Université Moulay Ismaïl

F.S.T.E.

Département de physique

Année Universitaire 2015/2016

Parcours : MIP S4 (Section 1)

Module P147

# T.D. de Mécanique Quantique

## Série n° 1

*Exercice 1: Rayonnement du corps noir*

1/- On rappelle que la densité d'énergie du champ électromagnétique se produisant dans le volume intérieur du corps noir est donnée par:

$$\xi_T^{R-J}(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{C^3}\nu^2 \qquad \text{(modèle de Rayleigh-Jeans)}$$

et par:

$$\xi_T^{P}(\nu) = \frac{8\pi h}{C^3}\frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T)-1} \qquad \text{(modèle de Planck)}$$

Montrer qu'à basse fréquence, la formule de Planck peut être approchée par celle de Rayleigh-Jeans.

2/- Dans la théorie de Planck, la loi de répartition spectrale du rayonnement du corps noir est telle que la probabilité qu'un photon ait une fréquence comprise entre $\nu$ et $\nu+d\nu$ dans la cavité du corps noir à la température T soit égale à:

$$d\,\mathrm{Pr} = \rho(\nu,T)d\nu = a\xi_T^P(\nu)d\nu$$

a- Calculer le coefficient de proportionnalité a. (on donne: $\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$)

b- Evaluer la loi de répartition spectrale de Planck du rayonnement du corps noir en termes de la longueur d'onde $\lambda$ et T ( c-à-d calculer $\tilde{\rho}(\lambda,T)$)

c- Donner la relation qui détermine $\lambda_m$ pour laquelle $\tilde{\rho}(\lambda,T)$ est maximum.

d- En assimilant le soleil à un corps noir et en admettant que le maximum d'intensité du spectre solaire se produit pour $\lambda_m = 0.5\mu$, calculer la température du soleil.

*Exercice 2: Effet photoélectrique*

1/- Quelle est la puissance d'une lampe à filament incandescent qui emet un rayonnement dont la longueur d'onde moyenne est $\lambda = 1{,}2\mu$. On donne le nombre de photons émis par seconde par cette lampe, soit $N = 13\times10^{20}$.

2/- On éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique par un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 0.405\mu$, elle débite alors un courant électrique i que l'on peut compenser en portant l'anode de cette cellule à un potentiel de 1.26 V plus bas que celui de la cathode. On demande le potentiel d'extraction et le seuil en fréquence de l'effet photoélectrique du matériau constituant la cathode.

*Exercice 3: Effet Compton*

On considère un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde $\lambda$ se déplaçant dans le vide et se dirigeant vers une cible ne contenant que des électrons libres que l'on supposera au repos.

Soit m la masse de l'électron et soit $\lambda'$ la longueur d'onde de la lumière diffusée après les chocs photon-électron, posons $\alpha = \dfrac{h}{m_o C\lambda}$ .

1/- Ecrire les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie lors d'un choc photon-électron.

2/- Calculer la variation de la longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ en fonction de $\lambda$, $\alpha$ et de l'angle $\theta$ que fait la direction du photon diffusé avec celle du photon incident.

3/- Calculer l'énergie du photon diffusé $E'_\nu$ en fonction de $\alpha$ et $\theta$.

4/- Soit $\phi$ l'angle que fait la direction de l'électron après le choc avec celle du photon incident, on demande d'exprimer $\phi$ en fonction de $\alpha$ et $\theta$.

5/- Dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Quelles sont les valeurs de $\lambda', E'_\nu$ et $\phi$ ?

*Exercice 4: Emission photonique*

Considérons l'annihilation d'un électron $e^-$ ($q=-e$, $m=m_e$) et d'un positron $e^+$ ($q=e$, $m=m_e$) avec émission de photons $\gamma$: $e^+ + e^- \rightarrow n\gamma$

1/- Pour quelles valeurs de n, la réaction peut-elle se produire ? On suppose que $e^-$ et $e^+$ sont pratiquement au repos quand la réaction se produit.

2/- Calculer la fréquence et la longueur d'onde supposée communes aux photons émis. Cas où n=2.

## Série n° 1

(théorie quantique de la lumière) (1)

### I. Rayonnement du corps noir :

1°) la densité d'énergie du champ électromagnétique se produisant dans le volume intérieur du corps noir est donné par

$$\mathcal{E}_T^{R-J}(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{C^3}\nu^2 \quad \text{modèle de Rayleigh-Jeans}$$

et par

$$\mathcal{E}_T^{P}(\nu) = \frac{8\pi h}{C^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} \quad \text{modèle de Planck}$$

montrons que lorsque $\nu \to 0$ $\mathcal{E}_T^P(\nu) \longrightarrow \mathcal{E}_T^{R-J}(\nu)$ :

On sait que pour $\nu$ faible $e^{\nu} \simeq 1+\nu$ d'où

$$\mathcal{E}_T^P(\nu) \sim \frac{8\pi h}{C^3}\frac{\nu^{3}}{h\nu/k_BT} = \frac{8\pi k_B T}{C^3}\nu^2 = \mathcal{E}_T^{R-J}(\nu)$$

2°) (retrouvons la loi de Stefan :)

a) la probabilité pour qu'un photon ait une fréquence comprise entre $\nu$ et $\nu+d\nu$ est donnée par :

$$dP_r = \rho(\nu,T)\,d\nu = a\,\mathcal{E}_T^P(\nu)\,d\nu$$

avec $a$ : loi de Stefan et $\rho(\nu,T)$ = loi de répartition spectrale à la température $T$.

Or $$\int_0^{+\infty} dP_r = 1 = a\int_0^{+\infty}\mathcal{E}_T^P(\nu)\,d\nu$$

$$= a\,\frac{8\pi h}{C^3}\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu$$

sachant que $$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$

on pose donc $X = \frac{h\nu}{k_BT} \Rightarrow dX = \frac{h}{k_BT}d\nu$ et $\begin{cases}\nu^3 = \frac{k_B^3T^3}{h^3}x^3 \\ d\nu = \frac{k_BT}{h}dX\end{cases}$

$$\Rightarrow 1 = a\,\frac{8\pi h}{C^3}\times\frac{k_B^3T^3}{h^3}\times\frac{k_BT}{h}\times\frac{\pi^4}{15} = a\,\frac{8\pi^5T^4k_B^4}{15C^3h^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{15C^3h^3}{8\pi^5k_B^4T^4}}$$

La loi de Stefan est déduite de la puissance totale rayonnée soit

$$P^{p}(\nu) = \int_{0}^{+\infty} \mathcal{E}^{p}(\nu)\, d\nu = \sigma T^4 \quad \text{avec } \sigma = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3}$$

? = cte de Stefan. $= 7{,}62\ 10^{-16}\ W\, m^{-3} K^{-4}$

b) Evaluons la loi de répartition spectrale de Planck du rayonnement du corps noir en termes de la longueur d'onde $\lambda$ et $T$ (i.e $\tilde{\rho}(\lambda, T)$)

on a $\quad dP_r = \tilde{\rho}(\lambda, T)\, d\lambda = \rho(\nu, T)\, d\nu$

or $\quad \rho(\nu, T) = a\, \mathcal{E}_T^{p}(\nu) = a \times \dfrac{8\pi h}{c^3} \dfrac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$

et $\quad \nu = \dfrac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -\dfrac{c}{\lambda^2}\, d\lambda$

$$\Rightarrow \rho(\nu, T)\, d\nu = a \times \frac{8\pi h}{c^3} \frac{c^3/\lambda^3}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \times \frac{-c}{\lambda^2}\, d\lambda$$

i.e: $\quad d\lambda\, \rho(\lambda, T) = +a \times \dfrac{8\pi h c}{\lambda^5} \times \dfrac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \times (-d\lambda)$

$$= \frac{15 h^3 c^{4}}{8 \pi^{4} k_B^4 T^4} \times \frac{8\pi h}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} (-d\lambda)$$

$$= \frac{15 h^4 c^4}{\pi^4 k_B^4 T^4 \lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} - d\lambda$$

$$= \frac{15 k_B T}{\pi^4 h c} \frac{\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)^5}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} (-d\lambda)$$

<u>note</u> le (−) restera lié à (−$d\lambda$) car $\nu$ et $\lambda$ sont inversement proportionnels ce qui veut dire que par le changement de variable $\nu$ en $\lambda$ il y a changement des bornes de l'intégrale donnant la probabilité totale $\Rightarrow -d\lambda$ pour ajuster ces bornes.

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\rho}(\lambda, T) = \frac{15 k_B T}{\pi^4 h c} \frac{\left(hc/k_B T \lambda\right)^5}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} > 0}$$

c) Calculons la longueur d'onde $\lambda$ pour laquelle $\tilde{\rho}(\lambda,T)$ est maximum.

$\tilde{\rho}(\lambda,T)$ est maximum pour $\lambda$ tel que $\dfrac{d\tilde{\rho}}{d\lambda}=0$

note comme $\rho = a\xi$ et $\xi$ est une fonction qui admet un maximum $\Rightarrow \rho$ admet un maximum

$$\tilde{\rho}(\lambda,T) = \frac{15\,k_B T}{\pi^4 hc}\;\frac{\left(\frac{hc}{k_B T\lambda}\right)^5}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T\lambda}\right)-1}$$

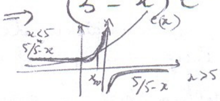
on pose $x = \dfrac{hc}{k_B T\lambda}$ $\Rightarrow \tilde{\rho}(x,T) = \dfrac{15 k_B T}{\pi^4 hc}\;\dfrac{x^5}{e^x-1}$

$$\Rightarrow \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \frac{15\,k_B T}{\pi^4 hc}\;\frac{\partial x}{\partial\lambda}\times\frac{5x^4(e^x-1)-x^5e^x}{(e^x-1)^2}=0$$

<u>1<sup></sup>er cas</u> : $\dfrac{\partial x}{\partial\lambda} = 0 = \dfrac{-hc}{k_B T\lambda^2}$ possible si $\lambda \longrightarrow +\infty$, solution inacceptable.

<u>2e cas</u> : $e^x - 1 \longrightarrow \infty$ possible si $x \longrightarrow +\infty$ i.e $\lambda \longrightarrow 0$ corps noir non irradié (aucune utilité)

<u>3e cas</u> : $5(e^x-1) - xe^x = 0 \Rightarrow (5-x)e^x - 5 = 0$




$$\Rightarrow e^x = \frac{5}{5-x}$$

on peut déterminer $x$ par la méthode graphique ce qui nous donne $x \simeq 4{,}96$ ou encore $\boxed{\lambda_m \simeq \dfrac{0{,}29}{T}\,(\text{cm})}$

avec bien entendu
$c = 3.10^8$ m/s $= 3.10^{10}$ cm/s
$h = 6{,}624.10^{-34}$ J/s
$k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J/°K

d) si on suppose que le soleil est un corps noir et en admettant que le maximum d'intensité du spectre solaire se produit pour $\lambda_m = 0{,}5\,\mu m$ on déduit que la température du soleil est $\boxed{T = 5800\,°K}$ (du moins à sa surface !)

## <u>II_ Effet photoelectrique</u>

1) La puissance rayonnée ~~[illegible]~~ par la lampe = énergie rayonnée par unité de temps = nombre de photons émis par unité de temps multiplié par l'énergie d'un photon :

$$P = Nh\nu = N\frac{hc}{\lambda} = 13\,10^{20}\times\frac{6{,}624\,10^{-34}\times 3\,10^8}{1{,}2\,10^{-6}}$$

soit $\boxed{P = 215 \text{ watts}}$ ou J/s

2°/ $h\nu = h\nu_0 + \mathcal{E}$ avec $\mathcal{E}$ = énergie communiquée à l'e⁻ pour lui permettre le déplacement entre l'anode et la cathode.

$= eV_0 + \mathcal{E}$

$= eV_0 + eV$ avec $V = |-1{,}26| = 1{,}26$ volts.

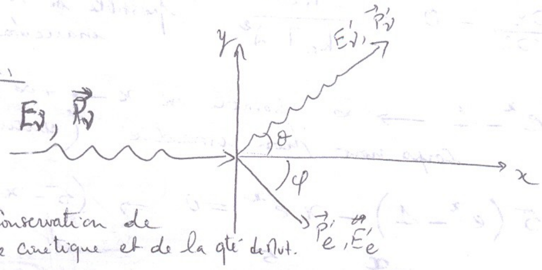
$\Rightarrow V_0 = \frac{h\nu}{e} - V = \frac{hC}{e\lambda} - V$

$e = 1{,}6\ 10^{-19}\,C$, $\lambda = 0{,}405\ 10^{-6}\,m$ $\Big\} \Rightarrow V_0 = 1{,}80$ volts.

Le seuil en fréquence : $\boxed{\nu_0 = \frac{eV_0}{h} = 43504\ 10^{10}\ Hz}$

$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{C}{\nu_0} = 0{,}69\,\mu m$.

## III. Effet Compton.




1) choc élastique ⇒ Conservation de l'énergie cinétique et de la qté de Mvt.

* la projection sur $Ox$ donne : $P_\nu = P'_\nu \cos\theta + P'_e \cos\varphi$ (1)

la projection sur $Oy$ donne : $0 = P'_\nu \sin\theta - P'_e \sin\varphi$ (2)

On sait que : $P_\nu = \frac{E_\nu}{C} = \frac{h\nu}{C} = \frac{h}{\lambda}$ de même $P'_\nu = \frac{h}{\lambda'}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} (1): & \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + P'_e\cos\varphi \\ (2) & 0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\theta - P'_e\sin\varphi \end{array}}$$

* Pour la conservation de l'énergie on a :

$$E_\nu + E_e = E'_\nu + E'_e$$

Soit $\boxed{\frac{hC}{\lambda} + m_0C^2 = \frac{hC}{\lambda'} + \left[m_0^2C^4 + P_e'^2C^2\right]^{1/2}}$ ③

2°/ $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = ?$

$(1) \Rightarrow P'_e\cos\varphi = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\theta$

$(2) \Rightarrow P'_e\sin\varphi = \frac{h}{\lambda'}\sin\theta$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow P_e'^2 = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\sin\theta\right)^2$ (4)

Serie n° 1 (3)

or d'après (3) on a :

$$P_e'^2 C^2 = \left[\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) + m_0 C^2\right]^2 - m_0^2 C^4$$

$$= h^2 C^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2 m_0 C^2 (hC)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

soit $$P_e'^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2 m_0 h C \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \qquad (5)$$

Comme (4) = (5) alors on déduit :

$$h^{\cancel{2}} \left(\cancel{\frac{1}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{1}{\lambda'^2}} - \frac{\cancel{2}}{\lambda\lambda'} \cos\theta\right) = h^{\cancel{2}} \left(\cancel{\frac{1}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{1}{\lambda'^2}} - \frac{\cancel{2}}{\lambda\lambda'}\right) + \cancel{2} m_0 h C \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\right)$$

$$\Rightarrow \quad m_0 C \, \Delta\lambda = h(1 - \cos\theta)$$

posons $\alpha = \frac{h}{m_0 C \lambda} \Rightarrow \frac{h}{m_0 C} = \alpha\lambda$ on a alors :

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \alpha\lambda(1 - \cos\theta)}$$

<u>Note</u> $1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Longrightarrow$ l'expression vue en cours.

$\frac{h}{m_0 C}$ est appelée longueur d'onde de Compton $\simeq 0,024$ Å

3°) $E_\nu' = ?$

$$E_\nu' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda\left[\alpha(1-\cos\theta) + 1\right]} = \frac{E_\nu}{\alpha(1-\cos\theta) + 1}$$

$$\boxed{E_\nu' = \frac{E_\nu}{\alpha(1-\cos\theta) + 1}}$$

$$\frac{\frac{h}{\lambda'}\sin\theta}{\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos\theta}$$

4°) $\varphi = ?$

on a : $$\left.\begin{aligned} P_e' \cos\varphi &= \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\theta \\ P_e' \sin\varphi &= \frac{h}{\lambda'}\sin\theta \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(2)/(1)} \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos\theta}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\left[\alpha(1-\cos\theta) + 1\right] - \cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{(\alpha+1)\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{(1+\alpha)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}}$$

5°) pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda(1+\alpha) \\ E'_\nu = \frac{E_\nu}{1+\alpha} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{1+\alpha} \end{cases}$$

## IV – Annihilation d'électron :

$$e^+ + e^- \longrightarrow n\gamma$$

1) d'après la conservation des qtés de Mvts on a :

$$\vec{P}_{e+} + \vec{P}_{e-} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_\gamma$$

Note le choc est inélastique car il y a changement de l'état interne de l'électron qui se transforme complètement

or le positron et l'électron sont dits au repos $\Longrightarrow$

$$\vec{0} + \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_\gamma = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{n \geq 2}$$

il faut donc que n soit au moins $= 2$ de sorte que l'on ait deux qtés de Mvts de photons de sens opposés.

2) Le choc étant inélastique, l'énergie mise en jeu avant le choc se transforme complètement en énergie du rayonnement émis après le choc :

$$E_{e-} + E_{e+} = nE_\nu = nh\nu$$

$e^-$ et $e^+$ sont au repos donc :

$$2m_0C^2 = nh\nu$$

$$\Longrightarrow \nu = \frac{1}{n}\frac{2m_0C^2}{h}$$

pour $n = 2$ $\quad \nu_{max} = \frac{m_0C^2}{h} \Longrightarrow \lambda_{min} = \frac{C}{\nu_{max}} = \frac{h}{m_0C} = 0{,}024\ \text{Å}$

$=$ longueur d'onde de Compton.