Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 19-20
Filières SMIA
Semestre 2

Correction de TD: Algèbre III

Youness Mazigh

Exercice 4 : Soient les vecteurs $u_1 = (1, -1, i)$, $u_2 = (-1, i, 1)$ et $u_3 = (i, 1, -1)$ de $\mathbb{C}^3$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Solution :

1. Montrons que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{C}^3$. Commençons par remarquer que

$$\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3,$$

donc il suffit de montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre (ou géneratrice). En effet, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{C}^3}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}(0,0,0) & = & \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \\ & = & \alpha(1,-1,i) + \beta(-1,i,1) + \gamma(i,1,-1) \\ & = & (\alpha, -\alpha, i\alpha) + (-\beta, i\beta, \beta) + (i\gamma, \gamma, -\gamma) \\ & = & (\alpha - \beta + i\gamma, -\alpha + i\beta + \gamma, i\alpha + \beta - \gamma).\end{array}$$

Ainsi, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha - \beta + i\gamma = 0 \\ -\alpha + i\beta + \gamma = 0 \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \alpha - \beta + i\gamma = 0 \\ -\alpha + i\beta + \gamma = 0 \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (i-1)\beta + (i+1)\gamma = 0 \\ (i-1)\alpha + (i+1)\beta = 0 \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma = -\dfrac{i-1}{i+1}\beta = -i\beta \\ \alpha = -\dfrac{i+1}{i-1}\beta = i\beta \\ i\alpha + \beta - \gamma = 0, \end{cases}$$

par suite

$$\begin{cases} i(i\beta) + \beta + i\beta = 0 \\ \gamma = -i\beta \\ \alpha = i\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

D'où la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

2. Calculons les coordonnées du vecteur $v = (1+i, 1-i, i)$ dans la base (u_1, u_2, u_3). Notons α_1, α_2 et α_3 les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans la base (u_1, u_2, u_3), alors

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ &= \alpha_1(1,-1,i) + \alpha_2(-1,i,1) + \alpha_3(i,1,-1) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3, -\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3, i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned}$$

D'où, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3 = 1+i \\ -\alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3 = 1-i \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (i-1)\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 = 2i \\ (i-1)\alpha_1 + (1+i)\alpha_2 = 1 \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -i\alpha_2 + \frac{2i}{i+1} = -i\alpha_2 - (1+i) \\ \alpha_1 = i\alpha_2 + \frac{1}{i-1} = i\alpha_2 - \frac{i+1}{2} \\ i\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i(i\alpha_2 - \frac{i+1}{2}) + \alpha_2 - (-i\alpha_2 - (1+i)) = i \\ \alpha_3 = -i\alpha_2 - (1+i) \\ \alpha_1 = i\alpha_2 - \frac{i+1}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{1+3i}{2} \\ \alpha_3 = -i\frac{1+3i}{2} - (1+i) = -\frac{3i+5}{2} \\ \alpha_1 = i\frac{1+3i}{2} - \frac{i+1}{2} = -2 \end{cases}$$

et donc les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3) sont -2, $\frac{1+3i}{2}$ et $-\frac{3i+5}{2}$. $\square$

<u>Exercice 5</u> :

1. Soit $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de polynômes échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$, c'est-à-dire vérifiant $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

<u>Solution</u> :

1. Montrons la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Commençons par remarquer que

$$\mathrm{Card}((P_0, P_1, \cdots, P_n)) = n+1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X],$$

donc il suffit de montrer que la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est libre. En effet, soient $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{K}_n[X]}.$$

Pour $i \geq 1$, posons

$$P_i(X) = a_i X^i + Q_i(X) \quad \text{où } a_i \neq 0,\ \deg(Q_i(X)) \leq i-1.$$

Alors

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = \alpha_n a_n X^n + U(X)$$

où $U(X) \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(U(X)) \leq n-1$, puisque pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $\deg(P_i) = i$. Donc $\alpha_n = 0$, puisque $\alpha_n a_n X^n + U(X) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0$ et $\deg(U(X)) \leq n-1$. Ainsi

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n_1} + \alpha_n P_n = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0,$$

et donc le même raisonnement montre que $\alpha_{n-1} = 0$. Ainsi de suite on montre que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Reste à montrer que $\alpha_0 = 0$. En effet, on a

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = \alpha_0 P_0 = 0,$$

car on a démontré que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Donc $\alpha_0 = 0$. D'où la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est libre. Par suite $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Déduisons que la famille $(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, pour tout $a \in \mathbb{K}$. En effet, la famille famille $(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$ est échelonnée, puisque $\deg((X-a)^i) = i$ pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$. Donc, d'après la question 1), la famille

$$(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Donnons les coordonnées de P dans la base $(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$. D'après la formule de Taylor, on a

$$P(x) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P^{(2)}(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

D'où les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\{1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\}$ sont $P(a), P'(a), \cdots$ et $\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$. □

Exercice 6 : Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, soit le sous-espace

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\}.$$

1. Donner une base et la dimension de F.
2. Soit $G = \text{Vect}\{(1, 1, -1)\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E?

Solution :

1. Donnons une base et la dimension de F. On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid x = y - z\} \\ &= \{(y - z, y, z) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y, y, 0) + (-z, 0, z) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \in E \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Donc $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une famille génératrice de F. Vérifions est ce que famille $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est libre ou non? Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) = 0_E$. Alors

$$(\alpha - \beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0),$$

et donc $\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. D'où la famille $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est libre. Par suite la famille $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de F. Par définition $\dim F = \text{Card}\{((1, 1, 0), (-1, 0, 1))\} = 2$.

2. Montrons que $E = F \oplus G$. Premièrement, remarquons que $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, -1))$ est une base $G = \text{Vect}((1, 1, -1))$, et d'après la question 1, la famille $\mathcal{B}_2 = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de F. D'où il suffit de montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont disjoints et que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E (Voir le cours Proposition 1.5.24 assertion 4). En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(1, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

Alors
$$(\alpha-\beta+\gamma,\alpha+\gamma,\beta-\gamma)=(0,0,0).$$
Donc
$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta-\gamma=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\beta=\gamma\\ \alpha=-\gamma\\ -\gamma-\gamma+\gamma=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \beta=0\\ \alpha=0\end{cases}$$
D'où la famille $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2=((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,-1))$ est libre, et comme
$$\mathrm{Card}\{(1,1,0),(-1,0,1),(1,1,-1)\}=3=\dim\mathbb{R}^3,$$
$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2=((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,-1))$ est une base de E.

3. L'ensemble $F\cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. En effet, puisque $(1,1,0)\in F$ et $(1,1,-1)\in G$, alors $(1,1,0)\in F\cup G$ et $(1,1,-1)\in F\cup G$. Cependant, la somme $(1,1,0)+(1,1,-1)=(2,2,-1)\notin F\cup G$. □

<u>Exercice 7</u> : Soient les sous-espaces
$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x-y+z=0\}\quad\text{et}\quad G=\{(6a+b,8a+2b,-a+3b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}\text{ de }\mathbb{R}^3.$$
Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels $F,G,F\cap G$ et $F+G$.

<u>Solution</u> :

(i) Déterminons une base et la dimension F. On a
$$\begin{aligned}F&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x-y+z=0\}\\&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y=2x+z\}\\&=\{(x,2x+z,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\}\\&=\{(x,2x,0)+(0,z,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\}\\&=\{x(1,2,0)+z(0,1,1)\mid x,z\in\mathbb{R}\}\\&=\mathrm{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1)\}\end{aligned}$$
Donc $F=\mathrm{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1)\}$. Vérifions à-t-on la famille $((1,2,0),(0,1,1))$ est libre ou non? Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$. Alors $(\alpha,2\alpha+\beta,\beta)=(0,0,0)$. Donc
$$\begin{cases}\alpha=0\\ 2\alpha+\beta=0\\ \beta=0\end{cases}$$
D'où la famille $((1,2,0),(0,1,1))$ est libre. Par suite $((1,2,0),(0,1,1))$ est une base de F. Par définition la dimension de F est le cardinal d'une base de F, et comme $((1,2,0),(0,1,1))$ est une base de F,
$$\dim F=\mathrm{Card}\{(1,2,0),(0,1,1)\}=2.$$

(ii) Déterminons une base et la dimension G. On a
$$\begin{aligned}G&=\{(6a+b,8a+2b,-a+3b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}\\&=\{(6a,8a,-a)+(b,2b,3b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}\\&=\{a(6,8,-1)+b(1,2,3)\mid a,b\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Donc $((6,8,-1),(1,2,3))$ est une famille génératrice de G. Vérifions est ce que la famille $((6,8,-1),(1,2,3))$ est libre ou liée? Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha(6,8,-1)+\beta(1,2,3)=(0,0,0)$. Alors

$$\begin{cases} 6\alpha+\beta=0 \\ 8\alpha+2\beta=0 \\ -\alpha+3\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta=-6\alpha \\ 8\alpha-12\alpha=0 \\ -\alpha-18\alpha=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

D'où la famille $((6,8,-1),(1,2,3))$ est libre. Par suite $((6,8,-1),(1,2,3))$ est une base de G, et donc $\dim G=2$.

(iii) Déterminons une base et la dimension $F\cap G$. Soit $(x,y,z)\in F\cap G$, alors il existe $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z)=\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1) \quad \text{et} \quad (x,y,z)=\gamma(6,8,-1)+\delta(1,2,3).$$

Ce qui implique

$$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)=\gamma(6,8,-1)+\delta(1,2,3).$$

Ainsi, nous obtenons le système

$$\begin{cases} \alpha-6\gamma-\delta=0 \\ 2\alpha+\beta-8\gamma-2\delta=0 \\ \beta+\gamma-3\delta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha-6\gamma-\delta=0 \\ \beta+4\gamma=0 \\ \beta+\gamma-3\delta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha-6\gamma-\delta=0 \\ \beta+4\gamma=0 \\ -3\gamma-3\delta=0. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \gamma=-\delta \\ \beta=-4\gamma=4\delta \\ \alpha=6\gamma+\delta=-6\delta+\delta=-5\delta \end{cases}$$

D'où

$$(x,y,z)=\gamma(6,8,-1)+\delta(1,2,3)=-\delta(6,8,-1)+\delta(1,2,3)=\delta(-5,-6,4),$$

et donc $F\cap G=\text{Vect}\{(-5,-6,4)\}$. Or $(-5,-6,4)\neq(0,0,0)$, $((-5,-6,4))$ est une base de $G\cap F$. Donc $\dim G\cap F=1$.

(iv) Déterminons une base et la dimension $F+G$. D'après (i) et (ii), on a $F=\text{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ et $G=\text{Vect}\{(6,8,-1),(1,2,3)\}$. Donc $F+G=\text{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1),(6,8,-1),(1,2,3)\}$. D'après (iii), pour $\delta=1$, on obtient

$$(1,2,3)=-5(1,2,0)+4(0,1,1)+(6,8,-1),$$

donc $(1,2,3)\in\text{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1),(6,8,-1)\}$. Ainsi $F+G=\text{Vect}\{(1,2,0),(0,1,1),(6,8,-1)\}$. Soit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(6,8,-1)=(0,0,0)$. Alors nous avons le système

$$\begin{cases} \alpha+6\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta+8\gamma=0 \\ \beta-\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta=\gamma \\ \alpha=-6\gamma \\ 2\alpha+\beta+8\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta=\gamma \\ \alpha=-6\gamma \\ -12\gamma+\gamma+8\gamma=-3\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

Donc la famille $((1,2,0),(0,1,1),(6,8,-1))$ est libre, par suite c'est une base $F+G$. Ainsi $\dim(F+G)=3$.

Exercice 8 : Soit l'ensemble $F=\{P\in\mathbb{C}_4[X] \mid P(0)=P'(0)=P'(1)=0\}$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et donner une base et la dimension de F.

2. Montrer que le sous-espace $G = \text{Vect}\{1, X, 1 + X + X^2\}$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[X]$.

Solution :

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$. En effet, $0_{\mathbb{C}_4[X]} \in F$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $P, Q \in F$, montrons que $\alpha P + \beta Q \in F$. En effet, on a

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)(0) &= \alpha P(0) + \beta Q(0)\\ &= 0 \quad (\text{car } P(0) = Q(0) = 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)'(0) &= \alpha P'(0) + \beta Q'(0)\\ &= 0 \quad (\text{car } P'(0) = Q'(0) = 0),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)'(1) &= \alpha P'(0) + \beta Q'(1)\\ &= 0, \quad (\text{car } P'(1) = Q'(1) = 0).\end{aligned}$$

Donc $\alpha P + \beta Q \in F$, par suite F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$.
Soit $P(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in F$. Alors

$$\begin{cases} 0 = P(0) = a_0 \\ 0 = P'(0) = a_1 \\ 0 = P'(1) = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}P(X) &= a_4X^4 + a_3X^3 + (-2a_4 - \frac{3}{2}a_3)X^2\\ &= a_4(X^4 - 2X^2) + a_3(X^3 - \frac{3}{2}X^2).\end{aligned}$$

D'où $F = \text{Vect}\{X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha(X^4 - 2X^2) + \beta(X^3 - \frac{3}{2}X^2) = 0$, alors

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\alpha - \frac{3}{2}\beta = 0 \end{cases}$$

Ainsi la famille $(X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2)$ est libre, par suite c'est une base de F, et donc $\dim F = 2$.

2. Montrons que $G = \text{Vect}\{1, X, 1+X+X^2\}$ est un supplémentaire de $F = \text{Vect}\{X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\}$ dans $\mathbb{C}_4[X]$. Posons $\mathcal{B}_1 = (X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2)$ et $\mathcal{B}_2 = (1, X, 1 + X + X^2)$. Comme $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont disjoints, il suffit de montrer que $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_1 = (1, X, 1+X+X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2, X^4-2X^2)$ est une base de $\mathbb{C}_4[X]$. Remarquons que $(1, X, 1+X+X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2, X^4-2X^2)$ est une famille de polynômes échelonnés dans $\mathbb{C}_4[X]$, donc d'après l'Exercice 5, $(1, X, 1+X+X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2, X^4-2X^2)$ est une base de $\mathbb{C}_4[X]$.

Exercice 9 : Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E tel que

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = -e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f(e_3) = -e_2 + e_3.$$

1. Calculer $f(x, y, z)$. Trouver une base et la dimension du noyau $\ker(f)$. Compléter cette base en une base de E.

2. Déterminer $\text{rang}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. En déduire $\text{rang}(f)$. Pouvait-on déduire $\text{rang}(f)$ de la question précédente?

3. Déduire une base et la dimension de l'image $\text{Im}(f)$. Compléter cette base en une base de E.

4. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Solution :

Rappelons qu'une application g entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E_1 et E_2 est dite linéaire, si pour tous $u, v \in E_1$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \quad \text{et} \quad g(\alpha u) = \alpha g(u).$$

En particulier si $E_1 = E_2$, l'application linéaire g est dite endomorphisme.

1. (i) Calculons $f(x, y, z)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$, et comme f est une application linéaire, on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_3 + ze_3) \\ &= f(xe_1) + f(ye_2) + f(ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(e_1 - e_2) + y(-e_1 + 2e_2 - e_3) + z(-e_2 + e_3) \\ &= (x - y)e_1 + (-x + 2y - z)e_2 + (-y + z)e_3. \end{aligned}$$

D'où $f(x, y, z) = (x - y, -x + 2y - z, -y + z)$.

(ii) Déterminons une base et la dimension du $\ker f$. Rappelons que

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et} (x - y, -x + 2y - z, -y + z) = (0, 0, 0) \\ &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } x = y = z. \end{aligned}$$

Donc $\ker f = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$, et comme $(1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$, la famille $((1, 1, 1))$ est une base de $\ker f$, et donc $\dim(\ker f) = 1$.

(iii) Rappelons le théorème de la base incomplète, " Soit F un espace vectoriel de dimension finie n. Si $\mathcal{L} = \{v_1, \cdots, v_p\}$ est une famille libre de F avec $p < n$, alors on peut la compléter en une base $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_n\}$ de F. "

Complétons la base $\{(1, 1, 1)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$. Posons $w = (1, 1, 1)$, comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe deux vecteurs u et v tels que (w, u, v) soit une base $\mathbb{R}^3$. Le choix des vecteurs u et v se fait de la manière suivante:

i. $u \notin \text{Vect}\{w\}$

ii. $v \notin \text{Vect}\{w, u\}$.

On peut faire appelle à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ pour le choix de u et v. On a $e_1 \notin \text{Vect}\{w = (1, 1, 1)\}$ et $e_2 \notin \text{Vect}\{e_1, w\}$. Ainsi la famille (w, e_1, e_2) est une base de E.

2. On rappelle que le rang d'une famille de vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ est donné par

$$\text{rang}(\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}) = \dim \text{Vect}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}.$$

(i) Déterminons le rang$(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \\ \\ f(e_2) &= -e_1 + 2e_2 - e_3 = (-1, 2, -1) \\ \\ f(e_3) &= -e_2 + e_3 = (0, -1, 1). \end{aligned}$$

Vérifions est ce que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre ou non? Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = (0, 0, 0).$$

Alors

$$\alpha(1, -1, 0) + \beta(-1, 2, -1) + \gamma(0, -1, 1) = (0, 0, 0),$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

D'où $\alpha = \beta = \gamma$, et donc la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est liée. Ainsi, pour $\alpha = 1$, on obtient $f(e_1) = -f(e_2) - f(e_3)$, et donc $\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(f(e_2), f(e_3))$. Vérifions à-t-on la famille $(f(e_2), f(e_3))$ est libre ou non? Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $\alpha f(e_2) + \beta f(e_3) = 0$, alors $(-\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (0, -\beta, \beta) = (0, 0, 0)$. On obtient le système

$$\begin{cases} -\alpha = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

et donc $\alpha = \beta = 0$. Ce qui montre que la famille $(f(e_2), f(e_3))$ est libre, par suite c'est une base de $\text{Vect}(f(e_2), f(e_3))$. Ainsi $\text{rang}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = 2$.

(ii) Déduisons le rang$f$. On a, par définition $\text{rang} f = \dim \text{Im} f$. Comme $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im} f$, l'assertion (i) montre que $\text{rang}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = 2$ et donc $\text{rang} f = 2$.

(iii) Déduisons le rang de f via la question 1. Du fait que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension finie, le théorème de rang (voir le cours Théorème 2.5.1) montre que

$$\dim \text{Im} f = \dim E - \dim \ker f = 3 - 1 = 2,$$

puisque $\dim \ker f = 1$.

3. Déduirons une base de $\text{Im} f$. D'après la question 2, la famille $(f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\text{Im} f$.

Complétons $(f(e_2), f(e_3))$ en une base de $\mathbb{R}^3$. On a la famille $(f(e_2), f(e_3))$ est libre, puisque c'est une base de $\mathrm{Im} f$, et comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, le théorème de la base incomplète assure l'existence d'un vecteur u tel que la famille $(f(e_2), f(e_3), u)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $(f(e_2), f(e_3))$ est libre et $e_1 \notin \mathrm{Vect}(f(e_2, f(e_3)))$, la famille $(e_1, f(e_1), f(e_2))$ est libre. Par suite $(e_1, f(e_1), f(e_2))$ c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Montrons que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$. On a d'après les questions précédentes

$$\ker f = \mathrm{Vect}((1,1,1)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,-1,1)).$$

Comme les familles $\mathcal{B}_1 = ((1,1,1))$ et $\mathcal{B}_2 = ((1,-1,0),(0,-1,1))$ sont disjoint, il suffit de montrer que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ tel que

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(0,-1,1) = (0,0,0).$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ \alpha + \alpha + \alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = ((1,1,1),(1,-1,0),(0,-1,1))$ est libre. Par suite c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$.

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $f(x,y) = (3x - iy, x + 2y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Solution : On rappel qu'un automorphisme sur un espace vectoriel E est un endomorphisme bijectif.
Montrons que f est une application linéaire. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $v = (x,y), u = (x', y') \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha(x,y) + \beta(x', y')) \\ &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (3(\alpha x + \beta x') - i(\alpha y + \beta y'), \alpha x + \beta x' + 2(\alpha y + \beta y')) \\ &= (3\alpha x - i\alpha y, \alpha x + 2\alpha y) + (3\beta x' - i\beta y', \beta x' + 2\beta y') \\ &= \alpha(3x - iy, x + 2y) + \beta(3x' - iy', x' + 2y') \\ &= \alpha f(x,y) + \beta f(x', y') \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

D'où l'application f est linéaire.
Montrons que f est bijective. Du fait que $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer que f est injective (voir le cours Corollaire 2.5.10), et comme f est linéaire, il suffit de montrer que $\ker f = \{0\}$. En effet

$$\begin{aligned} (x,y) \in \ker f &\Longleftrightarrow (x,y) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } f(x,y) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } (3x - iy, x + 2y) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } \begin{cases} 3x - iy = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } \begin{cases} x = -2y \\ -6y - iy = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

D'où $\ker f = \{0_{\mathbb{C}^2}\}$. On en déduit que f est un automorphisme.
Déterminons l'automorphisme réciproque de f. Soient $(a,b),(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $f(x,y) = (a,b)$;

$$(3x - iy, x + 2y) = (a,b).$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 3x - iy = a \\ x + 2y = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -iy - 6y = a - 3b \\ x + 2y = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a-3b}{i+6} \\ x = b + 2\dfrac{a-3b}{i+6} \end{cases}$$

D'où

$$f^{-1}(a,b) = \left(b + 2\frac{a-3b}{i+6}, -\frac{a-3b}{i+6}\right).$$

Exercice 11 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f^2 - 3f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.
2. Existe-t-il $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(v) = 2v$?

Solution :

1. (a) Montrons que f est un automorphisme. En effet, il suffit de montrer que f est injectif (ou surjectif)., puisque $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie. Soit $v \in \ker f$, on a

$$\begin{aligned} (f^2 - 3f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})(v) &= f^2(v) - 3f(v) + v \\ &= f(f(v)) - 3f(v) + v \\ &= v, \qquad (\text{car } f(v) = 0), \end{aligned}$$

et comme

$$f^2 - 3f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0$$

on obtient $v = 0$. Donc $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, d'où f est un endomorphisme injectif. Par suite f est un automorphisme.

(b) Déterminons f^{-1} en fonction de f et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. La relation

$$f^2 - 3f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0$$

entraîne

$$(-f + 3.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{et} \qquad f(-f + 3.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

D'où $f^{-1} = -f + 3.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

2. Supposons qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(v) = 2v$. Donc

$$\begin{aligned} f(v) = 2v &\Longleftrightarrow f^{-1}(f(v)) = f^{-}(2v) \\ &\Longleftrightarrow v = 2f^{-1}(v) \\ &\Longleftrightarrow v = 2(-f + 3.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})(v), \quad (\text{car } f^{-1} = -f + 3.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \\ &\Longleftrightarrow v = -2f(v) + 6.\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(v) \\ &\Longleftrightarrow v = -2(2v) + 6v \\ &\Longleftrightarrow v = -4v + 6v \\ &\Longleftrightarrow v = 0 \end{aligned}$$

D'où le seul vecteur qui satisfait $f(v) = 2v$ est le vecteur nul.

Exercice 12 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que:

1. $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

2. $\ker(f) = \ker(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.

Solution :

1. (a) Montrons que $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$. Soit $x \in \ker(f^k)$, donc $f^k(x) = 0$. Par suite
$$f^{k+1}(x) = f(f^k(0)) = f(0) = 0,$$
et donc $x \in \ker(f^{k+1})$. D'où $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.

   (b) Montrons que $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$, donc il existe $y \in E$ tel que $f^{k+1}(y) = x$. Par suite $x = f^k(f(y))$, et comme f est un endomorphisme de E, $f(y) \in E$, $x = f^k(f(y)) \in \mathrm{Im}(f^k)$. D'où $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.

2. Montrons l'équivalence $\ker(f) = \ker(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$. Supposons que $\ker(f) = \ker(f^2)$ et montrons que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$. En effet, soit $x \in E$, alors
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) &\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Im} f \quad \text{et} \quad x \in \ker(f) \\ &\Longleftrightarrow \exists y \in E, f(y) = x \quad \text{et} \quad f(x) = 0. \end{aligned}$$
D'où $f^2(y) = f(x) = 0$; $y \in \ker(f^2)$, et comme $\ker(f) = \ker(f^2)$, $y \in \ker f$. Par suite $x = f(y) = 0$. D'où $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.
Inversement, supposons que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(f) = \ker(f^2)$. Soit $x \in \ker(f^2)$, alors $f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$, et comme $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$, on obtient $f(x) = 0$. Par suite $x \in \ker(f)$. D'où $\ker(f^2) \subset \ker(f)$, et d'après la question 1 on a $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, d'où $\ker(f^2) = \ker(f)$.

Exercice 13 : Soient les sous-espaces supplémentaires F et G de $E = \mathbb{R}^3$ traités dans l'exercice 6. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G et $s \in \mathcal{L}(E)$ la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Calculer $p(x, y, z)$ et $s(x, y, z)$. Rappeler et vérifier la formule entre p et s.

Solution : Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Rappelons que tout vecteur $z \in F_1 \oplus F_2$ possède une unique décomposition sous la forme $z = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$, que la projection sur F_1 parallèlement à F_2 est l'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} p_1 : & F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & F_1 \oplus F_2 \\ & x_1 + x_2 & \longrightarrow & x_1. \end{array}$$
En particulier, si $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une base de F_1 et $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \cdots, v_q)$ une base de F_2 alors
$$p_1(u_i) = u_i \quad \text{et} \quad p_1(v_j) = 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, q\}.$$

1. Calculons $p(x, y, z)$. En effet, on a
$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= p(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xp(e_1) + yp(e_2) + zp(e_3), \end{aligned}$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc pour calculer $p(x, y, z)$ il suffit de calculer $p(e_1), p(e_2)$ et $p(e_3)$. D'après l'Exercice 6, $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de F et $\mathcal{B}_2 = ((1, 1, -1))$ est une base de G, et donc

$$\begin{cases} p(1,1,0) = (1,1,0) \\ p(-1,0,1) = (-1,0,1) \\ p(1,1,-1) = (0,0,0) \end{cases} \iff \begin{cases} p(e_1 + e_2) = e_1 + e_2 \\ p(-e_1 + e_3) = -e_1 + e_3 \\ p(e_1 + e_2 - e_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p(e_1) + p(e_2) = e_1 + e_2 \\ -p(e_1) + p(e_3) = -e_1 + e_3 \\ p(e_1) + p(e_2) - p(e_3) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p(e_1) + p(e_2) = e_1 + e_2 \\ p(e_2) = -e_1 + e_3 \\ p(e_1) + p(e_2) - p(e_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p(e_2) = -e_1 + e_3 \\ p(e_1) = e_1 + e_2 - p(e_2) \\ p(e_3) = p(e_1) + p(e_2) \end{cases} \iff \begin{cases} p(e_2) = -e_1 + e_3 \\ p(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3 \\ p(e_3) = e_1 + e_2 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= xp(e_1) + yp(e_2) + zp(e_3) \\ &= x(2e_1 + e_2 - e_3) + y(-e_1 + e_3) + z(e_1 + e_2) \\ &= (2x - y + z)e_1 + (x + z)e_2 + (-x + y)e_3. \end{aligned}$$

D'où

$$p(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, -x + y).$$

2. Calculons $s(x, y, z)$. On a s est la projection sur G parallèlement à F. Le même raisonnement au dessus donne

$$\begin{cases} s(1,1,0) = (0,0,0) \\ s(-1,0,1) = (0,0,0) \\ s(1,1,-1) = (1,1,-1) \end{cases} \iff \begin{cases} s(e_1) + s(e_2) = 0 \\ -s(e_1) + s(e_3) = 0 \\ s(e_1) + s(e_2) - s(e_3) = e_1 + e_2 - e_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s(e_1) + s(e_2) = 0 \\ s(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 \\ s(e_1) + s(e_2) - s(e_3) = e_1 + e_2 - e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} s(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 \\ s(e_1) = -s(e_2) \\ s(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3 + s(e_1) + s(e_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 \\ s(e_1) = -e_1 - e_2 + e_3 \\ s(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= xs(e_1) + ys(e_2) + zs(e_3) \\ &= x(-e_1 - e_2 + e_3) + y(e_1 + e_2 - e_3) + z(-e_1 - e_2 + e_3) \\ &= (-x + y - z)e_1 + (-x + y - z)e_2 + (x - y + z)e_3 \end{aligned}$$

D'où

$$s(x, y, z) = (-x + y - z, -x + y - z, x - y + z).$$

3. Rappelons et vérifions la formule entre p et s. On rappelle que $p + s = \mathrm{Id}$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} (p + s)(x, y, z) &= p(x, y, z) + s(x, y, z) \\ &= (2x - y + z, x + z, -x + y) + (-x + y - z, -x + y - z, x - y + z) \\ &= (x, y, z). \end{aligned}$$

Donc $p + s = \mathrm{Id}$.

Exercice 14 : Montrer qu'il existe une application linéaire unique f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1), \; f(1,1,0) = (1,0), \quad f(1,1,1) = (1,1)$$

Calculer $f(x,y,z)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution :

1. L'existence et l'unicité de f. Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (voir le cours Théorème 2.3.1).
   Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (0,0,0),$$
   alors
   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$
   Donc la famille $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est libre, et comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$, on en déduit que $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculons $f(x,y,z)$. Soient (e_1,e_2,e_3) et (e'_1,e'_2) les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. On a
   $$f(1,0,0) = (0,1), \; f(1,1,0) = (1,0), \quad f(1,1,1) = (1,1)$$
   Alors
   $$\begin{cases} f(e_1) = e'_2 \\ f(e_1 + e_2) = e'_1 \\ f(e_1 + e_2 + e_3) = e'_1 + e'_2 \end{cases} \iff \begin{cases} f(e_1) = e'_2 \\ f(e_1) + f(e_2) = e'_1 \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e'_1 + e'_2 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} f(e_1) = e'_2 \\ f(e_2) = e'_1 - f(e_1) = e'_1 - e'_2 \\ f(e_3) = e'_1 + e'_2 - (f(e_1) + f(e_2)) = e'_2 \end{cases}$$
   Donc
   $$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= xe'_2 + y(e'_1 - e'_2) + ze'_2 \\ &= ye'_1 + (x - y + z)e'_2 \end{aligned}$$
   D'où
   $$f(x,y,z) = (y, x - y + z).$$

3. Déterminons le noyau de f. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a
   $$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker f &\iff f(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff (y, x - y + z) = (0,0) \\ &\iff y = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z = 0 \\ &\iff y = 0 \quad \text{et} \quad z = -x \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0 \text{ et } \quad z=-x\}\\ &= \{(x,0,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,0,-1) \mid x\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

D'où

$$\ker f = \mathrm{Vect}((1,0,-1)).$$

4. Déterminons l'image de f. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Im} f &= \mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))\\ &= \mathrm{Vect}((0,1),(1,-1),(0,1))\\ &= \mathrm{Vect}((0,1),(1,-1)) = \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2.$$

Exercice 15 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(P)=(P(0),P'(1),P''(2))$. Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker f$. Est-il un isomorphisme? Si oui, donner son morphisme réciproque.

Solution :

1. Montrons que f est une application linéaire. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned}f(\alpha P+\beta Q) &= ((\alpha P+\beta Q)(0),(\alpha P+\beta Q)'(1),(\alpha P+\beta Q)''(2))\\ &= (\alpha P(0)+\beta Q(0),\alpha P'(1)+\beta Q'(1),\alpha P''(2)+\beta Q''(2))\\ &= (\alpha P(0),\alpha P'(1),\alpha P''(2))+(\beta Q(0),\beta Q'(1),\beta Q''(2))\\ &= \alpha(P(0),P'(1),P''(2))+\beta(Q(0),Q'(1),Q''(2))\\ &= \alpha f(P)+\beta f(Q)\end{aligned}$$

donc f est linéaire.

2. Déterminons le noyau de f. Soit $P(X)=a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\begin{aligned}P\in\ker f &\iff f(P)=(0,0,0)\\ &\iff (P(0),P'(1),P''(2))=(0,0,0)\\ &\iff \begin{cases}P(0)=0\\ P'(1)=0\\ P''(2)=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}a_0=0\\ a_1+2a_2=0\\ 2a_2=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}a_0=0\\ a_1=0\\ a_2=0\end{cases}\end{aligned}$$

D'où $\ker f=\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.

3. L'application f est un isomorphisme, car $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et f est injective, d'après la question précédente.

4. Calculons le morphisme réciproque de f. Ceci est équivalent à construire pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un polynôme dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui a pour image par f, (x, y, z). En effet, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $f(P) = (0, 0, 0)$. Donc

$$\begin{cases} P(0) = x \\ P'(1) = y \\ P''(2) = z \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \\ 2a_2 = z \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = x \\ a_1 = y - z \\ a_2 = \frac{z}{2} \end{cases}$$

   D'où
$$f^{-1}(x, y, z) = \frac{z}{2}X^2 + (y - z)X + x.$$