Table des matières

Chapitre I

Interpolation et approximation

1 Position du problème

Etant donné $n+1$ valeurs de $\mathbb{R}$, f_j pour$j = 0, ..., n$ aux noeuds $t_j, j = 0, ...n$ $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ Le principal objectif de l'interpolation est de chercher un polynôme P de degré $n \geq 0$, tel que

$$P(t_j) = f_j \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq n \tag{1.1}$$

Une manière simple de résoudre ce problème est d'écrire:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \tag{1.2}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des coefficients qui devront être déterminés (évidement, si les coefficients $a_j,\ 0 \leq j \leq n$ sont connus alors le polynôme P est aussi connu). Les $(n+1)$ relations (1.1) s'écrivent alors:

$$a_0+a_1t_j+a_2t_j^2+\cdots+a_nt_j^n = f_j \qquad 0 \leq j \leq n \quad (1.3)$$

Les relations (1.3) forment un système de $(n+1)$ équation à $(n+1)$ inconnues $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante:

$$T_{n+1} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} \qquad (1.4)$$

où T_{n+1} la $(n+1) \times (n+1)$ matrice définie par

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{f}$ sont les $(n+1)$ vecteurs colonnes

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Définition 1.1. *La matrice T_{n+1} est appelée matrice de Vandermonde associée aux points $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$.*

On peut montrer par récurrence que

$$\det T_{n+1} = \prod_{0 \leq i \prec j \leq n} (t_j - t_i)$$

Du fait que $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, le déterminant de T_{n+1} est non nul, alors T_{n+1} est inversible et par suite il existe un unique vecteur $\overrightarrow{a}$ vérifiant (1.4)

La résolution de notre système linéaire, par inversion de la matrice T_{n+1} ou par substitution dans les équations, lorsque n est grand, est une tâche très pénible. Dans la suite nous allons présenter une méthode plus astucieuse pour construire l'unique polynôme P qui vérifie

$$P(t_j) = f_j \quad \textit{pour} \quad 0 \leq j \leq n.$$

2 Base de Lagrange

On pose $P(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k(t) f_k$ où

$t \longrightarrow L_k(t)$ la fonction définie par:

- L_k est un polynôme de degré n,
- $L_k(t_j) = \delta_{kj}$,pour $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq k \leq n$
- δ_{kj} le symbole de Kronecker définie par $\delta_{kj} = 1$ si $k = j$ et 0 si $k \neq j$.

Nous avons donc:

$L_k(t) = C(t-t_0)(t-t_1)....(t-t_{k-1})(t-t_{k+1}).....(t-t_n)$
et comme $L_k(t_k) = 1$ donc

$$C = \frac{1}{\prod_{i \neq k}(t_k - t_i)}$$

et donc

$$\begin{aligned} L_k(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)....(t-t_{k-1})(t-t_{k+1}).....(t-t_n)}{(t_k-t_0)(t_k-t_1)....(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})...(t_k-t_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} \end{aligned}$$

Les polynômes $L_0, L_1, .., L_n$ sont linéairement indépendants: En effet si $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0, 1, ...n$ tel que $0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors nous obtenons:

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j(t_k) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \delta_{jk} = \alpha_k, \ \forall k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Notons $\mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel formé par tous les polynômes de degré inférieur où égal à n :

$$\mathbb{P}_n = \{P \text{ polynôme } \ / \ \deg P \leq n\},$$

qui est un espace vectoriel de dimension $(n+1)$ $(\dim \mathbb{P}_n = n+1)$ et que sa base canonique est donnée par $1, t, t^2, ..., t^n$. Le fait que $L_0, L_1, ..., L_n$ soient des polynômes de degré n linéairement indépendants montre que ces derniers forment aussi une base de $\mathbb{P}_n$, ainsi nous adopterons la définition suivante:

Définition 2.1. *Nous dirons que $L_0, L_1, ..., L_n$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$, associée aux points $t_0, t_1, ..., t_n$.*

Exemple 2.1. *Prenons $n = 2, t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1$*

La base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux points -1, 0 et 1 est formée par les polynômes L_0, L_1, L_2 définis par

$$L_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{1}{2}(t-1)t = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \tag{1.5}$$

$$L_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = -(t+1)(t-1) = 1-t^2 \tag{1.6}$$

$$L_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{1}{2}(t+1)t \tag{1.7}$$

2-1 Interpolation de Lagrange

Revenons au problème (1.1) qui consiste à chercher un polynôme p de degré n qui prend des valeurs données $f_0, f_1, ..., f_n$ en des points distincts donnés $t_0,\ t_1, ..., t_n$.
Soit $\{L_0, L_1, ..., L_n\}$ la base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$ associée aux points $t_0, t_1, ..., t_n$. Alors le polynôme p cherché est défini par:

$$p(t) = f_0 L_0(t) + ... + f_n L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(t) \quad (1.8)$$

Il est clair que $p \in \mathbb{P}_n$. D'autre part, si nous utilisons les propriétés des polynômes L_j, nous avons pour $k = 0, 1, 2, ..., n$:

$$p(t_k) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(t_k) = \sum_{j=0}^{n} f_j \delta_{jk} = f_k \quad (1.9)$$

qui est bien la relation (1.1).
Il est important de remarquer que nous avons construit explicitement une solution du problème (1.1) et ceci pour n'importe quelles valeurs $f_0, f_1, ..., f_n$ données. La solution (1.8) du problème (1.1) est unique car les $(L_j)_{j=0}^{n}$ forment une base de $\mathbb{P}_n$.

Exemple 2.2. *Trouver un polynôme de degré deux qui en*
$t_0 = -1$ *vaut* $f_0 = 8$, *en* $t_1 = 0$ *vaut* $f_1 = 3$ *et en* $t_2 = 1$ *vaut* $f_2 = 6$.
D'après ce qui précède, nous avons $p(t) = 8L_0(t) + 3L_1(t) + 6L_2(t)$ *où* L_0, L_1 *et* L_2 *sont donnés par* (1.5) – (1.7). *Nous obtenons donc*

$$\begin{aligned} p(t) &= 8(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t) + 3(1 - t^2) + 6(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t) \\ p(t) &= 4t^2 - t + 3 \end{aligned}$$

2-2 Interpolation d'une fonction continue par un polynôme

Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue donnée et soit $t_0, t_1, ..., t_n$, $(n+1)$ points distincts donnés.
Nous cherchons maintenant à interpoler f par un polynôme p de degré n aux points t_j, $0 \leq j \leq n$, c'est à dire nous cherchons un polynôme p de degré n tel que

$$p(t_j) = f(t_j), \;\; 0 \leq j \leq n \tag{1.10}$$

Si $f(t)$ est donnée, alors en posant
$f_j = f(t_j), 0 \leq j \leq n$ et en suivant ce qui est fait au paragraphe (1.3), nous obtenons

$p(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} f_j L_j(t)$ où les $L_j, 0 \leq j \leq n$, forment la base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$ associée aux points $t_0, t_1, ..., t_n$. La solution du problème (1.10) est donc définie par

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j) L_j(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

Définition 2.2. *On dira que le polynôme p définie par (1.11) est l'interpolant de f de degré n aux points $t_0, t_1, ..., t_n$.*

Exemple 2.3. *Soit f la fonction définie par $f(t) = e^t$. Trouver l'interpolant de f de degré 2 aux points -1, 0 et 1.*

Si nous reprenons la formule (1.11), nous avons $p(t) = e^{-1} L_0(t) + e^0 L_1(t) + e L_2(t)$ où, L_0, L_1, L_2 sont donnés par (1.5), (1.6) et (1.7). Ainsi donc nous obtenons

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{e}(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t) + (1 - t^2) + e(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t) \\ p(t) &= (\frac{1}{2e} - 1 + \frac{e}{2})t^2 + (\frac{e}{2} - \frac{1}{2e})t + 1 \end{aligned}$$

Un exemple d'interpolation en dimension 2

Connaissant la température T d'une plaque métalique aux noeuds $(x_i, y_j)_{i,j=0,\ldots n}$. Si on note T_{ij} la température au noeud (x_i, y_j), on fixe y_j et on définit

$L(x, y_j) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) T_{ij} = f_j$.

Le polynôme de Lagrange global est:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= \sum_{i=0}^{n} L_i(y) f_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} L_i(y) \sum_{j=0}^{n} L_j(x) T_{ij} \end{aligned}$$

3 Le polynôme d'interpolation de Newton

3-1 Différences divisées

Soit $y(x)$ une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit x_0 et x_1 deux éléments de D tel que:

$$x_0 < x_1 \quad \text{et} \quad y(x_0) = y_0 \quad , \; y(x_1) = y_1$$

La différence divisée première entre x_0 et x_1 est égale à:

$$y(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Plus généralement si $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sont des points de D alors la différence divisée première entre x_i et $x_j = x_{i+1}$ est:

$$y(x_i, x_j) = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \qquad (j = i + 1)$$

Une différence seconde est définie par:

$$\begin{aligned} y(x_0, x_1, x_2) &= \frac{y(x_1, x_2) - y(x_{0,} x_1)}{x_2 - x_0} \\ y(x_2, x_3, x_4) &= \frac{y(x_3, x_4) - y(x_{2,} x_3)}{x_4 - x_2} \end{aligned}$$

$$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{y(x_{i+1}, x_{i+2}) - y(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

$$y(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{y(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

est une différence d'ordre n.
Une table de différences est une représentation trés commode de celle-ci. Par exemple pour une suite

$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ on a la table diagonale suivante:

$$
\begin{array}{llllll}
x_k & y_k & & & & \\
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & y(x_0, x_1) & & & \\
x_1 & y_1 & & y(x_0, x_1, x_2) & & \\
 & & y(x_1, x_2) & & y(x_0, x_1, x_2, x_3) & \\
x_2 & y_2 & & y(x_1, x_2, x_3) & & y(x_0, x_1, x_2, x_3, \\
 & & y(x_2, x_3) & & y(x_1, x_2, x_3, x_4) & \\
x_3 & y_3 & & y(x_2, x_3, x_4) & & \\
 & & y(x_3, x_4) & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}
$$

Exemple 3.1. *Calculons les différences divisées relatives aux valeurs des y_k données par les tableaux:*

$$
\begin{array}{cc}
x_k & y_k \\
0 & 1 \\
1 & 1 \\
2 & 2 \\
4 & 5
\end{array}
\qquad \text{La solution est :} \qquad
\begin{array}{ccccc}
x_k & y_k & & & \\
0 & 1 & & & \\
 & & 0 & & \\
1 & 1 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 1 & & -\frac{1}{12} \\
2 & 2 & & \frac{1}{6} & \\
 & & \frac{3}{2} & & \\
4 & 5 & & &
\end{array}
$$

3-2 Polynôme d'interpolation de Newton:

Théorème 3.1. *: Soit y une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des points de D tels que: $y(x_k) = y_{k.}$. Alors le polynôme:*

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + (x - x_0)y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)y(x_0, x_1, x_2) \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)y(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &\quad + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})y(x_0, x_1 \ldots . x_n) \end{aligned}$$

est un polynôme d'interpolation c'est à dire: $P(x_k) = y_k \ \forall\ k = 0, \ldots, n$.

Preuve:
Il est facile de montrer que $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{P}_n$ (ensemble des polynômes de degré n) où $e_0 = 1, e_1 = (x - x_0), e_2 = (x - x_0)(x - x_1), \ldots, e_n = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$

Pour n= 1 (étant donné les deux points x_0, x_1) on a
$P(x) = y_0 + (x - x_0)\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ vérifiée.
Pour 3points (n = 2)l'idéee est de construire un polynôme de degré 2 qui ne change pas les valeurs y_0, y_1 et qui passe en plus par y_2 donc de la forme:

$$P(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\text{et} \quad P(x_2) = y_2$$

On obtient donc

$$a = \frac{y[x_0, x_1] - y[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = y[x_0, x_1, x_2]$$

(En effet $a(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = P(x_2) - y_0 - (x_2 - x_0)y[x_0, x_1]$
$= y_2 - y_1 + y_1 - y_0 - (x_2 - x_0)y[x_0, x_1]$
$= y_2 - y_1 + y[x_0, x_1](x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)y[x_0, x_1]$ donc
$= y_2 - y_1 + y[x_0, x_1](x_1 - x_2)$
$a(x_2 - x_0) = y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1]$ soit le résultat)
Dans le cas général nous supposons que:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 + (x - x_0)y[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)y[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2})y[x_0, x_1 \ldots . x_{n-1}] \end{aligned}$$

est le polynôme de Newton qui interpole les données $(x_i, y_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ et on construit P le polynôme de degré n qui passe par $(x_i, y_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ et par (x_n, y_n) , P est donc de la forme:

$$P(x) = P_1(x) + a(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$a \text{ est tel que } P(x_n) = y_n$$

L'idée d' Aitken-Neville est de considérer aussi le polynôme de degré n-1 P_2 qui passe par les points $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$

$$\begin{aligned} P_2(x) = y_1 + (x - x_1)y[x_1, x_2] + (x - x_1)(x - x_2)y[x_1, x_2, x_3] \\ + \cdots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})y[x_1, ..., x_n] \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$P(x) = \frac{1}{x_n - x_0}((x_n - x)P_1(x) + (x - x_0)P_2(x))$$

qui vérifie bien $P(x_i) = y_i$ pour $i = 0, ..., n$
En considérant le coefficient de a_n dans la dérnière équation on obtient:

$$a = \frac{-y[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] + y[x_1, x_2, ..., x_n]}{x_n - x_0} = y[x_0, x_1, ..., x_n]$$

4 Erreur d'interpolation

$$E(x) = f(x) - P_n(x)$$

Théorème 4.1. *Si la fonction f est $(n+1)$ fois continûment dérivable sur $[a, b]$,
$\{x_i/i = 0, 1, \cdots, n\} \subset [a, b]$, pour tout $x \in [a, b]$, il existe ζ_x contenu dans le plus petit fermé contenant $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ et x ($[\min(x, x_0), \max(x, x_n)]$)tel*

que

$$E(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi(x) f^{(n+1)}(\zeta_x\ )\ \text{\textit{où}}\ \pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Preuve:
On a $f(x_i) = P_n(x_i) \quad \forall\, i = 0, 1, \cdots, n$.
Soit $x \in [a, b]$, x fixé / $x \neq x_i\ \forall\, i = 0, 1, \cdots, n$. On définit la fonction

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)}\pi(t)$$

La fonction F est $(n+1)$ fois continûment dérivable (même régularité que f)
si $t = x_i$

$$F(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P_n(x_i)}_{=0} - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)}\underbrace{\pi(x_i)}_{=0} = 0,\ \forall\, i = 0, 1, \cdots$$

Si $t = x$ alors

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)}\pi(x) = 0.$$

La fonction F admet au moins $(n+2)$ racines réelles distinctes $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ et x. Supposons par exemple $x \in]x_1, x_2[$
Puisque la fonction F est continue sur $[x_0, x_1]$, dérivable sur $]x_0, x_1[$ et $F(x_0) = F(x_1) = 0$ alors le théorème de Rôlle nous fournit l'existence d'un point

$\lambda_0 \in]x_0, x_1[$ tel que $F'(\lambda_0) = 0$. de même $\lambda_1 \in]x_1, x[$ tel que $F'(\lambda_1) = 0. \cdots \lambda_2 \in]x, x_2[$ tel que $F'(\lambda_2) = 0$. $\cdots \lambda_n \in]x_{n-1}, x_n[$ tel que $F'(\lambda_n) = 0$.
Par suite, F' admet au moins $(n+1)$ racines réelles distinctes ainsi, on montre que $F^{(n+1)}$ admet au moins une racine notée ζ_x i.e $F^{(n+1)}(\zeta_x) = 0$. Nous avons

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)}(n+1)!$$

En remplaçant t par ζ_x dans la relation ci dessus nous concluons que

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

Corollaire 4.1. *Si f est $(n+1)$ fois continûment dérivable alors*

$$|E(x)| \leq \frac{|\pi(x)|}{(n+1)!} M_{n+1} \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

$$\textit{avec } M_{n+1} = \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(\zeta_x) \right|$$

5 Interpolation d'Hermite

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ telle que $f(x_i)$ et $f'(x_i)$ sont connues $\forall i = 0, n$, on utilise l'interpolation d'Hermite qui consiste à trouver un polynôme P(x) tel que $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$

On pose $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \phi_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) f'(x_i)$ où

$\Phi_j(x)$; $\psi_j(x)$ $j = 0, ...n$ sont les polynômes d'Hermite qui ont la proporiété suivante :

$P(x_i) = \Phi_i(x_i)$ et $P'(x_i) = \psi_i(x_i)$

$$\begin{array}{ll} 1)\Phi_j(x_i) = \delta_{ij} & 3)\Phi'_j(x_i) = 0 \\ 2)\psi_j(x_i) = 0 & 4)\psi'_j(x_i) = \delta_{ij} \end{array}$$

pour $i, j = 0, ..., n$

On montre que ces polynômes constituent une base de l'espace P_{2n+1} et sont donnés par:

$$\begin{aligned} \phi_j(x) &= [1 - 2(x - x_j)L'_j(x_j)]L_j^2(x) \\ \psi_j(x) &= (x - x_j)L_j^2(x) \end{aligned}$$

Pour $i, j = 0, \cdots, n$ où L_j est le polynôme de lagrange de degré n aux points x_j : $L_j(x_i) = \delta_{ij}$.

5-1 Erreur d'interpolation

$E(x) = f(x) - P(x)$

Théorème 5.1. *Si la fonction* f *est* $(2n + 2)$ *fois continûment dérivable sur* $[a, b]$ *,*
$\{x_i / i = 0, 1, \cdots, n\} \subset [a, b]$*, pour tout* $x \in [a, b]$*, il*

existe λ_x *contenu dans le plus petit fermé contenant* $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ *tel que*

$$E(x) = \frac{1}{(2n+2)!}(\pi(x))^2 f^{(2n+2)}(\lambda_x) \text{ où } \pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Preuve:
On a $f(x_i) = P(x_i) \quad \forall\, i = 0, 1, \cdots, n$.
Soit $x \in [a, b]$, x fixé / $x \neq x_i \; \forall\, i = 0, 1, \cdots, n$. On définit la fonction

$$F(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{\pi(x)^2}(\pi(t))^2$$

La fonction F est $(2n+2)$ fois continûment dérivable (même régularité que f)
si $t = x_i$

$$F(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P(x_i)}_{=0} - \frac{f(x) - P(x)}{\pi(x)^2}\underbrace{\pi(x_i)^2}_{=0} = 0, \; \forall\, i = 0, 1, \cdots$$

Si $t = x$ alors

$$F(x) = f(x) - P(x) - \frac{f(x) - P(x)}{\pi(x)^2}\pi(x)^2 = 0.$$

La fonction F admet au moins $(n+2)$ racines réelles distinctes
alors d après le théorème de Rôlle F' admet au moins $(n+1)$ racines réelles distinctes dans les ouverts

$]x_i, x_{i+1}[$ ou $]x, x_i[$ ou $]x_i, x[$ en plus

$$F'(x_i) = \underbrace{f'(x_i) - P'(x_i)}_{=0} - \frac{f(x) - P(x)}{\pi(x)^2} \underbrace{\pi(t)^{2'}}_{\substack{t=x_i \\ =0}} = 0, \ \forall\, i = 0, 1, \cdots$$

c.à.d. F' admet $2n+2$ racines distinctes d'après Rolle F'' admet $2n+1$ racines et ainsi de suite on montre que $F^{(2n+2)}$ admet au moins une racine notée λ_x i.e $F^{(2n+2)}(\lambda_x) = 0$. Nous avons

$$F^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - 0 - \frac{f(x) - P(x)}{\pi(x)^2}(2n+2)!$$

En remplaçant t par λ_x dans la relation ci dessus nous concluons que

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{(2n+2)!}\pi^2(x) f^{(2n+2)}(\lambda_x)$$

On peut déduire de ce résultat que le polynôme d'Hermite donné ci dessus est unique.

Sinon soit P_1 et P_2 deux polynômes de degré $2n+1$ vérifiant $P_1(x_i) = f(x_i)$, $P_1'(x_i) = f'(x_i)$ de même pour P_2 $P_2(x_i) = f(x_i)$ et $P_2'(x_i) = f'(x_i)$ et donc $P_1(x_i) = P_2(x_i)$ et $P_1'(x_i) = P_2'(x_i)$ ainsi P_1 est un polynôme d 'interpolation d 'Hermite associé à P_2 et d 'après le théorème précédent pour tout $x \in [a, b]$ il existe $\lambda_x \in]a, b[$ tel que

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{(2n+2)!}\pi^2(x)P_2^{(2n+2)}(\lambda_x) = 0$$

D'où l'unicité du polynôme d 'Hermite.

6 Splines cubiques

Soient $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des points qui divisent l'intervalle $I = [a, b]$ dans une réunion d'intervalles $I_j = [x_j, x_{j+1}]$.

Définition 6.1. *On appelle spline cubique interpolant f une fonction s_3 qui satisfait*

1. $s_{3/I_j} \in \mathbb{P}_3$ *pour tout* $j = 0, \ldots, n-1$, $\mathbb{P}_3$ *étant l'ensemble des polynômes de degré 3.*
2. $s_3(x_j) = f(x_j)$ *pour* $j = 0, \ldots, n$.
3. $s_3 \in C^2([a, b])$.

Cela revient à vérifier les conditions suivantes (on indique par $s_3(x_j^-)$ la limite à gauche de s_3 pour x_j

et par $s_3(x_j^+)$ la limite à droite):

$$\begin{array}{lll}
s_3(x_j^-) & = f(x_j) & \textit{pour tout } 1 \leq j \leq n-1 \\
s_3(x_j^+) & = f(x_j) & \textit{pour tout } 1 \leq j \leq n-1 \\
s_3(x_0) & = f(x_0) & \\
s_3(x_n) & = f(x_n) & \\
s_3'(x_j^-) & = s_3'(x_j^+) & \textit{pour tout } 1 \leq j \leq n-1 \\
s_3''(x_j^-) & = s_3''(x_j^+) & \textit{pour tout } 1 \leq j \leq n-1
\end{array}$$

On a $4n-2$ conditions et $4n$ inconnues (les 4 coefficients des polynômes s_{3/I_j} sur chaque I_j) on rajoute alors 2 conditions supplémentaires à vérifier:

$$s_3''(x_0^+) = 0 \quad \text{et} \quad s_3''(x_n^-) = 0$$

Avec ces conditions la spline est complétement déterminée et s'appelle spline naturelle.

7 Approximation: Approximation par la méthode des moindres carrées

7-1 Introduction

Un des problèmes les plus fréquents qui se posent à un expérimentateur est de trouver une formule analytique pour décrire une fonction dont il a mesuré en un certains nombres d'abscisses des valeurs expérimentales $f_i = f(x_i)$ où f est inconnue. On peut songer à utiliser l'interpolation polynomiale mais en général les resultats sont peu satisfaisants. Le polynôme d'interpolation devra être de degré très élevé s'il ya beaucoup de points

7-2 Quelques résultats

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$ et K un sous espace vectoriel de V de dimension N. On s'interesse au problème de minimisation suivant : pour $f \in V$

$$(M) \left\{ \begin{array}{lll} \text{Trouver} & u \in K & \text{minimisant } \|u-f\|^2 \\ \text{c.à.d} & & \|u-f\|^2 \leq \|v-f\|^2 \ \ \forall v \in K \end{array} \right.$$

où $\|.\|$désigne une norme sur V ($\|v\| = \sqrt{< v, v >}$).

(exemple dans $\mathbb{R}^N$, $< x, y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$). On rappelle le résultat suivant:

Théorème 7.1. *Le problème* (M) *admet une unique solution* $u \in K$ *qui est caractérisée par:*

$$< f - u, v >= 0 \quad \forall v \in K$$

Donc chercher u dans K revient à chercher ses coefficients dans une base de K notons $(e_k)_{k=1,\ldots,N}$ cette base, et on pose $u = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i$, d'après le théorème ceci revient à résoudre le problème suivant:

$$\sum_{j=1}^{N} < e_j, e_i > a_j =< f, e_i > \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, N$$

et on se ramène à un système linéaire $AU = F$ où $A = (< e_i, e_j >_{i,j=1,\dots,n})$; $U = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t$ et $F = (< f, e_1 >, < f, e_2 >, \dots, < f, e_n >)^t$ donc pour conclure on a à montrer l'inversibilité de la matrice A.
Soit $X \in V$ tel que $AX = 0$ donc $< AX, X >= 0$ soit
$(\sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=1}^{N} < e_j, e_i > X_j)X_i) = 0$ où $(,)$ est le produit scalaire euclidien et donc

$$(\sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=1}^{N} < e_j, e_i > X_j)X_i) =< \sum_{j=1}^{N} X_j e_j, \sum_{i=1}^{N} X_i e_i >= \|X\|^2$$

Donc $X = 0$

7-3 Approximation continue

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$. On considère $V = \{u / \int_0^1 u^2 dx < +\infty\}$ On montre que V est un espace vectoriel, que $f \in V$ et que l'on peut

munir V du produit scalaire $< f; g >= \int_0^1 fgdx$.
Soit $K \subset V$, on considère le problème Trouver $u \in K$ tel que

$$\int_0^1 (u-f)^2 \leq \int_0^1 (v-f)^2 dx \quad \forall v \in K$$

Soit $K = \mathbb{P}_N$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à N et soit $e_i = x^{i-1}; i = 1; N+1$ la base canonique de $\mathbb{P}_N$. Le théorème précédent nous assure qu'il existe une unique solution $u = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ au problème de minimisation et que les a_i sont solution de $AU = F$ avec

- $F_i = \int_0^1 f x^{i-1} dx$ pour $i = 1, \ldots, N+1$.
- $A_{ij} = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \dfrac{1}{i+j-1}$ pour $i = 1, j \ldots, N+1$.

La matrice du problème est la matrice de Hilbert. C'est une matrice trés mal conditionnée, c'est à dire que le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre est trés grand, il est de l'ordre de $e^{\frac{7n}{2}}$. La conséquence est qu'une petite variation des données, par exemple le second membre, peut

induire uen variation importante du résultat. Nous comparons ci-après le calcul du polynôme approchant e^x sur [0; 1] au sens des moindres carrés lorsque les termes Fi sont calculés exactement et lorsque leur valeur numérique est obtenu en ne prenant que les 3 premiers chiffres significatifs. Nous remarquons qu ele polynôme obtenu n'a plus rien à voir avec celui sans perturbation.
On peut remplacer le produit scalaire par $< f; g >= \int_a^b fgwdx$ où w est une fonction intégrable, à valeurs positives, appelée fonction poids. Par exemple, si $[a; b] = [-1; 1]$ et si $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, nous pouvons chercher u non plus dans la base canonique mais dans la base des polynômes de Tchebytechev. Grâce à leur orthogonalité, dans cette base, la matrice devient diagonale, le système est donc trés facile à résoudre.

7-4 Approximation discrète

Cadre général

On se donne $(x_j)_1^{N+1}$, N +1 réels deux à deux distincts et f une application continue sur un intervale

I contenant tous les x_j, on considère le problème:

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{j=1}^{N+1}(f(x_j) - P(x_j))^2 \quad (3)$$

pour $P \in \mathbb{P}_M$ polynôme de degré M

Cette expression est le carré d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}^{N+1}$, ce problème rentre donc dans le cadre décrit plus haut. En cherchant P dans la base canonique, $P = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k$

Théorème 7.2. *Le problème de minimisation (3) admet une solution unique* $P = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k$ *caractérisée par:*

$$\sum_{k=0}^{M}(\sum_{j=1}^{N+1} x_j^k x_j^l)a_k = \sum_{j=1}^{N+1} f(x_j)x_j^l \quad l = 0, \ldots, M$$

Preuve: L'existence et l'unicité découlent de la présence d'un produit scalaire. La caractérisation de la solution dans la base canonique est aussi une conséquence du théorème. Nous avons

$$\sum_{j=1}^{N+1}(f(x_j) - \sum_{k=0}^{M} a_k x_j^k)x_j^l = 0 \quad \text{pour} \quad l = 0; \ldots, M$$

Cette dernière formule peut être interprétée comme une approximation de celle obtenue dans le cas continue. Supposons en effet que les x_i soient régulièrement espacés par h. Nous avons en effet, d'une part

$$\sum_{j=1}^{N+1}(f(x_j) - \sum_{k=0}^{M} a_k x_j^k) x_j^l h = 0 \quad \text{pour} \quad l = 0; \dots, M$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{M}(\sum_{j=1}^{N+1} x_j^k x_j^l h) a_k = \sum_{j=1}^{N+1} f(x_j) x_j^l h$$

D'autre part,

$$\int_{x_1}^{x_{N+1}} x^k x dx \simeq \sum_{j=1}^{N+1} x_j^k x_j^l h$$

et

$$\int_{x_1}^{x_{N+1}} f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^{N+1} f(x_j) x_j^l h$$

Enfin, il est important de remarquer qu'en général $M \neq N$. Lorsque $M = N, E(f) = 0$ quand p est le polynôme d'interpolation de f aux points x_j et c'est donc la solution du problème de minimisation. Montrons que le système obtenu est $V^T V U = V^T F$ où V est la matrice de Vandermonde. Les coefficients de V

sont $V_{i;j} = x_i^{j-1}; i; j = 1; \ldots ; N+1$ Les coefficients de $V^T V$ sont

$$(V^T V)_{i;j} = \sum_{j=1}^{N+1} x_k^{i-1} x_k^{j-1}$$

Le système obtenu est donc bien $V^T V U = V^T F$ et V étant inversible, il est équivalent à $VU = F$ dont la solution est le vecteur de composantes les coefficients du polynôme d'interpolation dans la base canonique.

7-5 Le principe de la méthode des moindres carrés. Données discrets

Considérons le problème de faire passer une droite $y = a + bx$ près de quatre points expérimentaux, quelques soient les coefficients a et b, la droite ne passera pas en général par les quatre points. On essaie donc de faire passer la droite le plus près possible de tous les points. Considérons les erreurs du commises

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= f_1 - (a + bx_1) \\
\varepsilon_2 &= f_2 - (a + bx_2) \\
\varepsilon_3 &= f_3 - (a + bx_3) \\
\varepsilon_4 &= f_4 - (a + bx_4)
\end{aligned}$$

Graphiquement, on peut chercher à minimiser la somme de ces errreurs en valeurs absolues en choisissant a et b de tellle sorte que:

$$\sum_{i=1}^{4} |\varepsilon_i| \text{ soit minimum}$$

La fonction valeur absolue n'étant pas continûment dérivable, on ne peut pas chercher son minimum par dérivation. On détermine plutôt les a et b qui minimisent la fonction

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{4} (f_i - a - bx_i)^2.$$

c'est ce qu'on appelle un ajustement de paramétres, ou lissage de courbe aux moindres carrés pour trouver le minimum, on annule les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{4} (f_i - a - bx_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{4} (f_i - a - bx_i)x_i = 0, \end{aligned}$$

on obtient ainsi, pour déterminer a et b, les équations dites normales ; ici cela donne un système linéaire

2×2 qu'il faut résoudre:

$$\begin{aligned} 4a + (\sum_{i=1}^{4} x_i)b &= \sum_{i=1}^{4} f_i \\ (\sum_{i=1}^{4} x_i)a + (\sum_{i=1}^{4} x_i^2)b &= \sum_{i=1}^{4} x_i f_i \end{aligned}$$

ainsi on voit que le seul point critique de la fonction S donné par la solution du système c'est un minimum.

7-6 Modèles linéaire généraux

L'idée fondamentale qui consiste à choisir une approximation polynômiale $P(x)$ pour une fonction donnée $y(x)$ de manière à minimiser les carrés des erreurs a été développée tout d'abord par Gauss. Quand les données sont discrètes, nous pouvons minimiser la somme:

$$S = \sum_{i=0}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i - \cdots - a_m x_i^m)^2$$

pour les données spécifiées $x_i,\ y_i$ et $m < N$. La condition $m < N$ rend improbable que le polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ coincide en tous les points $(N+1)$ données. (c'est le cas du polynôme d'interpolation: pour $(N+1)$ points, on a un unique polynôme d'interpolation, ça reste toujours valable pour des polynômes de degré superieur mais pour le même nombre de points, on perd seulement l'unicité). Aussi, il est probable que S pourra être rendu nul. L'idée de Gauss était de rendre S aussi petit que possible. Les techniques classiques d'analyse conduisent alors à des équations normales, qui permettent de déterminer les coefficients a_j. Ces équations sont:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \ \forall\, i = 0, \ldots, m$$

c.à.d

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \cdots + s_m a_m & = & t_0, \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \cdots + s_{m+1} a_m & = & t_1, \\ \vdots & = & \vdots \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \cdots + s_{2m} a_m & = & t_m \end{cases}$$

où

$$s_k = \sum_{i=0}^{N} x_i^k, \ t_k = \sum_{i=0}^{N} y_i x_i^k.$$

Ce système d'équations linéaires détermine les a_j de manière unique et les valeurs de a_j ainsi obtenues rendent les valeurs de S aussi minimun que possible. Dans le cas d'un polynôme linéaire $P(x) = ax + b$ les équations normales sont facilement resolues et donnent

$$a = \frac{s_0 t_{1-} s_1 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2} \text{ et } b = \frac{s_2 t_{0-} s_1 t_1}{s_0 s_2 - s_1^2}$$

Pour établir un traitement unifié des diverses méthodes d'approximation par les moindres carrés - la première d'entre elles qui vient d'être décrite - nous allons d'abord considérer un problème général de minimisation dans un espace vectoriel. La solution est facilement obtenue par un raisonnement algébrique basé sur l'idée de projection orthogonal. Naturellement le problème général reproduit notre $P(x)$ et nos équations normales. Tout cela sera réinterpreté de manière à résoudre les autres méthodes des moindres carrés à mesure que nous progresserons.
A l'exception des polynômes de degré très bas, le système d'équations normales qui vient d'être présenté n'est pas commode.
Cela signifie que bien qu'il définisse les coefficients a_j de manière unique, il se révèle souvent dans la pratique impossible de les extraire. C'est la raison de l'introduction des polynômes orthogonaux (ce qui revient à choisir une base orthogonale pour cet espace vectoriel abstait)

Dans le cas de données discrètes, ces polynômes $P_{m,N}(t)$ de degrés $m = 0, 1, 2, \cdots$ possédent la propriété

$$\sum_{i=0}^{N} P_{m,N}(t)P_{n,N}(t) = 0$$

C'est la propriété d'orthogonalité, on montrera ultérieurement que

$$P_{m,N}(t) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i C_{m+i}^i \frac{t^{(i)}}{N^{(i)}}$$

Avec $t^{(i)} = t(t-1)\dots(t-i+1)$
On considère le polynôme suivant:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_{k,N}(t)$$

polynôme des moindres carrées de degré m pour les données (x_t, y_t) avec $t = (x - x_0)/h$ et $h = x_{t+1} - x_t$. Les x_t sont équidistants $t = 0, 1, \dots, N$ et les a_k sont des coefficients nouveaux, on a

$$a_k = \frac{\sum\limits_{t=0}^{N} y_t P_{k,N}(t)}{\sum\limits_{t=0}^{N} P_{k,N}^2(t)}$$

Ces a_k minimisent la somme S et le minimum est:

$$S_{\min} = \sum_{t=0}^{N} y_t^2 - \sum_{k=0}^{m} \omega_k a_k^2$$

Avec $\omega_k = \sum\limits_{t=0}^{N} P_{k,N}^2(t)$

Exemple 7.1. *Etablir la formule d'une parabole des moindres carrés pour les cinq points* (x_i, y_i) *où* $i = k-2, k-1, k, k+1, k+2,$

on a $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ où $t = (x - x_k/h)$, la forme de l'équation de la parabole, les arguments x_i étant régulièrement espacés d'un pas h. Les cinq points ont alors les arguments $t = -2, -1, 0, 1, 2$. Dans le cas de cet arrangement symétrique, les équations normales se simplifient en:

$$\begin{aligned}
5a_0 + 10a_2 &= \sum_{t=-2}^{2} y_{k+t} \\
10a_1 &= \sum_{t=-2}^{2} t y_{k+t} \\
10a_0 + 34a_2 &= \sum_{t=-2}^{2} t^2 y_{k+t}
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_0 &= y_k - \frac{3}{35}\left(y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2}\right) \\ a_1 &= \frac{1}{10}\left(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}\right) \qquad \text{et} \\ a_2 &= \frac{1}{14}\left(2y_{k-2} - y_{k-1} - 2y_k - y_{k+1} + 2y_{k+2}\right) \end{aligned}$$

$y(x_k)$ représente la valeur exacte dont y_k est une approximation. Une nouvelle approximation de $y(x_k)$ est donnée à l'aide de la parabole des moindres carrés et s'écrit:

$$y(x_k) = P(x_k) = P(0) = a_0$$

Dans le cas où l'approximation de $y'(x_k)$ par le polynôme d'interpolation donne une grosse erreur , $y'(x_k)$ est approché par

$$\frac{d}{dx}P(x_k) = \frac{d}{dx}P(t) = \frac{d}{dt}P(t)\frac{dt}{x} = \frac{1}{h}a_1$$

$$y'(x_k) \approx \frac{1}{10h}\left(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}\right)$$

7-7 Données continues:

Polynôme de Legendre:

Le polyôme de Legendre de degré n est défini par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n \text{ avec } P_0(x) = 1$$

Le polynôme de Legendre vérifie les 4 propriétés suivantes:

$i)\ \forall\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, on a : $\int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x) dx = 0$

$ii)\ \forall\ m \neq n \quad \int\limits_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\ dx\ = 0$

$iii)$ N'importe quel polynôme de degré n peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire des polynômes de Legendre $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

$iv) \int\limits_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \dfrac{2}{2n+1}$

7-8 Approximation par le polynôme des moindres carrés:

Dans le cas de données continue $y(x)$, nous pouvons minimiser l'intégrale:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} [y(x) - a_0 P_0(x) - \cdots - a_m P_m(x)]^2\, dx$$

où les $P_i(x)$ sont des polynômes de Legendre.(Nous devons supposer $y(x)$ intégrable) cela signifie que nous avons choisi dès le départ de représenter notre polynôme des moindres carrés

$$P(x) = a_0 P_0(x) + \cdots + a_m P_m(x)$$

dont les coefficients sont

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} y(x) P_k(x) dx.$$

En effet; on cherche les coefficients a_k tels que I soit minimum, ici nous devons minimiser une intégrale par une somme de carrés et les données ne sont pas constituées par un ensemble discret des y_i mais par une fonction $y(x)$ de l'argument continu x. Comme dans le paragraphe précédent, nous allons passer des équations normales qui déterminent les a_k à un ensemble très simple. Et comme tout polynôme peut être exprimé par une combinaison de polynômes de Legendre, nous aurons effectivement résolu le problème du polynôme d'approximation des moindres carrés pour des données continues. En posant les dérivées habituelles égales à zéro, il vient:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_{-1}^{1} \left[y(x) - a_0P_0(x) - \ldots - a_mP_m(x)\right] P_k(x)dx = 0$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} \left[y(x) - a_kP_k(x)\right] P_k(x)dx = 0$$

chaque équation n'implique qu'un seul a_k, et

$$a_k = \frac{\int_{-1}^{1} y(x)P_k(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx} = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} y(x)P_k(x)dx.$$

Une généralisation du principe des moindres carrés implique la minimisation de l'intégrale:

$$I = \int_{a}^{b} w(x)\left[y(x) - a_0Q_0(x) - \cdots - a_mQ_m(x)\right]^2 dx,$$

où $w(x)$ est une fonction poids non négative. Les $Q_k(x)$ sont des polynômes orthogonaux au sens généralisé

$$\int_a^b w(x)Q_j(x)Q_k(x)dx = 0 \text{ pour } j \neq k,$$

les détails sont les mêmes que pour le cas $w(x) = 1$ déja mentionné, les coefficients a_k étant donnés par:

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)y(x)Q_k(x)dx}{\int_a^b w(x)Q_k^2(x)dx}$$

La valeur minimum de I peut s'exprimer:

$$I_{\min} = \int_a^b w(x)y(x)^2dx - \sum_{k=0}^{m} w_k a_k^2 \blacksquare$$