

Série 1

Exercice 1

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les applications f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z) \quad \text{et} \quad g(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad g(e_2) = e_2 + e_3, \quad g(e_3) = e_3.$$

- 1) Donner les matrices M_f et M_g de f et g dans la base B .
- 2) Donner l'image de la base B par l'application linéaire $h = f - g$.
- 3) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner les coordonnées de $h(x, y, z)$ dans la base B .

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, rapporté à sa base canonique $B = \{e_1, e_2\}$, on considère l'endomorphisme f défini par : $f(e_1) = e_1 + 3e_2$, $f(e_2) = -e_1 + e_2$.

- 1) Déterminer la matrice A de f dans la base B .
- 2) Soit $u = xe_1 + ye_2 \in E$. Calculer les coordonnées x' et y' (en fonction de x et y) de $f(u)$ dans B .
- 3) Soient $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = -e_1 + e_2$. Démontrer que $B' = \{e'_1, e'_2\}$ est une base de E .
- 4) Écrire la matrice de passage P de B à B' . Calculer P^{-1} (la matrice de passage de B' à B).
- 5) Donner la matrice A' de f dans la base B' . En déduire les expressions de $f(e'_1)$ et de $f(e'_2)$ comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 .

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'endomorphisme f défini par : $f(e_1) = \frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3$, $f(e_2) = -\frac{1}{2}e_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_3$, $f(e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3$.

- 1) Donner la matrice A de f dans la base B .
- 2) Soient $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$, $e'_3 = (1, 0, 1)$.
Vérifier que $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de E .
- 3) Écrire $f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)$ dans la base B' .
- 4) En déduire la matrice A' de f dans la base B' .
- 5) Donner la matrice A' en utilisant la matrice de passage de la base B à la base B' .

Exercice 4

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

- a) Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, non nul tel que la famille $B = \{u, f(u), f^2(u)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
- b) Écrire la matrice de f dans la base B .

Exercice 5

Soient $P_1(X) = 2X^2 - X$, $P_2(X) = 2X^2 - 5X - 1$ et $P_3(X) = 2X^2 - 3X - 2$.

- 1) Montrer que $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2) On appelle $B_0 = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Écrire la matrice de passage d'une base à l'autre.
- 3) Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$. Donner les composantes de P dans la base B' .

Exercice 6 (facultatif)

Soient

$$P_1(X) = 3X + 2, \quad P_2(X) = 2X + 3 \quad \text{et} \quad D : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$$
$$P(X) \longrightarrow P'(X)$$

Soient M la matrice de D dans la base canonique et P la matrice de passage de la base canonique à la base $\{P_1, P_2\}$. Écrire la matrice M' de D dans la base $\{P_1, P_2\}$ et Vérifier que $M' = P^{-1}MP$.

Exercice 1

$$1) \quad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad h(e_1) = f(e_1) - g(e_1) = e_1 - (e_1 + e_2 + e_3) = -e_2 - e_3$$

$$h(e_2) = f(e_2) - g(e_2) = e_1 + e_2 - (e_2 + e_3) = e_1 - e_3$$

$$h(e_3) = f(e_3) - g(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 - e_3 = e_1 + e_2$$

la matrice de h dans la base B est donc $M_B(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

OU par la re $M_B(h) = M_f - M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$3) \quad h(x, y, z) = M_B(h) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ -x + z \\ -x - y \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

$$f(e_1) = e_1 + 3e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = -e_1 + e_2.$$

$$1) \quad \text{la matrice } A \text{ de } f \text{ dans la base } B \text{ est } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad v = x e_1 + y e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(v) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + y \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 3x + y \end{cases}.$$

(2)

3) $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = -e_1 + e_2$. Démontrons que $B' = \{e'_1, e'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$\text{card}(B') = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Il suffit donc de montrer que B' est libre. Pour cela, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 = 0$. Alors, $\alpha e_1 + \alpha e_2 - \beta e_1 + \beta e_2 = 0$.

$\Rightarrow (\alpha - \beta) e_1 + (\alpha + \beta) e_2 = 0$. Comme $\{e_1, e_2\}$ est une base, alors elle est libre. Donc $\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

par conséquent, $B' = \{e'_1, e'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

4) La matrice de passage de B à B' est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e'_1, e'_2 dans la base B . Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

on calcule P^{-1} par la méthode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ \frac{1}{2} L_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ L_2 \end{matrix}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Donner la matrice A' de f dans la base B' .

(3)

première méthode : $A' = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(par la formule de changement de base) $= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Deuxième méthode : (calcul direct)

On exprime $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$ dans la base B'

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après la question 2) :

$$f(e'_1) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad f(e'_2) = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 2$$

$$\Rightarrow f(e'_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } B'$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \alpha + \beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -2 \text{ et } \beta = 0$$

$$\Rightarrow f(e'_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } B'.$$

$$\text{Donc } A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire les expressions de $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$.

$$f(e'_1) = 2e'_1 + 2e'_2 = 2(e_1 + e_2) + 2(-e_1 + e_2) = 4e_2.$$

$$f(e'_2) = -2e'_1 = -2(e_1 + e_2) = -2e_1 - 2e_2.$$

Exercice 3

- 1) la matrice de f dans la base B est $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ (4)
- 2) $\text{Card}(B') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Il suffit donc de montrer que B' est libre (ou générateur).

soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

- 3) $f(e'_1) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = e_1 - e_3 = e'_1$
 $f(e'_2) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = e_1 + e_2 = e'_2$
 $f(e'_3) = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3) = 2e_1 + e_3 = 2e'_3$

Autre méthode :

$$f(e'_1) = A \cdot e'_1 = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e'_1$$

$$f(e'_2) = A e'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e'_2$$

$$f(e'_3) = A e'_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e'_3$$

- 4) la matrice de f dans la base B' est

$$A' = \begin{pmatrix} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix}$$

5) La matrice de passage de B à B' est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5)
 On calcule P^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base donne:

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1} A P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4

a) on a $f^2 = f \circ f \neq 0$, donc il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, non nul tel que $f^2(v) \neq 0$.

Montrons que $B = \{v, f(v), f^2(v)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Il suffit de montrer que B est libre, car $\text{card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v + \beta f(v) + \gamma f^2(v) = 0$ (1).

Alors on a $f^2(\alpha v + \beta f(v) + \gamma f^2(v)) = f^2(0) = (f \circ f)(0) = 0$

par suite, $\alpha f^2(v) + \beta f^3(v) + \gamma f^4(v) = 0$

(6)

comme $f^3(v) = f^4(v) = 0$, alors $\alpha f^2(v) = 0$.

or $f^2(v) \neq 0$, donc $\boxed{\alpha = 0}$

la relation (1) devient $\beta f(v) + \gamma f^2(v) = 0$.

$\Rightarrow f(\beta f(v) + \gamma f^2(v)) = 0 \Rightarrow \beta f^2(v) + \gamma f^3(v) = 0$.

comme $f^3(v) = 0$, alors $\beta f^2(v) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

la relation (1) devient $\gamma f^2(v) = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$

par conséquent, B est libre.

b) la matrice de f dans la base B est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(v)$, $f(f(v))$, $f(f^2(v))$ dans la base $B = \{v, f(v), f^2(v)\}$.

$f(v) = 0 \cdot v + 1 \cdot f(v) + 0 \cdot f^2(v)$.

$f(f(v)) = f^2(v) = 0 \cdot v + 0 \cdot f(v) + 1 \cdot f^2(v)$

$f(f^2(v)) = f^3(v) = 0 = 0 \cdot v + 0 \cdot f(v) + 0 \cdot f^2(v)$.

Donc $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

(7)

$$P_1(x) = 2x^2 - x, \quad P_2(x) = 2x^2 - 5x - 1, \quad P_3(x) = 2x^2 - 3x - 2.$$

1) $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3 = \text{card}(B')$. Il suffit de montrer que

$B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha P_1(x) + \beta P_2(x) + \gamma P_3(x) = 0$

$$\Rightarrow \alpha(2x^2 - x) + \beta(2x^2 - 5x - 1) + \gamma(2x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 & L_1 \\ -\alpha - 5\beta - 3\gamma = 0 & L_2 \\ -\beta - 2\gamma = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$L_3 \Rightarrow \boxed{\beta = -2\gamma} \quad L_2 \Rightarrow -\alpha + 10\gamma - 3\gamma = 0$$
$$\Rightarrow -\alpha + 7\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 7\gamma}$$

$$L_1 \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\Rightarrow 7\gamma - 2\gamma + \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

$$\text{D'où } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

2) La matrice de passage de B_0 à B' est :

$$P_{B_0 B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de B' à B_0 est $P_{B' B_0} = P_{B_0 B'}^{-1}$.

on inverse

(8)

$$\begin{cases} P_1 = -X + 2X^2 \\ P_2 = -1 - 5X + 2X^2 \\ P_3 = -2 - 3X + 2X^2 \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} -1 - 5X + 2X^2 = P_2 \cdot L_1 \\ -2 - 3X + 2X^2 = P_3 \cdot L_2 \\ -X + 2X^2 = P_1 \cdot L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 - 5X + 2X^2 = P_2 \cdot L_1 \\ 7X - 2X^2 = P_3 - 2P_2 \cdot (L_1 - 2L_2) \\ -X + 2X^2 = P_1 \cdot L_3 \end{cases}$$

$$L_3 + L_2 \Rightarrow 6X = P_1 - 2P_2 + P_3 \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_3}$$

$$L_3 \Rightarrow 2X^2 = P_1 + X = \frac{7}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_3$$

$$\Rightarrow \boxed{X^2 = \frac{7}{12}P_1 - \frac{1}{6}P_2 + \frac{1}{12}P_3}$$

$$L_1 \Rightarrow 1 = -5\left(\frac{1}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_3\right) + 2\left(\frac{7}{12}P_1 - \frac{1}{6}P_2 + \frac{1}{12}P_3\right) - P_2$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 - \frac{2}{3}P_3}$$

Donc $P_{B'B_0} = P_{B_0B'}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

$$3) P(X) = aX^2 + bX + c = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = U$$

Oma $U = P_{B_0B'} \cdot U'$, avec U' est la matrice colonne des coordonnées de $P(X)$ dans B' .

$$\text{Donc, } U' = P^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}c + \frac{1}{6}b + \frac{2}{12}a \\ \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}a \\ -\frac{2}{3}c + \frac{1}{6}b + \frac{1}{12}a \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}$$

Exercice 6.

La base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $\{1, x\}$.

$$D(1) = 1' = 0, \quad D(x) = x' = 1.$$

Donc la matrice de D dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1} par la méthode de Gauss, on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

pour calculer la matrice M' par la méthode directe, on exprime $D(p_1)$ et $D(p_2)$ dans la base $\{p_1, p_2\}$.

$$D(p_1) = p_1' = 3 = \alpha p_1 + \beta p_2 = \alpha(3x+2) + \beta(2x+3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha + 4\beta = 0 \quad (\times 2) \\ -6\alpha - 9\beta = -9 \quad (\times -3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5\beta = 9 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 9/5}$$

$$L_1 \Rightarrow 3\alpha + 2 \times \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow 3\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{4}{15}}$$

(10)

$$D(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}_{B'}$$

$$D(P_2) = 2 = \alpha P_1 + \beta P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha + 4\beta = 0 \\ -6\alpha - 9\beta = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta = -\frac{2}{5}}$$

$$L_2 \Rightarrow 3\alpha + 2 \times \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{4}{15}}$$

$$\Rightarrow D(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

On vérifie que $M' = P^{-1} M P$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Série 2

Exercice 1

Sans les calculer, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants :

$$\text{a) } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on considère le déterminant d'ordre $n \geq 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

- 1) Calculer Δ_2 et Δ_3 .
- 2) Trouver une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1} .
- 3) En déduire la valeur de Δ_n .

Exercice 4

$$1) \text{ Calculer le déterminant de la matrice } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2) En déduire que le système suivant est de Cramer :

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

- 3) Donner la solution du système (S).
- 4) Inverser la matrice A.
- 5) Retrouver le résultat de 3) en utilisant 4).

Exercice 5

Discuter et résoudre, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 1 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 6

Soit m un réel et $A(m)$ la matrice suivante : $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer le rang de la matrice $A(m)$ en fonction du paramètre m .
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la matrice $A(m)$ soit inversible.
- 3) Quand cette condition est vérifiée, trouver l'unique solution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

où a, b, c sont trois réels fixés.

Exercice 1

a) L_2 est nulle.

(si une colonne ou une ligne ne contient que des 0, le déterminant est nul).

b) $L_2 = -L_1$

(si deux lignes sont proportionnelles, le déterminant est nul).

c) $C_3 = 2C_1$

(si deux colonnes sont proportionnelles, le déterminant est nul).

d) En additionnant C_2 et C_3 , on trouve un vecteur

$(a+b+c, a+b+c, a+b+c)$ dont les coordonnées sont proportionnelles à C_1 .

e) En additionnant les trois lignes, on trouve le vecteur nul.

Exercice 2

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} \text{ (développement suivant la 1^{ère} colonne)}$$

$$= - \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = -2 \times 6 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

pour Δ_2 , les coefficients de la première ligne ne sont pas proportionnels les uns des autres (pas facile alors de faire apparaître des 0). En revanche,

$$9 - 2 \times 4 = 1, \quad 13 - 3 \times 4 = 1, \quad 17 - 4 \times 4 = 1.$$

On va donc commencer par faire apparaître des 1.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 - 2c_4 & c_2 - 3c_4 & c_3 - 4c_4 & c_4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_1 & c_4 - 4c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 + 2c_2 & c_2 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -4 & -6 \\ -4 & -8 & -11 \\ -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -11 \\ -9 & -34 & -44 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_1 \end{array} \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

Exercise 3

(3)

$$1) \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha.$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{C_1}{1} & \overset{C_2-C_1}{0} & \overset{C_3-C_1}{0} \\ \alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \Delta_m &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{C_1}{1} & \overset{C_2-C_1}{0} & \overset{C_3-C_1}{1} & \dots & \overset{C_m-C_1}{1} \\ \alpha & 1-\alpha & 1 & \dots & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \alpha & 0 & \alpha & \dots & \alpha & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha & 1 & & \vdots \\ \alpha & & \ddots & \vdots \\ \alpha & & & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha) \Delta_{m-1}. \end{aligned}$$

DomC $\Delta_m = (1-\alpha) \Delta_{m-1} \quad \forall m \geq 2.$

$$3) \Delta_m = (1-\alpha) \Delta_{m-1} = (1-\alpha)^2 \Delta_{m-2} = \dots = (1-\alpha)^{m-2} \Delta_{m-(m-2)}$$

$$\Rightarrow \Delta_m = (1-\alpha)^{m-2} \Delta_2 = (1-\alpha)^{m-1}.$$

Exercice 4

(4)

$$\begin{aligned} 1) \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \\ &= - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Le système (S) est équivalent à } A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = -4 \neq 0$, alors (S) est de Cramer.

$$3) \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{-4} = -1.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow y = \frac{-8}{-4} = 2.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{-4} = -1.$$

$$\Rightarrow S' = \{ (-1, 2, -1) \}.$$

$$4) \text{Wm}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5) (S) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

(5)

la matrice associée au système est $M_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(M_a) &= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1+c_2+c_3 & c_2 & c_3 \\ 3+a & 1 & 1 \\ 3+a & 1+a & 1 \\ 3+a & 1 & 1+a \end{vmatrix} \\ &= (3+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (3+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{matrix} \\ &= a(3+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2(3+a). \end{aligned}$$

le système est de Cramer si $\det(M_a) \neq 0$ ou encore si $a \neq 0$ et $a \neq -3$.

1^{er} cas. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$. Dans ce cas le système admet une seule solution.

$$\text{On trouve } \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2+a}{a(3+a)}, \frac{-1}{a(3+a)}, \frac{-1}{a(3+a)} \right) \right\}.$$

2^{ème} cas. $a = 0$ est le système devient :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

les équations sont incompatibles (ou, on a $1=0$),

donc le système n'admet pas de solution.

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset.$$

3^{eme} cas, $a = -3$ et le système devient :

(6)

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Soi aussi, on a $L_1 + L_2 + L_3 \Rightarrow 0 = 1$.

Donc le système n'admet pas de solution. $S = \emptyset$

Exercice 6

$$\begin{aligned} 1) \det(A(m)) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2m + 1. \end{aligned}$$

si $m \neq \frac{1}{2}$, alors $\det(A(m)) \neq 0$ et $\text{rang}(A(m)) = 3$.

si $m = \frac{1}{2}$, alors $\text{rang}(A(m)) \leq 2$.

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \text{ Le sous-déterminant } \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ donc } \text{rang}(A(\frac{1}{2})) = 2.$$

2) pour que la matrice $A(m)$ soit inversible il faut et il suffit que $m \neq \frac{1}{2}$.

3) si $m \neq \frac{1}{2}$, alors l'unique solution du système $A(m) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A(m)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\det(A(m)) = \begin{pmatrix} -m-4 & 3 & 2-m \\ 3 & -2 & -1 \\ 2-m & -1 & m-1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\Rightarrow A(m)^{-1} = \frac{1}{1-2m} \begin{pmatrix} -m-4 & 3 & 2-m \\ 3 & -2 & -1 \\ 2-m & -1 & m-1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-2m} \begin{pmatrix} -m-4 & 3 & 2-m \\ 3 & -2 & -1 \\ 2-m & -1 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-2m} \begin{pmatrix} -a(m+4) + 3b + c(2m) \\ 3a - 2b - c \\ a(2-m) - b + c(m-1) \end{pmatrix},$$

Série 3

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme U dont la matrice dans la base canonique $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme U (c'est-à-dire de la matrice A).
- 2) Montrer que 1 est valeur propre de l'endomorphisme U . En déduire les autres valeurs propres.
- 3) Déterminer les sous-espaces propres de l'endomorphisme U .
- 4) Diagonaliser U (c'est-à-dire : donner une base B de vecteurs propres de U , les matrices de passage de la base C à la base B et de la base B à la base C et la matrice $M_B(U)$).

Exercice 2

On considère l'application Φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ associe $\Phi(P) = (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P$.

- 1) Démontrer que Φ est une application linéaire.
- 2) Écrire la matrice M de Φ relativement à la base $B = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 3) Déterminer les valeurs propres de Φ . En déduire que Φ est un isomorphisme.
- 4) Déterminer les sous-espaces propres de Φ et montrer que Φ est diagonalisable.
- 5) Déterminer une base B' de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice M' de Φ est diagonale.

Exercice 3

On considère la matrice carrée $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère, pour tout nombre réel a , la matrice carrée $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

- (1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- (2) a) Montrer que J est diagonalisable.
b) Déterminer une matrice réelle diagonale d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telle que $J = PDP^{-1}$.
- (3) En déduire, après avoir exprimé M_a en fonction de I_3 et J , que pour tout nombre réel a , il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
- (4) Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

- 1) Factoriser le polynôme caractéristique $C_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
- 2) Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
- 3) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
- 4) Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α .

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A .
- 2) En déduire que A est trigonalisable mais qu'elle n'est pas diagonalisable et que son spectre est $sp(f) = \{1, 2\}$.
- 3) Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2 de A .
- 4) On pose $u = (1, 0, 0)$, $v = (2, 1, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $B = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 5) Calculer la matrice T de f dans la base B .
- 6) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n et en déduire A^n .

Exercice 6 (facultatif)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que $\lambda = -1$ est valeur propre de A et trouver un vecteur propre, noté v , associé à cette valeur propre.
- 2) Montrer que $B' = \{v, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice T de f dans cette base.
- 3) a) Quelles sont les valeurs propres de f ?
b) f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?
- 4) En utilisant la matrice T , calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

1) le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = -(x-1)(x+2)^2.$$

2) Les valeurs propres de A sont : $\begin{cases} \lambda=1 \text{ simple} \\ \lambda=-2 \text{ double.} \end{cases}$

3) a) $E_1 = \text{Ker}(A - I_3)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ -3x + 3z = 0 & L_2 + 2L_1 \\ -3x + 3y = 0 & L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z.$$

On peut donc choisir le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de E_1 .

b) $E_{-2} = \text{Ker}(A + 2I_3)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow (A + 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

c'est l'équation d'un plan P dont deux vecteurs indépendants sont donnés par $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

NB: On peut aussi procéder comme suit :

$$E_{-2} = \{(-y-z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$E_{-2} = \{ (-y, y, 0) + (-z, 0, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$= \{ y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

E_{-2} est engendré par $\{ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$

($\{ v_2, v_3 \}$ est une base de E_{-2} car il est générateur et dimension d'un plan est égale 2)

ou encore $\{ v_2, v_3 \}$ est libre, car $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

ii) comme $v_1 \notin \underline{P}$ (ou comme $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$), on a une base $B = \{ v_1, v_2, v_3 \}.$

on a

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 - e_2 \\ v_3 = e_1 - e_3 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(v_1 - 2v_2 + v_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 - 2v_3) \end{cases}$$

Donc, la matrice de passage de la base C à la base B

est $P_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

la matrice de passage de B à C est :

$$P_{BC} = P_{CB}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si on prend

$$P_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$P_{BC} = P_{CB}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

un calcul immédiat donne

$$U(v_1) = v_1, \quad U(v_2) = -2v_2, \quad U(v_3) = -2v_3.$$

on a donc

$$M_B(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = P_{CB}^{-1} A P_{CB}.$$

Exercice 2

1) On démontre que ϕ est une application linéaire.

soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{aligned}\phi(\alpha P + \beta Q) &= (x^2 - 1)(\alpha P' + \beta Q') - (2x + 1)(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha(x^2 - 1)P' - \alpha(2x + 1)P + \beta(x^2 - 1)Q' - \beta(2x + 1)Q \\ &= \alpha \phi(P) + \beta \phi(Q).\end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi$ est linéaire.

2) On détermine la matrice M de ϕ dans la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$. C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images par ϕ de $1, x$ et x^2 .

$$\phi(1) = (x^2 - 1) \cdot 1' - (2x + 1) \cdot 1 = -1 - 2x = -1 \cdot 1 - 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\phi(x) = (x^2 - 1) \cdot x' - (2x + 1) \cdot x = -1 - x - x^2 = -1 \cdot 1 - 1 \cdot x - 1 \cdot x^2$$

$$\phi(x^2) = (x^2 - 1) \cdot (x^2)' - (2x + 1) \cdot x^2 = -2x - x^2 = 0 \cdot 1 + (-2) \cdot x + (-1) \cdot x^2.$$

$$\text{Ainsi } M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) On détermine les valeurs propres de ϕ . ce sont les valeurs propres de M .

$$\begin{aligned}C_M(x) &= \begin{vmatrix} -1-x & -1 & 0 \\ -2 & -1-x & -2 \\ 0 & -1 & -1-x \end{vmatrix} = -(1+x) \begin{vmatrix} -(1+x) & -2 \\ -1 & -(1+x) \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -(1+x) \end{vmatrix} \\ &= -(1+x) [(1+x)^2 - 2] + 2(1+x) \\ &= -(1+x)(x^2 - 2x - 1) + 2(1+x) \\ &= -(1+x)(x^2 + 2x - 3) \\ &= -(1+x)(x-1)(x+3)\end{aligned}$$

$C_M(X) = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 1$ ou $X = -3$. Donc ϕ admet trois valeurs propres simples : $-1, 1$ et -3 .

- ϕ est bijective car 0 n'est pas valeur propre. Donc, ϕ est un isomorphisme (linéaire + bijective).

1) On détermine $E_{-1} = \text{Ker}(M + I_3)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

E_{-1} est donc engendré par $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) On détermine $E_1 = \text{Ker}(M - I_3)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ y = -2z \end{cases}$$

On peut choisir $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de E_1 .

3) On détermine $E_{-3} = \text{Ker}(M + 3I_3)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2z \end{cases}$$

On peut prendre $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de E_{-3} .

$$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3 = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) + \dim(E_{-3})$$

$\Rightarrow \phi$ est diagonalisable.

OU ϕ admet trois valeurs propres distinctes $\Rightarrow \phi$ est diagonalisable.

OU $C_{\phi}(x)$ est scindé et ses racines sont simples $\Rightarrow \phi$ est diagonalisable.

5) la base B' dans laquelle la matrice M' de ϕ est diagonale est $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Remarque : on a $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_{BB'}^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } M' = P_{BB'}^{-1} M P_{BB'}$$

Exercice 3

1) le polynôme caractéristique de f est :

$$C_f(x) = C_{\delta}(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 & 1 \\ 0 & -(1+x) & 2 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x(x-1)(x+2)$$

L'endomorphisme f admet donc trois valeurs propres simples : 0, 1 et -2.

On détermine les sous-espaces propres de f :

$$(*) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 = \text{Ker}(\delta - 0 \cdot \text{Id}_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = z = 0 \end{cases}$$

On peut considérer le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme base de E_0 .

$$① \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 = \ker(\mathcal{F} - I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = z \end{cases}$$

E_1 est donc engendré par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$② \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} = \ker(\mathcal{F} + 2I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -3z \\ y = -2z \end{cases}$$

On peut choisir comme base de E_{-2} le vecteur $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) a/ la matrice $\mathcal{F}$ est diagonalisable, car elle est d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes.

b) $\mathcal{F}$ est diagonalisable, donc la famille $B' = \{v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. la formule de changement de base donne : $\mathcal{F} = P D P^{-1}$ ou encore $D = P^{-1} \mathcal{F} P$,

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale de $\mathcal{F}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique vers la base B' : $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -15 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$3) a/ M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot I_3 + \mathcal{F}.$$

$$\Rightarrow M_a = P (a \cdot I_3) P^{-1} + P D P^{-1} = P \cdot (a \cdot I_3 + D) \cdot P^{-1}$$

soit $D_a = a \cdot I_3 + D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_a = P \cdot D_a \cdot P^{-1}$

i) on détermine l'ensemble des nombres réels a tel que $\det(M_a) \neq 0$.

$$\det(M_a) = \det(D_a) = a(a+1)(a-2).$$

Ainsi, M_a est inversible $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 2\}$.

Exercice 4

$$A_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & d+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & d \end{pmatrix}, d \in \mathbb{R}.$$

1) Factoriser le polynôme caractéristique $C_{A_d}(x)$ en produit de facteurs du premier degré.

$$C_{A_d}(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & d+1 \\ 1 & -2-x & 0 \\ -1 & 1 & d-x \end{vmatrix} = -(1+x) \begin{vmatrix} -(2+x) & 0 \\ 1 & d-x \end{vmatrix} + (d+1) \begin{vmatrix} 1 & -(2+x) \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x)(2+x)(d-x) + (d+1)(1-(2+x))$$

$$= (1+x)[(2+x)(d-x) - d - 1]$$

$$= (1+x)[2d - 2x + dx - x^2 - d - 1]$$

$$= (1+x)(-x^2 + (d-2)x + d-1).$$

les solutions du trinôme $-x^2 + (d-2)x + d-1$?

$$\Delta = (d-2)^2 + 4(d-1) = d^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-(d-2) - |d|}{-2} = \frac{d-2 + |d|}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(d-2) + |d|}{-2} = \frac{d-2 - |d|}{2}.$$

Les deux solutions sont -1 et $d-1$.

Donc $C_{A_d}(x) = -(1+x)^2(x-d+1)$.

2) Les valeurs propres de A_d sont les racines de $C_{A_d}(x)$.

- si $d=0$, la matrice A_d admet une seule valeur propre $d=-1$ triple (de multiplicité 3).

- si $d \neq 0$, la matrice A_d admet deux valeurs propres distinctes : $d_1 = -1$ double et $d_2 = d-1$ simple.

3) Déterminer les valeurs de d pour laquelle A_d est diagonalisable.

- si $d=0$, la matrice A_0 n'est pas diagonalisable, car sinon, il existerait une matrice P inversible telle que $A_0 = P \cdot (-I_3) \cdot P^{-1} = -I_3$. Impossible.

- si $d \neq 0$, la matrice A_d est diagonalisable si, et seulement si $\dim(E_{-1}) = 2$.

On détermine $E_{-1} = \text{Ker}(A_d - I_3)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A_d + I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (d+2)z = 0 \\ x-y = 0 \\ -x+y+(d+1)z = 0. \end{cases}$$

$$\textcircled{*} \text{ si } d = -1, \text{ on a } \begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$$

$$E_{-1} = \{ (x, x, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

$$= \{ (x, x, 0) + (0, 0, z) : (x, z) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

$$= \{ x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) : (x, z) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

Donc $\dim(E_{-1}) = 2$ car $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre,
(de rang 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 1 \neq 0$)

Dans ce cas la matrice A_d est diagonalisable.

① si $d \neq -1$, on a
$$\begin{cases} z = 0 \\ x = y. \end{cases}$$

E_{-1} est, dans ce cas, engendré par un seul vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\dim(E_{-1}) = 1 < 2$. Dans ce cas A_d n'est pas diagonalisable.

4) Si $d = -1$, la matrice A_d est diagonalisable.

On sait que A_d est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si son polynôme minimal $m_{A_d}(x)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que ces racines sont simples.

Donc, si $d = -1$, $m_{A_d}(x) = (x+1)(x-d+1) = (x+1)(x+2)$

si $d \neq -1$, $m_{A_d}(x) = (x+1)^2(x-d+1)$.

Exercice 5

1)
$$C_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(2-x).$$

le polynôme minimal de A est :

$$m_A(x) = (x-1)(x-2) \text{ ou } m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

comme $(A - I_3)(A - 2I_3)$ est non nulle, alors

$$m_A(x) = (x-1)^2(x-2).$$

2) $C_A(x)$ est scindé, donc A est trigonalisable.

A n'est pas diagonalisable car, la racine 1 de $m_A(x)$ n'est pas simple.

(A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ toutes les racines de $m_A(x)$ sont simples) ⑨

3) $C_A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$. Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

⊗ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 = \text{Ker}(A - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y=z=0. \end{cases}$

on peut choisir $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme base de E_1 .

⊗ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=z. \end{cases}$

on peut choisir $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de E_2 .

4) $\text{Card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit de montrer que B est libre.

on a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc B est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) on calcule la matrice T de f dans la base B .
c'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées
des vecteurs $f(U)$, $f(V)$, $f(W)$ dans la base B .

$$f(U) = A \cdot U = U.$$

$$f(V) = A \cdot V = 2V.$$

$$f(W) = A \cdot W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U + W$$

Donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) on a $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$N^2 = 0 \text{ et } N^k = 0, \forall k \geq 2.$$

$$DN = ND = N.$$

On applique le binôme de Newton :

$$T^m = (D + N)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k D^{m-k} N^k = \sum_{k=0}^1 C_m^k D^{m-k} N^k$$

$$\Rightarrow T^m = D^m + m \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base :

$$A = P T P^{-1}, \text{ avec } P \text{ est la matrice de passage de } C \text{ à } B.$$

De plus, $\forall m \in \mathbb{N}$ on a : $A^m = P T^m P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où, } A^m = \begin{pmatrix} 1 & -2 + 2^{m+1} & -m \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 2^m - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

1) pour montrer que -1 est valeur propre de A ,
 on résout $(A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; ceci est équivalent
 à $\det(A + I_3) = 0$.

Donc -1 est valeur propre associée à $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Montrons que $B' = \{v, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Card}(B') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \text{ et } \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

pour obtenir la matrice T de f dans la base B' , on peut utiliser la formule de changement de base :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on peut procéder autrement :

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5v + e_2.$$

$$A \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5v + e_3.$$

$$A \cdot v = -v$$

$$\Rightarrow T = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(v) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{matrix}.$$

3) a/ T est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, à savoir -1 et 1 .

f ayant pour matrice T a donc pour valeurs propres -1 et 1 .

b) f_1 n'ayant pas 0 comme valeur propre, est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

4) En calculant T^2 , on a $T^2 = I_3$.

D'après la formule de changement de base, $T = P^{-1} A P$.
D'où, $A = P \cdot T \cdot P^{-1}$.

pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A^m = P \cdot T^m \cdot P^{-1}$.

- si m est pair, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$.

$$A^m = P \cdot T^{2k} \cdot P^{-1} = P \cdot (T^2)^k \cdot P^{-1} = P \cdot I_3 \cdot P^{-1} = I_3$$

- si m est impair, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k+1$.

$$A^m = P \cdot T^{2k+1} \cdot P^{-1} = P \cdot T^{2k} \cdot T \cdot P^{-1} = P \cdot T \cdot P^{-1} = A.$$

Conclusion si on a :

pour $m \in \mathbb{N}$, $A^m = \begin{cases} I_3 & \text{si } m \text{ est pair,} \\ A & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$

Série 4

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles bilinéaires ? symétriques ?

- 1) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x_1x_2 + y_1y_2$.
- 2) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$.
- 3) Sur $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P, Q) = P'(1)Q(0) + P'(0)Q(1)$.

Exercice 2

Soit b la forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? quel est son rang ?
- 2) Pour tout $(u, v) \in E^2$, déterminer $b(u, v)$.
- 3) Justifier que $B = \{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de E .
- 4) Déterminer de deux manières la matrice M' représentant b dans B .

Exercice 3

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n telle que ${}^tA = -A$, où tA désigne la matrice transposée de A . Soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit φ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base B est A . Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ représentés dans la base B par les matrices colonnes X et Y respectivement.

- 1) Donner $\varphi(x, y)$ en fonction de X, Y et A .
- 2) Montrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.
- 3) Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $\varphi(x, x) = 0$.
- 4) En déduire que A ne possède aucune valeur propre réelle non nulle.
- 5) En déduire que si A est non nulle, alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

- 1) Pourquoi Q est une forme quadratique ?
- 2) Quelle est sa forme polaire φ ? Quelle est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
- 3) Décomposer Q en somme et différence de carrés de formes linéaires indépendantes.
- 4) Est-ce que Q est positive ? Non dégénérée ? Quel est son rang ? Quelle est sa signature ?
- 5) Déterminer une base orthogonale de Q ; Écrire la matrice de Q dans cette base.

Exercice 5

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

- 1) Donner la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Calculer le déterminant de A .
- 3) Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q est-elle non dégénérée ?
- 4) Réduire q et donner son rang et sa signature en fonction de a .
- 5) Déterminer une base orthogonale pour q .
- 6) Quelle est la matrice de q par rapport à cette base ?

Exercice 6 (facultatif)

Pour chacune des formes quadratiques suivantes, donner sa matrice dans la base canonique, sa forme polaire et utiliser la méthode de Gauss pour déterminer sa signature et en déduire une base orthogonale.

- 1) $q_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$
- 2) $q_2(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$
- 3) $q_3(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4.$

Exercice 1

1) sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $d \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(dx, y) = \varphi(d(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d^2 x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Pour $x = (1, 1)$, $y = (0, 0)$ et $d = 2$, on a :

$$\varphi(2(1, 1), (0, 0)) = 4 \neq 2 = 2\varphi((1, 1), (0, 0)).$$

Donc, φ n'est pas bilinéaire.

φ est symétrique car,

$$\varphi(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = y_1 y_2 + x_1 x_2 = \varphi(y, x).$$

2) sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$.

Soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ et
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta z, y) &= \varphi(\alpha x_1 + \beta z_1, \alpha x_2 + \beta z_2, (y_1, y_2)) \\ &= (\alpha x_1 + \beta z_1) y_2 + (\alpha x_2 + \beta z_2) y_1 \\ &= \alpha (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \beta (z_1 y_2 + z_2 y_1) \\ &= \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(z, y).\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(x, z).$$

Donc, φ est bilinéaire.

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1 x_2 + y_2 x_1 = \varphi(y, x)$$

$\Rightarrow \varphi$ est symétrique.

3) sur $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P, Q) = P'(1)Q(0) + P(0)Q(1)$.

soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + \beta R, Q) &= (\alpha P'(1) + \beta R'(1))Q(0) + (\alpha P(0) + \beta R(0))Q(1) \\ &= \alpha(P'(1)Q(0) + P(0)Q(1)) + \beta(R'(1)Q(0) + R(0)Q(1)) \\ &= \alpha \varphi(P, Q) + \beta \varphi(R, Q).\end{aligned}$$

De même, $\varphi(P, \alpha Q + \beta R) = \alpha \varphi(P, Q) + \beta \varphi(P, R)$.

$\Rightarrow \varphi$ est bilinéaire.

φ n'est pas symétrique car,

$$\varphi(P, Q) = P'(1)Q(0) + P(0)Q(1) \neq Q'(1)P(0) + Q(0)P(1) = \varphi(Q, P).$$

En effet, si $P = X$ et $Q = 1$ alors

$$\varphi(X, 1) = 2 \neq 0 = \varphi(1, X).$$

Exercice 2.

1) la forme bilinéaire n'est ni symétrique, ni antisymétrique puisque sa matrice représentative n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

le rang de b est le rang de sa matrice M .

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rang}(M) = 3.$$

3) on pose $u = (x_1, x_2, x_3)$ et $v = (y_1, y_2, y_3)$.

$$b(u, v) = {}^t u \cdot M \cdot v = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

on trouve :

$$b(u, v) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + 2 x_2 y_3 - x_3 y_1 + 4 x_3 y_2 + 3 x_3 y_3$$

3) puisque B contient trois vecteurs, pour montrer que B est une base de E il suffit de montrer que son rang est 3.

Or on a $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Donc B est libre et par conséquent, B est une base de E .

4) D'après la définition, la matrice représentative de b dans la base B est définie par $M_B(b) = (b(e'_i, e'_j))_{1 \leq i, j \leq 3}$.

avec $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

$$b(e'_1, e'_1) = 11$$

$$b(e'_2, e'_1) = 5$$

$$b(e'_3, e'_1) = -1$$

$$b(e'_1, e'_2) = 11$$

$$b(e'_2, e'_2) = 9$$

$$b(e'_3, e'_2) = -5$$

$$b(e'_1, e'_3) = -1$$

$$b(e'_2, e'_3) = -3$$

$$b(e'_3, e'_3) = -1$$

Si on, on utilise la formule de changement de base :

Or on a $P_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de C à B .

$$\text{Donc } M_B(b) = {}^t P_{CB} \cdot M \cdot P_{CB}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 5 & 9 & -3 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1) $\varphi(x, y) = {}^t X A Y$.

2) $\varphi(x, y) = {}^t X A Y = {}^t X (-{}^t A) \cdot Y = -({}^t Y A X)$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = -{}^t Y A X, \text{ car c'est un scalaire.}$$
$$= -\varphi(y, x).$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x, x) = -\varphi(x, x), \text{ d'après 2).}$

Donc $\varphi(x, x) = 0$.

4) soit λ une valeur propre de A , alors il existe $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$, où x est la matrice colonne représentative de x dans la base B .

si $\lambda \neq 0$, alors $0 = \varphi(x, x) = {}^t X A X = \lambda {}^t X X$.

Impossible car $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$.

5) si A est diagonalisable, alors sa matrice diagonale D est nulle, car toutes les valeurs propres de A sont nulles. De plus, il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P D P^{-1} = 0, \text{ or ce n'est pas le cas.}$$

(A est non nulle).

Exercice 4

1) $Q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2. C'est donc une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

2) φ est définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

On trouve pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{2x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1}{2} \\ & + \frac{2x_2y_3 + 2x_3y_2}{2} \end{aligned}$$

la matrice de φ dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 3) \quad Q(x_1, x_2, x_3) &= 2 \left[x_1^2 + 2x_1 \left(\frac{x_2 - x_3}{2} \right) \right] - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right)^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 5x_2x_3 \\ &= 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right)^2 - \frac{3}{2} \left[x_2^2 - \frac{10}{3}x_2x_3 \right] + \frac{3}{2}x_3^2 \\ &= 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{6}x_3 \right)^2 - \frac{3}{2} \left[\left(x_2 - \frac{5}{3}x_3 \right)^2 - \frac{25}{9}x_3^2 \right] + \frac{3}{2}x_3^2 \\ &= 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right)^2 - \frac{3}{2} \left(x_2 - \frac{5}{3}x_3 \right)^2 + \frac{17}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

4) Q n'est pas positive, car il y a un carré négatif.

Q n'est pas dégénérée car son rang est égal à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\text{sign}(Q) = (2, 1).$$

5) on détermine une base orthogonale pour Q .

$$\text{soit } \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = x'_1 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 - \frac{1}{2}x'_2 + \frac{1}{3}x'_3 \\ x_2 = x'_2 + \frac{5}{3}x'_3 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow X = P X'$, donc P est la matrice

de passage de la base canonique vers la base orthogonale pour Q , soit B' . D'où

$$B' = \left\{ (1, 0, 0), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) \right\}.$$

La matrice de Q dans la base B' est :

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}.$$

On vérifie la formule de changement de base $M' = P \cdot M \cdot P^t$.

Exercices

1) la matrice de q dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}.$$

2) on a $\det(A) = a(1+a^2)$.

3) q est non dégénérée si, et seulement si A est inversible, c'est-à-dire $\det(A) \neq 0$. Donc, si $a \neq 0$.

$$4) \quad q(x) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

$$= (x+y)^2 + a(y-z)^2 + (1+a^2)z^2.$$

pour $a=0$, $\text{rg}(q) = 2$ et $\text{sign}(q) = (2, 0)$.

pour $a < 0$, $\text{rg}(q) = 3$ et $\text{sign}(q) = (2, 1)$

pour $a > 0$, $\text{rg}(q) = 3$ et $\text{sign}(q) = (3, 0)$.

5) Dans tous les cas il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y = x' \\ y-z = y' \\ z = z' \end{cases}, \text{ ce système a pour solution}$$

$$\begin{cases} x = x' - y' - z' \\ y = y' + z' \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

ce qui donne pour base q -orthogonale :

$$\{ e_1' = (1, 0, 0), e_2' = (-1, 1, 0), e_3' = (-1, 1, 1) \}.$$

6) la matrice de q dans la base $\{ e_1', e_2', e_3' \}$ est

$$D = {}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (facultatif)

1) $Q_1(x)$ est un polynôme homogène de degré 2. C'est donc une forme quadratique sur E .

i) sa forme polaire φ_1 est définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x, y) = \frac{1}{2} [Q_1(x+y) - Q_1(x) - Q_1(y)].$$

On trouve ici que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$$\varphi_1(x, y) = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2.$$

Il est clair que $\varphi_1(x, x) = Q_1(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

ii) la matrice de Q_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à la matrice de φ_1 , on a :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii) Réduction de Q_1 :

$$Q_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3.$$

$$= - \left[x_1^2 - 2x_1(x_2 + x_3) \right] - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2 x_3$$

$$= - \left[(x_1 - (x_2 + x_3))^2 - (x_2 + x_3)^2 \right] - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2 x_3$$

$$= - (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2 x_3$$

$$= - (x_1 - x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2 x_3 + x_3^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2 x_3$$

$$= - (x_1 - x_2 - x_3)^2 + 4x_2 x_3$$

$$= - (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2.$$

Ainsi, $\text{rang}(Q_1) = 3$ et $\text{sign}(Q_1) = (1, 2) = (P, P')$

Q_1 est non dégénérée car $\text{rang}(Q_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Q_1 n'est ni positive ni négative. car $P \neq 0$ et $P' \neq 0$.

IV) En déduire une base orthogonale pour Q_1 :

$$\text{On pose } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = x'_1 & L_1 \\ x_2 + x_3 = x'_2 & L_2 \\ x_2 - x_3 = x'_3 & L_3 \end{cases}$$

$$L_2 + L_3 \Rightarrow 2x_2 = x'_2 + x'_3 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{2}x'_2 + \frac{1}{2}x'_3}$$

$$L_2 \Rightarrow x_3 = x'_2 - \frac{1}{2}x'_2 - \frac{1}{2}x'_3 \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{1}{2}x'_2 - \frac{1}{2}x'_3}$$

$$L_1 \Rightarrow x_1 = x'_1 + \frac{1}{2}x'_2 + \frac{1}{2}x'_3 + \frac{1}{2}x'_2 - \frac{1}{2}x'_3 \Rightarrow \boxed{x_1 = x'_1 + x'_2}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}x'_2 + \frac{1}{2}x'_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}x'_2 - \frac{1}{2}x'_3 \end{cases}$$

$$X = P X' \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale pour Q_1 est: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On vérifie que $M'_1 = {}^t P M_1 P$ est une matrice diagonale, c'est la matrice de Q_1 dans la base

orthogonale $B' = \{(1, 0, 0), (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

2) $Q_2(x)$ est une forme quadratique, car c'est un polynôme homogène de degré 2.

i) sa forme polaire φ_2 est:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \varphi_2(x, y) = \frac{1}{2} [Q_2(x+y) - Q_2(x) - Q_2(y)].$$

On trouve,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y) = & x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 + 5 x_3 y_3 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 + 3 x_1 y_3 + 3 x_3 y_1 \\ & + x_2 y_3 + x_3 y_2. \end{aligned}$$

ii) la matrice de Q_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

iii) Réduction de Q_2 :

$$Q_2(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$= [x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3)] + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= [(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 + 3x_3)^2] + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 4x_2^2 - 12x_2x_3 + 9x_3^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - [x_2^2 + 10x_2x_3] - 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 + 5x_3)^2 + 25x_3^2 - 4x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 + 5x_3)^2 + 21x_3^2$$

$$\text{rang}(Q_2) = 3, \quad \text{sign}(Q_2) = (2, 1) = (P, P')$$

Q_2 est non dégénérée car $\text{rang}(Q_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Q_2 n'est ni positive ni négative, car $P \neq 0$ et $P' \neq 0$.

iv) En déduire une base orthogonale :

$$\text{Soit } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x'_1 & L_1 \\ x_2 + 5x_3 = x'_2 & L_2 \\ x_3 = x'_3 & L_3 \end{cases}$$

$$L_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = x'_2 - 5x'_3}$$

$$L_1 \Rightarrow x_1 = x'_1 - 2(x'_2 - 5x'_3) - 3x'_3$$

$$\boxed{x_1 = x'_1 - 2x'_2 + 7x'_3}$$

$$\text{On obtient } \begin{cases} x_1 = x'_1 - 2x'_2 + 7x'_3 \\ x_2 = x'_2 - 5x'_3 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

$$\text{La matrice de passage : } \underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La base orthogonale : } B' = \{ (1, 0, 0), (-2, 1, 0), (7, -5, 1) \}$$

$$\text{On vérifie que } M'_2 = {}^t P M_2 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

3) Q_3 est un polynôme homogène de degré 2, donc c'est une forme quadratique.

i) la forme polaire de Q_3 est:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^4, \quad \varphi_3(x, y) = \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_4 + x_4 y_1 \\ + \frac{1}{2} x_2 y_3 + \frac{1}{2} x_3 y_2 + 2x_2 y_4 + 2x_4 y_2 + x_3 y_4 + x_4 y_3.$$

ii) la matrice de Q_3 :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii) Réduction de Q_3 :

$$Q_3(x) = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_1 x_4 + x_2 x_3 + 4x_2 x_4 + 2x_3 x_4.$$

$$= x_1 x_2 + x_1 \underbrace{(2x_3 + 2x_4)}_A + x_2 \underbrace{(x_3 + 4x_4)}_C + 2x_3 x_4$$

$$= (x_1 + C)(x_2 + A) - A \cdot C + 2x_3 x_4.$$

$$= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - (x_3 + 4x_4)(2x_3 + 2x_4) + 2x_3 x_4$$

$$= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2x_3^2 - 2x_3 x_4 - 8x_3 x_4 - 8x_4^2 + 2x_3 x_4$$

$$= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2x_3^2 - 8x_3 x_4 - 8x_4^2.$$

$$= \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4} (x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)^2.$$

$\text{Rang}(Q_3) = 3$, $\text{sign}(Q_3) = (1, 2)$; Q_3 est dégénérée.

(12)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = x_1' \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = x_2' \\ x_3 + 2x_4 = x_3' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' - x_3' - 2x_4' \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2' - 2x_3' + 2x_4' \\ x_3 = x_3' - 2x_4' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$$

$$M_3' = P^t M_3 P$$

$$\text{avec } P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B' = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right), (-1, -2, 1, 0), (-2, 2, -2, 1) \right\}$$

$$B' = \left\{ (1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (-2, -4, 2, 0), (-4, 4, -4, 2) \right\}$$

$$M_3' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$