Université Moulay Ismaïl

F.S.T.E.

Département de physique

Année Universitaire 2015/2016

Parcours : MIP S4 (Section 1)

Module P147

T.D. de Mécanique Quantique

Série n° 2

Exercice 1:Loi de Balmer dans le modèle de Bohr

1/- Donner en introduisant la règle des quanta de Bohr les rayons r_n des orbites quantifiées de l'électron dans l'atome d'hydrogène.

2/- Calculer les niveaux d'énergie quantifiées E_n de l'atome d'hydrogène. On admettra que l'énergie potentielle électrostatique de l'électron s'annule lorsque celui-ci devient suffisamment loin du noyau.

3/- En déduire la valeur théorique de la constante de Rydberg de la loi de Balmer. La comparer à sa valeur empirique, conclusion.

On donne la masse de l'électron m_e=0.9 10^{-30} kg, sa charge électrique e=-1.6 10^{-19} C, la constante de Coulomb K=9 10^{9} Nm^2C^{-2}, la constante de Planck h=6.62 10^{-34} Js et la valeur empirique de la constante de Rydberg R=10967800 m^{-1}.

Exercice 2: Les ondes de matière de Louis de Broglie

1/- Considérons un grain de poussière de diamètre d=1μ, de masse m=10^{-12}g et animé d'un mouvement de vitesse moyenne v=3mm/s.

Quelles sont la longueur d'onde λ et la fréquence ν associée à cette particule ? Dire si le traitement physique de cette particule peut relever de la mécanique classique.

2/- Mêmes questions pour un véhicule de masse m=3 Tonnes, de longueur l=6m et roulant à une vitesse v=60 km/h.

3/- En considérant les électrons accélérés sous l'effet d'un etension électrique continue V=100 Volts comme des particules non-relativistes, calculer la vitesse qu'aquiert chacun d'eux. Calculer la longueur λ de l'onde de Broglie associée au mouvement de ces électrons. Conclusion ?

Exercice III: Vitesse de groupe - vitesse de phase - loi de dispertion des ondes de de Broglie:

1/- Une onde plane électromagnétique de fréquence ν se propageant dans le vide est donnée par le champ électrique E(t,x) qui s'écrit dans les relations complexes :

$$E(t,x)= E_0\exp i(kx-\omega t); \quad \text{avec : } k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = 2\pi\nu \quad \text{et} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

Déterminer l'onde plane lumineuse en termes de l'impulsion p et de l'énergie E du photon; puis en fonction de p seul.

Calculer la vitesse de groupe V_p et la vitesse de phase V_φ de cette onde, conclusion.

Rappeler l'expression de l'intensité I de cette onde, l'interpréter en termes quantiques.

2/- De même, l'onde plane monochromatique de De Broglie associée à une particule en mouvement peut être représentée par la fonction d'onde : $\psi(t,x)=A\exp i(kx-\omega t)$ où $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ est la norme du vecteur d'onde et $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation de l'onde de matière.

Etablir une relation entre la fréquence ν et la longueur d'onde λ de cette onde de matière.

Déterminer l'onde plane de matière en fonction de l'impulsion p et de l'énergie E de la particule dans le cas général et en fonction de p seul dans la cas d'une particule libre.

Calculer, dans ce dernier cas la vitesse de groupe et celle de phase; conclusion.

Calculer l'intensité de cette onde et l'interpréter physiquement.

3/- Pour une particule relativiste, montrer que la vitesse de groupe V_g de l'onde de matière associée coincide avec la vitesse de la particule.

Montrer que la vitesse de phase $V_\varphi$de cette onde coincide avec la célérité de propagation de celle-ci et qu'elle n'a pas de réalité physique (on vérifiera l'égalité $V_gV_\varphi=C^2$)

Calculer V_g et V_φ en termes de la fréquence ν, ou d'une façon équivalente en fonction de l'énergie E. En déduire la loi de dispersion pour l'onde associée à cette particule (on calculera l'indice de réfraction relatif aux ondes de matière, défini par $n=C/V_\varphi$ en fonction de ν). Conclusion.

Série n°2
Théorie quantique de la matière (1)

I. Loi de Balmer dans le modèle de Bohr.

1) La règle des quanta de Bohr représente la quantification du moment cinétique

$$\vec{J} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = n\hbar$$

pour un mouvement circulaire on a :

$$r \times mv = n\hbar \Rightarrow r = \frac{n\hbar}{mv} \quad (1)$$

Or pour un atome d'hydrogène si on applique le principe fondamental de la dynamique et sachant que seule la force d'interaction Coulombienne agit sur le système on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

K cte de Coulomb

$$\Rightarrow -F = -m\gamma_n \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (*)$$

$$\Rightarrow m^2v^2 = \frac{mKe^2}{r} \quad (2)$$

d'où (1) $\Rightarrow$ $\boxed{r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mKe^2}}$ $\Rightarrow$ les orbites des électrons dans un atome (ici l'hydrogène) sont quantifiées.

2) L'énergie totale $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$

$\vec{F} = \begin{cases} F_r = -F \\ F_\theta \\ F_z \end{cases}$

or la force Coulombienne dérive du potentiel

$$\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p \Rightarrow -\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = -\frac{Ke^2}{r^2}$$

soit $E_p = -\frac{Ke^2}{r} + cte$

Or par énoncé $E_p(\infty) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ke^2}{r}$$

sachant que : $mv^2 = \frac{Ke^2}{r}$ d'après (*) on a alors

$$E = -\frac{Ke^2}{2r_n} = -\frac{K^2e^4m}{2\hbar^2} \times \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\boxed{E_n = -\frac{K^2e^4m}{2\hbar^2} \times \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $E_n < 0$; pour $n = 1$ on a : $E_1 \simeq -13,6$ eV

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}}$$

3) Loi de Balmer : $h\nu_{nm} = E_n - E_m = \frac{CRh}{}\left(\frac{-1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)$ si $E_n > E_m$ (voir cours $E_n = -\frac{CRh}{n^2}$)

$$\Rightarrow E_n = -\frac{CRh}{n^2} = -\frac{K^2 m e^4}{2\hbar^2} \times \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow R = -\frac{n^2 E_n}{Ch} = +\frac{K^2 m e^4}{2\hbar^2 Ch}$$

$\Rightarrow$ la cte de Rydberg théorique : $\boxed{R_{th} \# 109500\ cm^{-1}}$

La cte théorique est très proche de celle expérimentale $R_{exp} = 109678\ cm^{-1}$

Conclusion : le modèle de Bohr reproduit avec un bon accord l'expérience de Balmer - Rydberg

Ex II - Ondes de matière de Louis de Broglie

Rappel : • D'après Louis de Broglie à toute particule matérielle on peut associer une onde de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

• Lorsque l'on compare λ au diamètre d de la particule on peut dire que l'étude quantique est obligatoire si $\lambda \sim d$ mais si $\lambda \ll d$ alors le traitement classique suffit.

1°) grain de poussière :
$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\underbrace{10^{-12} \times 10^{-3}}_{kg} \times 3 \times 10^{-3}} = 2{,}2 \cdot 10^{-10}\ \mu$$

$\lambda \ll d = 1\mu \Rightarrow$ On peut traiter par la mécanique classique ce grain de poussière.

Note : le calcul de ν ne peut pas se faire car la relation
$\nu = \frac{c}{\lambda}$ ne peut être valable que lorsque la vitesse de phase
$v_\varphi = \lambda\nu$ égale à C (c'est le cas pour le photon) mais ici
on ne connait pas cette vitesse.

2°) véhicule :
$\lambda = \frac{h}{mv} = 1{,}32 \cdot 10^{-38}\ m \ll l = 6\ m \Rightarrow$ traitement classique

3°) électrons :
$E_c = eV = \frac{1}{2} m v_e^2 \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \simeq 6 \cdot 10^6\ m/s}$

$v_e \lesssim C \Rightarrow$ les électrons sont des particules relativistes $\Rightarrow$
$\lambda = \frac{h}{p}$ avec $p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Série n° 2 (2)

Suite de l'ex 2 :

$$\lambda = \frac{hc}{\left[E^2 - m_0^2 c^4\right]^{1/2}} \quad \text{or } E = E_t(\text{électron}) = \overbrace{\frac{1}{2} m v_e^2}^{E_c} + m_0 c^2$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{e^2 V^2 + 2eV m_0 c^2}} \simeq 1{,}22\ \text{Å} \Longrightarrow \boxed{MQ}$$

Ex. 3 Vitesses de groupe et de phase

1) l'onde plane s'écrit en termes de la position x et du temps t :

$$E = E_0 \exp\left[i(kx - \omega t)\right]$$

* connaissant les relations de Planck - Einstein : $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$

en termes de p et E elle s'écrit : $E(t,x) = E_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$

ou comme $E = h\nu = pc$ $\quad E(t,x) = E_0 \exp\left[\frac{ip}{\hbar}(x - ct)\right]$

* Par définition

$$\left.\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \overset{\text{pour le photon}}{=} c \\ v_\varphi &= \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v_\varphi\, v_g = c^2}$$

* l'intensité $\quad I = |E(t,x)|^2 = E^*(t,x)\, E(t,x) = |E_0|^2$

= densité de proba. de présence du photon avec une fréquence entre ν et $\nu + d\nu$

2) L'onde de Louis de Broglie : $\psi(t,x) = A \exp\left[i(kx - \omega t)\right]$

* par définition $\quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda\nu = v_\varphi}$

* d'après les relations de Planck - Einstein

$$\psi(t,x) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right] \quad \text{cas général}$$

* pour une particule libre $\quad E = E_c$ (car pas d'interaction)

or $E_c = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \psi(t,x) = A\exp\left[\frac{ip}{\hbar}\left(x - \frac{p}{2m}t\right)\right]$

• vitesse de groupe $\quad v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad$ or $\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$

(Note l'énergie d'une particule libre est donc $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$)

$$\Rightarrow v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v \qquad \boxed{v_g = v}$$

• vitesse de phase : $\quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$ aucune signification physique

3°) particule relativiste :

$$E = \sqrt{p^2C^2 + m_0^2C^4} \qquad \begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{cases}$$

$$* \; v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{pC^2}{E}$$

or $\left.\begin{aligned} E &= m_{rel}C^2 \\ p &= m_{rel}v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{v}{C^2}$ $\Rightarrow \boxed{v_g = v}$

$$* \; v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi\lambda} \Rightarrow v_\varphi = \lambda\nu = \text{célérité de propagation de l'onde.}$$

or $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{C^2}{v} = \frac{C^2}{v_g}$ $\Rightarrow \boxed{v_\varphi \times v_g = C^2}$

$v_g = v \Rightarrow < C \Rightarrow v_\varphi > C$?! $\Rightarrow v_\varphi$ n'a pas de signification ou réalité physique.

* En termes de fréquence ou en termes d'énergie

o $E = h\nu = \frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}} = \frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{v_g^2}{C^2}}}$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = C\sqrt{1 - \frac{m_0^2C^4}{\underbrace{h^2\nu^2}_{E^2}}}} < C$$

m_0C^2 = énergie au repos.
$h\nu$ = énergie totale

o $v_\varphi \times v_g = C^2 \Rightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{C^2}{v_g} = \frac{C}{\sqrt{1-\frac{m_0^2C^4}{h^2\nu^2}}}} \geq C$

o Loi de dispersion :

$$n(\nu) = \frac{C}{v_\varphi} = \sqrt{1 - \frac{m_0^2C^4}{h^2\nu^2}}$$ = indice de réfraction relatif aux ondes de matière

Conclusion $\boxed{n(\nu) \leq 1}$