Exercices Geometrie differentielle

Courbes Gauches.

Filière : SMA.

S VI

Professeur : Saïd Fahlaoui

Exercices : Courbes Gauches.

Exercice 1

Soient a, b deux nombres strictement positifs. On considère γ la courbe donnée par : $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t)$ avec

$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = a\cos t + b\cos 3t \\ y(t) = a\sin t - b\sin 3t \\ z(t) = 2\sqrt{ab}\,\sin 2t. \end{cases}$$

1) Déterminer les points réguliers de γ

2) Montrer que le support Γ de γ est inclus dans une sphère que l'on déterminera.

3) Montrer que le support Γ de γ est invariant par la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle π autour de la verticale.

4) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'équateur de la sphère.

5) Pour quelles valeurs de b la courbe a-t-elle une tangente verticale aux points d'intersection avec l'équateur ?

Exercice 2 :

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe lisse et régulière.

1) Montrer que sa courbure vérifie. $K(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$

2) Montrer que sa torsion vérifie. $\tau(t) = \dfrac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$

Exercice 3

Soit γ l'hélice définie par :

$$\gamma : t \to \left(a\cos t/c, a\sin t/c, b\,t/c\right)$$

où $a, b, c > 0$.

1) Déterminer la valeur de c pour laquelle γ est paramétrée par la longueur d'arc. On suppose dans la suite c fixé à cette valeur.

2) Donner le repère de Frénet, la courbure et la torsion et le plan osculateur de γ.

Exercice 4.

1) Soit γ une courbe birégulière dont le ~~support~~ rapport τ/K est constant. Montrer que la tangente fait un angle constant avec une certaine droite fixe.

2) Soit φ la courbe paramétrée donnée par :

$$\varphi(t) = \left(e^{t}, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\right)$$

Vérifier que la courbe est birégulière puis calculer sa courbure et sa torsion. Montrer que la courbe fait un angle constant avec une direction que l'on déterminera.

Exercice 5

1) Calculer le repère de Frenet (T, N, B) la courbure K et la torsion τ.

de la courbe. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \to \left(\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)$.

2) Même question pour la courbe :

$\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^3$.

$t \longrightarrow \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}} t\right)$

Exercice 6

1) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ le support d'une courbe gauche dont toutes les tangentes passent par un même point. Montrer que Γ est une portion de droite

2) Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ dont toutes les normales passent par un même point. Montrer que Γ est une portion de cercle.

Exercice 7.

Soit φ la courbe gauche donnée par :

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow \left(4\cos t/5, 5 - 5\sin t/5, -3\cos t/5\right)$

1) Calculer la courbure $K(t)$ et la torsion $\tau(t)$ en tout point de φ.

2) Montrer que la courbe φ est plane et déterminer l'équation Cartesienne de son plan.