Chapitre 1:
POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES
Algèbre-PC-S2

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Meknès
Université Moulay Ismail

Année Universitaire 2023-2024

كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

Plan

Introduction

Les polynômes sont des objets mathématiques a propriétés extrêmement riches.
Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions et concepts de base sur les polynômes, notamment la division euclidienne, la notion des racines et la factorisation d'un polynôme et l'irréductibilité. On termine avec les fractions rationnelles et leurs décompositions en éléments simples.

Définition d'un polynôme

Définition

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.
L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

- Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme et X est appelée l'indéterminée.
- On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$; on le note $deg(P)$. Pour le degré du polynôme nul (polynôme dont tous les coefficients a_i sont nuls) on a par convention $deg(0) = -\infty$.

Exemples

- $A(X) = 4X^3 - 5X + \frac{3}{4}$ est un polynôme de degré 3.
- $B(X) = 6X^n + 1$ est un polynôme de degré n.
- $P(X) = X^3 - 5X^2 + 5$, est un polynôme de degré 3.
- $Q(X) = X^7 - 3X^6 + 8X^4$ est un polynôme de degré 7.

Opérations sur les polynômes

- **Égalité.** Soient

$$P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

et

$$Q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0,$$

deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \quad a_i = b_i$$

et on dit que P et Q sont égaux.

- **Addition.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$. On définit :

$$P+Q = (a_n+b_n)X^n+(a_{n-1}+b_{n-1})X^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)X+(a_0+b_0)$$

- **Multiplication.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$. On définit

$$P \times Q = c_rX^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_1X + c_0$$

$$\text{avec } r = n + m \text{ et } c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j \text{ pour } k \in \{0, \ldots, r\}.$$

- **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le i-ème coefficient est λa_i.

Exemple

Soient

- $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad$ et $\quad Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.
- $P + Q = aX^3 + (b+\alpha)X^2 + (c+\beta)X + (d+\gamma)$,
- $P \times Q = (a\alpha)X^5 + (a\beta + b\alpha)X^4 + (a\gamma + b\beta + c\alpha)X^3 + (b\gamma + c\beta + d\alpha)X^2 + (c\gamma + d\beta)X + d\gamma$.
- $P = Q$ si et seulement si $a = 0$, $b = \alpha$, $c = \beta$ et $d = \gamma$.

Proposition

Pour $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ alors

- $0 + P = P, \quad P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R)$;
- $1 \cdot P = P, \quad P \times Q = Q \times P, \quad (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$;
- $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

Proposition

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q)$
$\deg(P + Q) \leq \max(deg(P), deg(Q))$

On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid deg(P) \leq n\}$. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Définition

- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type $a_k X^k$) sont appelés monômes.
- Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle terme dominant le monôme $a_n X^n$. Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant de P.
- Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est $a_n = 1$.

Division Euclidienne

Définition

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$.

Proposition

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$. On dit que A et B sont associés.
2. Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.

Division Euclidienne

Théorème (Division euclidienne des polynômes)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :
$A = BQ + R \quad \text{et} \quad deg(R) < deg(B)$.

Q est appelé le quotient de la division de A par B et R est son reste.
Notez que la condition $deg(R) < deg(B)$ signifie que R peut être nul et dans ce cas $B|A$.

- Pour effectuer une division euclidienne de deux polynômes, on procède de la même manière que les entiers.
  Exemples :
- $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$. On trouve $Q = 2X^2 + X - 3$ et $R = -X + 2$. On a $A = BQ + R$.
- $X^4 - 3X^3 + X + 1$ divisé par $X^2 + 2$, on trouve un quotient égal à $X^2 - 3X - 2$ et un reste égal à $7X + 5$.

Définition

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $\widetilde{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. $\widetilde{P}(x)$ est appelée fonction polynomiale associée au polynôme P.

$$\widetilde{P} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \widetilde{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

(Par la suite, on note encore $P(x) \equiv \widetilde{P}(x)$)

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine (ou un zéro) de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition

$$P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) \text{ divise } P$$

Proof.

Lorsque l'on écrit la division euclidienne de P par $X - \alpha$ on obtient $P = Q \cdot (X - \alpha) + R$ où R est une constante car $deg(R) < deg(X - \alpha) = 1$. Donc $P(\alpha) = 0 \iff R(\alpha) = 0 \iff R = 0 \iff (X - \alpha)|P$. $\square$

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une racine de multiplicité k (ou d'ordre k) de P si $(X-\alpha)^k$ divise P alors que $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P. Lorsque $k=1$ on parle d'une racine simple, lorsque $k=2$ d'une racine double, etc.

Proposition

Il y a équivalence entre :

(i) α est une racine de multiplicité k de P.

(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P=(X-\alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.

(iii) $P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(k-1)}(\alpha)=0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Par analogie avec la dérivée d'une fonction, si $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ alors le polynôme $P'(X)=a_1+2a_2X+\cdots+na_nX^{n-1}$ est le polynôme dérivé de P.

Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème: (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Exemple

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors P admet 2 racines réelles distinctes $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors P admet 2 racines complexes distinctes $\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle double $\frac{-b}{2a}$.

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exemple

$P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$. Considéré comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, P n'a qu'une seule racine (qui est simple) $\alpha = \frac{2}{3}$ et il se décompose en $P(X) = 3(X - \frac{2}{3})(X^2 + 2)$. Si on considère maintenant P comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ alors $P(X) = 3(X - \frac{2}{3})(X - i\sqrt{2})(X + i\sqrt{2})$ et admet 3 racines simples.

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré ≥ 1, on dit que P est irréductible si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Remarque:

- Un polynôme irréductible P est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes ou P lui-même (à une constante multiplicative près).
- La notion de polynôme irréductible pour l'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ correspond à la notion de nombre premier pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.
- Dans le cas contraire, on dit que P est réductible; il existe alors des polynômes A, B de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$, avec $deg(A) \geq 1$ et $deg(B) \geq 1$.

- Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Par conséquent il y a une infinité de polynômes irréductibles.
- $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1) \in \mathbb{R}[X]$ est réductible.
- $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Théorème: (Théorème de factorisation)

Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes irréductibles distincts.
De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Il s'agit bien sûr de l'analogue de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Donc pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ la factorisation s'écrit:

$$P = \lambda(X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2} \cdots (X - \alpha_r)^{k_r},$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1, ..., k_r$ sont leurs ordres de multiplicités. On dit que P est scindé dans $\mathbb{C}$.

Proof.

Ce théorème résulte du théorème de d'Alembert-Gauss. □

Théorème

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors la factorisation s'écrit:

$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}Q_1^{\ell_1}\cdots Q_s^{\ell_s},$$

où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2 :

$$Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i,$$

avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Exemples

$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ alors que sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2(X-j)(X-j^2)$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Ecrire le polynôme $P(X) = X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$

- Sur $\mathbb{C}$. On peut d'abord décomposer $P(X) = (X^2 + i)(X^2 - i)$. Les racines de P sont donc les racines carrées complexes de i et $-i$. Ainsi P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = \left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right).$$

- Sur $\mathbb{R}$. Pour un polynôme à coefficients réels, si α est une racine alors $\bar{\alpha}$ aussi. Dans la décomposition ci-dessus on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées, cela doit conduire à un polynôme réel :

$$\begin{aligned} P(X) = & \left[\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right] \\ & \times \left[\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right] \\ = & \left[X^2 + \sqrt{2}X + 1\right]\left[X^2 - \sqrt{2}X + 1\right], \end{aligned}$$

qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Fractions rationnelles

Définition

Une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$F = \frac{P}{Q}$$

où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont deux polynômes et $Q \neq 0$.

Toute fraction rationnelle se décompose comme une somme de fractions rationnelles élémentaires que l'on appelle des éléments simples qui dépendent du corps $\mathbb{K}$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Théorème

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $Q = (X-\alpha_1)^{k_1} \cdots (X-\alpha_r)^{k_r}$. Alors il existe une et une seule écriture :

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \;=\; E \; & + \frac{a_{1,k_1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_{1,k_1-1}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{a_{1,1}}{(X-\alpha_1)} \\ & + \frac{a_{2,k_2}}{(X-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{a_{2,1}}{(X-\alpha_2)} \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Le polynôme E s'appelle la partie polynomiale (ou partie entière). Les termes $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$ sont les éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exemple

- Vérifier que $\frac{1}{X^2+1} = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i}$ avec $a = \frac{1}{2}i$, $b = -\frac{1}{2}i$.
- Vérifier que $\frac{X^4-8X^2+9X-7}{(X-2)^2(X+3)} = X + 1 + \frac{-1}{(X-2)^2} + \frac{2}{X-2} + \frac{-1}{X+3}$.

Comment se calcule cette décomposition ?

En général on commence par déterminer la partie polynomiale.

Tout d'abord si $deg(Q) > deg(P)$ alors $E(X) = 0$. Si $deg(P) \leq deg(Q)$ alors effectuons la division euclidienne de P par Q : $P = QE + R$ donc $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ où $deg(R) < deg(Q)$. La partie polynomiale est donc le quotient de cette division. Et on s'est ramené au cas d'une fraction $\frac{R}{Q}$ avec $deg(R) < deg(Q)$. Voyons en détails comment continuer sur un exemple.

Exemple

Décomposons la fraction $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2}$:

Première étape (partie polynomiale):

On calcule la division euclidienne de P par Q :
$P(X) = (X^2+1)Q(X) + 2X^2 - 5X + 9$. Donc la partie polynomiale est $E(X) = X^2 + 1$ et la fraction s'écrit $\frac{P(X)}{Q(X)} = X^2 + 1 + \frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$.

Notons que pour la fraction $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$ le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.

Deuxième étape (factorisation du dénominateur):

Q a pour racine évidente $+1$ (racine double) et -2 (racine simple) et se factorise donc ainsi $Q(X) = (X-1)^2(X+2)$.

Troisième étape (décomposition théorique en éléments simples):

Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe une unique décomposition : $\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$. Nous savons déjà que $E(X) = X^2 + 1$, il reste à trouver les nombres a, b, c.

Quatrième étape (détermination des coefficients): Détermination des constantes a, b, c.

Première méthode.

On réecrit la fraction $\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$ au même dénominateur et on l'identifie avec $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$:

$$\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2} = \frac{(b+c)X^2 + (a+b-2c)X + 2a - 2b + c}{(X-1)^2(X+2)}$$

qui doit être égale à

$$\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}.$$

On en déduit $b+c=2$, $a+b-2c=-5$ et $2a-2b+c=9$. Cela conduit à l'unique solution $a=2$, $b=-1$, $c=3$. Donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^5-2X^3+4X^2-8X+11}{X^3-3X+2} = X^2+1+\frac{2}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{3}{X+2}.$$

Cette méthode est souvent la plus longue.

Deuxième méthode

On pose $\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{P_1(X)}{Q(X)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$

Pour déterminer a on multiplie la fraction $\frac{P_1}{Q}$ par $(X-1)^2$ et on évalue en $x = 1$.

Tout d'abord en partant de la décomposition théorique on a :

$$F_1(X) = (X-1)^2(\frac{P_1}{Q}) = a + b(X-1) + c\frac{(X-1)^2}{X+2} \quad \text{donc} \quad F_1(1) = a$$

D'autre part

$$F_1(X) = (X-1)^2(\frac{P_1}{Q}) = (X-1)^2\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{2X^2-5X+9}{X+2}$$

donc $F_1(1) = 2$. On en déduit $a = 2$.

On répète le même processus pour déterminer c: on multiplie par $(X+2)$ et on évalue en -2. On calcule
$F_2(X) = (X+2)(\frac{P_1}{Q}) = \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2} = a\frac{X+2}{(X-1)^2} + b\frac{X+2}{X-1} + c$ de deux façons et lorsque l'on évalue à $x=-2$ on obtient d'une part $F_2(-2) = c$ et d'autre part $F_2(-2) = 3$. Ainsi $c = 3$.
Pour déterminer b, par exemple lorsque l'on évalue la décomposition théorique $\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$ en $x = 0$, on obtient :

$$\frac{P_1(0)}{Q(0)} = a - b + \frac{c}{2}$$

Donc $\frac{9}{2} = a - b + \frac{c}{2}$. Donc $b = a + \frac{c}{2} - \frac{9}{2} = -1$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Théorème

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\frac{P}{Q}$ s'écrit de manière unique comme somme :

- d'une partie polynomiale $E(X)$,
- d'éléments simples de type $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$,
- d'éléments simples de type $\frac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^i}$.

Où les $X - \alpha$ et $X^2 + \alpha X + \beta$ sont les facteurs irréductibles de $Q(X)$ et les exposants i sont inférieurs ou égaux à la puissance correspondante dans cette factorisation.

Exemple

Décomposition en éléments simples de $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2}$:
Comme $deg(P) < deg(Q)$ alors $E(X) = 0$. Le dénominateur est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$ car $X^2 + X + 1$ est irréductible. La décomposition théorique est donc :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{aX + b}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}.$$

Il faut ensuite mener au mieux les calculs pour déterminer les coefficients afin d'obtenir :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X - 1}{X^2 + X + 1}.$$