1.3 Espaces de Banach

1.3.1 Définition

On appelle espace de Banach toute e.v.n. complet.

1.3.2 Exemple

L'espace $E = \mathcal{C}([0,1], K)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans K muni de la norme de la convergence uniforme ($\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$) est un espace de Banach.

1.3.3 Théorème

i) Un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach

ii) Un produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.

iii) Tout e.v.n de dimension finie est un espace de Banach.

1.3.4 Théorème

Soient E un e.v.n, F un espace de Banach. Alors $L(E,F)$ est un espace de Banach.

Preuve

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L(E,F)$. Soit $x \in E$. On a pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| \|x\|$ donc $\|f_n(x) - f_m(x)\| \to 0$ quand $m, n \to +\infty$. Comme F est complet, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $f(x)$. Montrons que f est linéaire. On a $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in E$
$f_n(\alpha x + \beta y) = \alpha f_n(x) + \beta f_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient : $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Donc f est linéaire. D'autre part, la suite (f_n) est bornée.

Donc il existe $A > 0$ telle que $\|f_n\| \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. L'égalité $\|f_n(x)\| \leq A\|x\|$ entraîne à la limite $\|f(x)\| \leq A\|x\|$ $\forall x \in E$. Donc f est continue. Il reste à montrer que $\|f_n - f\|$ tend vers zéro. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, $\forall x \in E$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in E, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\|x\| .$$

c'est à dire :

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n - f\| \leq \varepsilon .$$

Donc (f_n) converge vers f dans $L(E, F)$.

1.3.5 Corollaire

Soit E un e.v.n. $E^* = L(E, K)$ est un espace de Banach.

1.3.6. Series dans un e.v.n

Soit (u_n) une suite de E. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. On dit que la serie de terme général (u_n) est convergente si la suite (S_n) est convergente et qu'elle est normalement convergente si $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème

Un e.v.n E est un espace de Banach ssi toute série normalement convergente est convergente.

Preuve

Supposons que E est un espace de Banach, et soit $\sum u_n$ une série normalement convergente.

Montrons que la suite (S_n) des sommes partielles est une suite de Cauchy. On a pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m > n$,

$$\|S_m - S_n\| = \|u_{n+1} + \dots + u_m\| \leq \|u_{n+1}\| + \dots + \|u_m\|.$$

Puisque $\sum \|u_n\|$ est convergente, $\lim\limits_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} \|u_{n+1}\| + \dots + \|u_m\| = 0$

Donc la suite (S_n) est de Cauchy. Comme E est complet, la suite (S_n) est convergente. Donc la série $\sum u_n$ est convergente.

Inversement supposons que dans E, toute série normalement convergente est convergente et montrons que E est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E,

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_1 \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{2}$.

Puis il existe $n_2 > n_1$ tel que $m > n \geq n_2 \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{2^2}$

et $\exists n_3 > n_2$ tq $m > n \geq n_2 \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{2^3}$.

On construit ainsi, par récurrence, une suite (n_p) d'entiers strictement croissante telle que $m > n \geq n_p \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{2^p}$

Posons $u_p = x_{n_p}$; alors $\|u_{p+1} - u_p\| \leq \frac{1}{2^p}$. Donc la série $\sum(u_{p+1} - u_p)$ est convergente. Ce qui implique que la suite (u_p) est convergente. Comme (u_p) est une sous-suite de (x_n) et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, On déduit que (x_n) est convergente.

1.4 Espaces quotients

1.4.1. Soient E un e.v.n sur K et F un s.e.v de E. Définissons sur E la relation $\mathcal{R}$ par $x \mathcal{R} y$ ssi $x - y \in F$

Il est clair que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Notons par $\dot{x}$ la classe de x et par $E/_F$ l'ensemble quotient $E/_{\mathcal{R}}$. Posons pour tous $\dot{x}, \dot{y} \in E/_F$ et $\lambda \in K$, $\dot{x} + \dot{y} = \widehat{x+y}$ et $\lambda \dot{x} = \widehat{\lambda x}$. Alors on vérifie facilement que $(E/_F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K.

IV.2. Proposition.

Soient E un e.v.n. sur K et F un s.e.v. fermé de E. Alors l'application

$$\begin{aligned} E/_F &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \dot{x} &\longmapsto \|\dot{x}\| = d(x, F) \end{aligned}$$

définie une norme sur $E/_F$.

Preuve.

• **Bien définie.**

Montrons que $\|\dot{x}\|$ ne dépent pas de l'élément choisi dans $\dot{x}$. Soit $x' \in \dot{x}$. Montrons que $d(x', F) = d(x, F)$.

On a $x' - x \in F$, donc $x' - x + F = F$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} d(x', F) = d(x', x' - x + F) &= \inf\{\|x' - (x' - x + y)\|, y \in F\} \\ &= \inf\{\|x - y\|, y \in F\} \\ &= d(x, F) \end{aligned}$$

Séparation.

Soit $\dot{x} \in E/_F$, on a

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\| = 0 &\Leftrightarrow d(x, F) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \bar{F} \\ &\Leftrightarrow x \in F \quad (\text{car } \bar{F} = F) \\ &\Leftrightarrow \dot{x} = \dot{0} \end{aligned}$$

Homogénéité.

Soient $\lambda \in K$ et $\dot{x} \in E/F$. Montrons que $\|\lambda \dot{x}\| = |\lambda| \|\dot{x}\|$. L'égalité est vérifiée pour $\lambda = 0$. Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda F = F$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \|\lambda \dot{x}\| = \|\dot{\widehat{\lambda x}}\| &= d(\lambda x, F) = d(\lambda x, \lambda F) \\ &= \inf \{ \|\lambda x - \lambda y\|, y \in F \} \\ &= \inf \{ |\lambda| \|x - y\| , y \in F \} \\ &= |\lambda| d(x, F) \\ &= |\lambda| \|\dot{x}\|. \end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

Soient $\dot{x}, \dot{y} \in E/F$. Montrons que $\|\dot{x} + \dot{y}\| \leq \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\|$. On a : $\|\dot{x} + \dot{y}\| = \|\dot{\widehat{x+y}}\| = d(x+y, F)$ et $\forall z_1, z_2 \in F$, $z_1 + z_2 \in F$. Donc $\forall z_1, z_2 \in F$,

$$\begin{aligned} \|\dot{x} + \dot{y}\| &\leq \|x + y - (z_1 + z_2)\| \\ &\leq \|x - z_1\| + \|y - z_2\| \end{aligned}$$

En passant à l'inf sur z_1 et sur z_2, on obtient :

$$\|\dot{x} + \dot{y}\| \leq \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\|.$$

IV.3. Propriétés.

Soient E un e.v.n. sur K, F un s.e.v. fermé de E. On suppose que $F \neq E$ et on désigne par Π l'application $x \mapsto \dot{x}$ de E sur E/F. Alors :

1) $\forall x, y \in E$, $\quad d(\dot{x}, \dot{y}) = \|\dot{x} - \dot{y}\|$.

2) $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $\quad B_0(\dot{x}, r) = \Pi(B_0(x, r))$.

3) Π est une application linéaire continue de norme 1.

4) Π est une application ouverte.

Preuve.

1) Soient $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} d(\dot{x}, \dot{y}) &= d(x, y+F) \\ &= \inf\{\|x-(y+z)\|, z \in F\} \\ &= \inf\{\|(x-y)-z\|, z \in F\} \\ &= \|\dot{\widehat{x-y}}\| = \|\dot{x}-\dot{y}\|. \end{aligned}$$

2) Soient $x \in E$ et $r > 0$. Pour tout $\dot{y} \in E/F$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{y} \in B_o(\dot{x}, r) &\iff \|\dot{y}-\dot{x}\| < r \\ &\iff d(x, \dot{y}) < r \\ &\iff \exists z \in \dot{y} \text{ tq } d(x, z) < r \\ &\iff \exists z \in B_o(x, r) \text{ tq } \dot{y} = \Pi(z) \\ &\iff \dot{y} \in \Pi(B_o(x, r)) \end{aligned}$$

Donc

$$B_o(\dot{x}, r) = \Pi(B_o(x, r)).$$

3) Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in K$. On a

$$\Pi(x+y) = \dot{\widehat{x+y}} = \dot{x} + \dot{y} = \Pi(x) + \Pi(y)$$

et

$$\Pi(\lambda x) = \dot{\widehat{\lambda x}} = \lambda \dot{x} = \lambda \Pi(x)$$

Donc Π est linéaire. De plus, on a $\forall x \in B_f(0,1)$,

$$\begin{aligned} \|\Pi(x)\| = \|\dot{x}\| = d(x, F) &\leq \|x-0\| \quad (\text{car } 0 \in F) \\ &\leq 1 \quad \text{car } \|x\| \leq 1. \end{aligned}$$

Donc $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|\Pi(x)\| \leq 1$. Ce qui montre que Π est continue et que $\|\Pi\| \leq 1$.

Montrons que $\|\Pi\| \geq 1$. Puisque $F \neq E$, $\exists a \in E$ tel que $a \notin F$. Alors $\|\dot{a}\| \neq 0$. Posons $\dot{y} = \frac{\dot{a}}{\|\dot{a}\|}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(1-\tfrac{1}{n})\dot{y} \in B_0(\dot{0}, 1) = \Pi\left(B_0(0,1)\right)$$

Il existe donc $x_n \in B_0(0,1)$ tel que $(1-\frac{1}{n})\dot{y} = \Pi(x_n)$.

Alors

$$\|(1-\tfrac{1}{n})\dot{y}\| \leq \|\Pi\| \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

càd

$$1-\frac{1}{n} \leq \|\Pi\| \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient : $\|\Pi\| \geq 1$.

4°) Soit A un ouvert de E. Montrons que $\Pi(A)$ est un ouvert de E/F. Soit $\dot{y} \in \Pi(A)$, $\exists x \in A$ tq $\dot{y} = \Pi(x)$. Puisque A est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B_0(x, \varepsilon) \subset A$. Alors $\Pi(B_0(x,\varepsilon)) \subset \Pi(A)$ càd $B_0(\dot{x}, \varepsilon) \subset \Pi(A)$. Or $\dot{x} = \dot{y}$, donc $B_0(\dot{y}, \varepsilon) \subset \Pi(A)$. Ainsi $\Pi(A)$ est voisinage de tous ces points. Donc $\Pi(A)$ est ouvert.

IV.4. Application (Théorème de Riesz).

Soit E un e.v.n. sur K. On suppose que la sphère unitée S est compacte. Alors E est de dimension finie.

Preuve.

Les boules ouvertes $B_0(x, \frac{1}{2})$, $x \in S$ forment un recouvrement ouvert de S. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $B_0(x_1, \frac{1}{2}), \ldots, B_0(x_n, \frac{1}{2})$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors

F est de dimension fini. Donc F est complet et par conséquent F est fermé dans E. Supposons que $F \neq E$ et considérons la projection canonique π de E sur E/F. On a $\forall x \in S$, $\exists i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $x \in B_0(x_i, \frac{1}{2})$. Donc $\|x - x_i\| < \frac{1}{2}$. Comme $x_i \in F$, on a $d(x, F) \leq \|x - x_i\|$. Donc $\|\dot{x}\| < \frac{1}{2}$, càd $\|\pi(x)\| < \frac{1}{2}$. Ceci étant vrai $\forall x \in S$, donc $\sup\limits_{\|x\|=1} \|\pi(x)\| \leq \frac{1}{2}$. Càd $\|\pi\| \leq \frac{1}{2}$. ce qui est en contradiction avec $\|\pi\| = 1$. On peut donc conclure que $E = F$ et que E est de dimension finie.

IV. 5. Proposition

Soient E un e.v.n. sur K et F un s.e.v. fermé de E. On suppose que $F \neq E$. Soit B un sous-ensemble de E, on a:

$$\pi(B) \text{ est fermé dans } E/F \Longleftrightarrow B + F \text{ est fermé dans } E.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \text{On a } \pi^{-1}(\pi(B)) &= \{x \in E \mid \pi(x) \in \pi(B)\} \\ &= \{x \in E \mid \exists y \in B,\ \pi(x) = \pi(y)\} \\ &= \{x \in E \mid \exists y \in B,\ x - y \in F\} \\ &= B + F. \end{aligned}$$

Donc si $\pi(B)$ est fermé, alors $B + F$ est fermé car π est continue. Inversement supposons que $B + F$ est fermé et montrons que $\pi(B)$ est fermé. Puisque π est une application ouverte, il suffit de montrer que $[\pi(B)]^c = \pi[(B+F)^c]$.

si $y \in \pi[(B+F)^c]$, $\exists x \in (B+F)^c$ tq $y = \pi(x)$. On a $B + F = \pi^{-1}(\pi(B))$. Donc $x \notin \pi^{-1}(\pi(B))$, càd $\pi(x) \notin \pi(B)$ $\Rightarrow y \notin \pi(B) \Rightarrow y \in [\pi(B)]^c$.

Exercice 1

Supposons que f est continue sur E. Soit $x \in B_o(a,r)$.

On a : $x = a + (x-a)$. Donc $f(x) = f(a) + f(x-a)$

et par suite $\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + \|f\|\,\|x-a\|$

$$\leq \|f(a)\| + r\|f\|.$$

Donc f est bornée par $\|f(a)\| + r\|f\|$ sur $B_o(a,r)$.

Inversement, supposons qu'il existe $M>0$ tel que

$$\forall x \in B_o(a,r), \quad \|f(x)\| \leq M$$

et montrons que f est continue sur E. Il suffit de montrer que f est bornée sur la sphère unitée $S(0,1)$. Soit $x \in S(0,1)$. On a $a + \frac{r}{2}x \in B_o(a,r)$. Donc $\|f(a+\frac{r}{2}x)\| \leq M$. Comme $\frac{r}{2}x = a + \frac{r}{2}x - a$, on a:

$\|f(\frac{r}{2}x)\| \leq M + \|f(a)\|$ et par suite $\|f(x)\| \leq \frac{2}{r}(M + \|f(a)\|)$.

On peut donc conclure que f est continue sur E.

Exercice 2

Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M>0$ tel que $\|x_n\| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\|\alpha_n x_n\| \leq M\alpha_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\sum \alpha_n = 1$, la série $\sum \alpha_n x_n$ est normalement convergente et comme E est un espace de Banach, elle est convergente. Soit u sa limite. Montrons que $u \in C$. Pour cela posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x_k$ où $\beta_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}$. On a pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\beta_k \geq 0$, $x_k \in C$ et $\sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1$. Donc, puisque C est convexe, $u_n \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a

$$u_n = \frac{1}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k .$$

Donc (u_n) est convergente et sa limite est égale à u. Comme C est fermé, on a $u \in C$.

Exercice 3

1) Soit $y \in r B_Y$, On a $2y \in L(C) + r B_Y$. Donc il existe $x_0 \in C$ tel que $\| 2y - L(x_0) \| \leq r$. Alors $\| y - L(\frac{1}{2} x_0) \| \leq \frac{r}{2}$. De même $2^2 (y - L(\frac{1}{2} x_0)) \in L(C) + r B_Y$, donc il existe $x_1 \in C$ tel que $\| 2^2 (y - L(\frac{1}{2} x_0)) - L(x_1) \| \leq r$. Alors

$$\| y - L(\frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2^2} x_1) \| \leq \frac{r}{2^2}$$

Supposons qu'on a construit $x_0, x_1, \dots, x_n \in C$ tels que

$$\| y - L(\frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2^2} x_1 + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} x_n) \| \leq \frac{r}{2^{n+1}}$$

Alors

$$2^{n+1} \left(y - L\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} x_k\right) \right) \in L(C) + r B_Y .$$

Donc il existe $x_{n+1} \in C$ tel que

$$\| 2^{n+2} (y - L(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} x_k) - L(x_{n+1}) \| \leq r$$

Alors

$$\| y - L(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{k+1}} x_k) \| \leq \frac{r}{2^{n+2}} .$$

Ainsi nous avons construit, par récurrence sur n, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad \| y - L(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} x_k) \| \leq \frac{r}{2^{n+1}} . \qquad (*)$$

Puisque C est borné, la suite (x_n) est bornée et puisque C est convexe fermé et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$, la série $\sum \frac{1}{2^{n+1}} x_n$ est convergente et sa limite $x \in C$. En faisant tendre n vers l'infini dans $(*)$, on obtient : $y = L(x)$. Donc $y \in L(C)$.