M \in S_2) = \vec{P}_2(r=b).(-\vec{e}_r) + \vec{P}_1(r=b).\vec{e}_r$$

$$= -\frac{(\varepsilon_{r_2}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.b^2} + \frac{(\varepsilon_{r_1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_1}.b^2}$$

•Densité surfacique de charge de polarisation au niveau de la surface (S_1) de rayon a :



$$\sigma_{P_{S_1}}(M \in S_1) = \vec{P}_1(r=a).\vec{n}_{ext}$$

$$= \vec{P}_1(r=a).(-\vec{e}_r) = -\frac{(\varepsilon_{r_1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_1}.a^2}$$

Où $\vec{n}_{ext} = -\vec{e}_r$

b- Charges fictives de polarisation :

• **Charge volumique de polarisation :**

Dans le volume du milieu MD1 : $Q_{v_1}^{P} = \iiint\limits_{V} \rho_{P_1}(M).dv_1 = 0 \quad \text{car } \rho_{P_1} = 0$

Dans le volume du milieu MD2 : $Q_{v_2}^{P} = \iiint\limits_{V} \rho_{P_2}(M).dv_2 = 0 \quad \text{car } \rho_{P_2} = 0$

•**Charge surfacique de polarisation au niveau de la surface (S_3) :**

$$Q_{PS_3} = \iint\limits_{S_3} \sigma_{PS_3}.dS_3 = \sigma_{PS_3} S_3 = \frac{(\varepsilon_{r_2}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.c^2} 4\pi.c^2 = \frac{(\varepsilon_{r_2}-1)Q}{\varepsilon_{r_2}}$$

•**Charge surfacique de polarisation au niveau de la surface (S_2) :**

$$Q_{PS2} = Q_{PS22} + Q_{PS12}$$

Q_{PS22} est la charge fictive équivalente au **MD2** portée par la surface commune S_2, et Q_{PS12} la charge fictive équivalente au **MD1** portée par la même surface.

$$Q_{PS_2} = \iint\limits_{S_3} \sigma_{PS_2}.dS_2 = \sigma_{PS_2} S_2 = \left(-\frac{(\varepsilon_{r_2}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_2}.b^2} + \frac{(\varepsilon_{r_1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r_1}.b^2} \right) 4\pi.b^2 = -\frac{(\varepsilon_{r_2}-1)Q}{\varepsilon_{r_2}} + \frac{(\varepsilon_{r_1}-1)Q}{\varepsilon_{r_1}}$$

•**Charge surfacique de polarisation au niveau de la surface (S_1) :**

$$Q_{PS_1} = \iint\limits_{S_3} \sigma_{PS_1} dS_1 = \sigma_{PS_1}.S_1 = -\frac{(\varepsilon_{r_1}-1)Q}{4\pi\varepsilon_{r1}.a^2} 4\pi.a^2 = -\frac{(\varepsilon_{r_1}-1)Q}{\varepsilon_{r_1}}$$

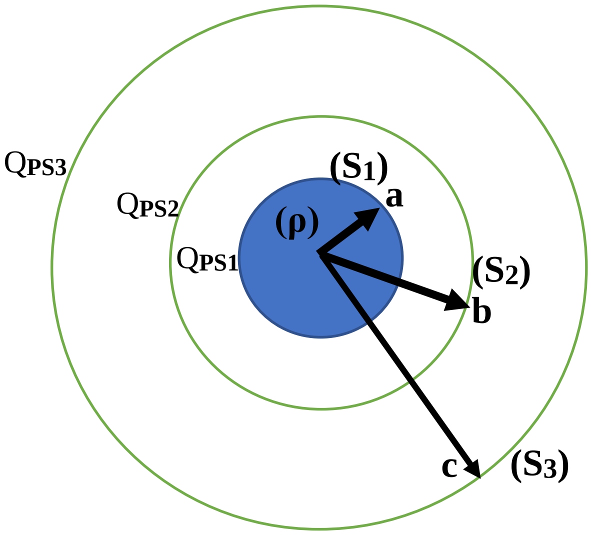
6) ■ **Schéma équivalent aux milieux MD1 et MD2 dans le vide :**

La surface **S3** porte **la charge fictive positive** Q_{PS3}

La surface **S1** porte **la charge fictive négative** Q_{PS1}

La surface **S2**, commune aux deux milieux **MD1** et **MD2**,

porte **la charge fictive totale** : $Q_{PS2} = Q_{PS12} + Q_{PS22}$, constituée par la charge fictive positive Q_{PS12} équivalente au **MD1** et la charge fictive négative Q_{PS22} équivalente au **MD2**.



7)

■ **Energie électrostatique emmagasinée dans le milieu diélectrique MD1:**

• **La densité volumique d'énergie électrostatique dans le milieu MD1 :**

$$\omega_{e1} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r_1} E_{1,tot}^2(M) = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}.r^4}$$

• **L'énergie électrostatique stockée dans le volume du milieu diélectrique MD1, s'écrit :**

$$W_{e_1} = \iiint_{v_1} \omega_{e_1}.dv_1 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

Où
$$\begin{cases} \vec{E}_{1,tot}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}.r^2}.\vec{e}_r \\ dv = r^2\sin\theta.dr.d.\theta.d\varphi \\ a < r < b \;;\; 0 < \theta < \pi \;;\; 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

■ **Energie électrostatique emmagasinée dans le milieu diélectrique MD2:**

• **La densité volumique d'énergie électrostatique dans le milieu MD2 :**

$$\omega_{e_2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}E^2_{2,tot}(M) = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}.r^4}$$

• **L'énergie électrostatique stockée dans le volume du milieu diélectrique MD2, s'écrit :**

$$W_{e_2} = \iiint_{v_2} \omega_{e_2}.dv_2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}} \int_b^c \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin\theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}}\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right]$$

Où
$$\begin{cases} \vec{E}_{2,tot}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}.r^2}.\vec{e}_r \\ dv_2 = r^2\sin\theta.dr.d.\theta.d\varphi \\ b < r < c \;;\; 0 < \theta < \pi \;;\; 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

==