# Chapitre 2 : La récursivité

**Filière MIP – S2**

**Module : Informatique 2 : Algorithmique 2/Python**

**Pr. Badraddine AGHOUTANE**

b.aghoutane@umi.ac.ma

**A.U : 2023–2024**

# Plan

- Rappel
- **Les fonctions et les procédures en python.**
- La récursivité et son application dans des algorithmes.
- Les enregistrements et les fichiers en Python.
- La complexité des algorithmes et ses principaux types.
- Les preuves de correction et de terminaison d'un algorithme.

# Résumé

```
Fonction Nom_Fonction(var:type,var:type): type
  Variables internes (Locales)
Début
        Instructions
        ……..
        Retourner variable
Fin
```

```
Procédure Nom_Procédure (var:type, var:type)
  Variables internes (Locales)
Début
        Instructions
        ……..
        Instructions
Fin
```

```
Algorithme principale
        Variables : ……(Globales)
        Constantes: ……..
        Fonctions: ……
    Début
        variable ←Nom_Fonction(var,var)
        Ecrire(Nom_Fonction(var,var))

        Nom_Procédure(var,var)
        ……
    Fin
```

**Appel d'une Fonction**

**Appel d'une Procédure**

# Exercices d'application

Ecrire un **algorithme qui calcul le factoriel d'un nombre entier en utilisant une fonction** qui renvoie le **factoriel d'un nombre entier** :

```
Algorithme factoriel
  Variable x, f : Entier
 Fonction fact(x:entier):entier
    Variable resultat, i: entier
  Début
    resultat ← 1
    pour i de 1 à x faire
        resultat ← resultat * i
    finpour
    retourner resultat
  Fin
```

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

$0! \equiv 1$ (by definition)

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

```
Début
    Ecrire ("Entrez un nombre entier x")
    Lire(x)
    f ← fact(x)
    Ecrire ("Le factoriel de x ", x, " est: ", f)
 Fin
```

# Exercices d'application

Ecrire un **algorithme qui fait appel** à une fonction qui permet de renvoyer la **puissance d'un nombre entier** :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

```
Algorithme Puissance
  Variable x, n, pow : Entier
  Fonction Puissance (x,: Entier, n : Entier) : Entier
     Variable resultat, i : Entier
     Début
       Si n=0 alors
          retourner (1)
        Sinon
            result ← 1
            Pour i ← 1 à n Faire
                 result ← result * x
            Finpour
                 retourner Result
     Fin
```

```
Début
    Ecrire ("Entrez un nombre entier x")
    Lire(x)
    Ecrire ("Entrez un exposant n")
    Lire(n)
    pow ← Puissance(x,n)
    Ecrire ("La puissance =", pow)
 Fin
```

## Remarques :

La fonction qui calcul la **puissance** et celle qui renvoie le **factoriel** sont des **fonctions itératives** (*utilise des boucles*).

➔Pourquoi ne pas le faire de **manière récursive** ... plutôt que d'utiliser des boucles...?

## C'est quoi la récursivité?

La **récursivité** est un concept très puissant : décomposer un problème en un ou plusieurs sous-problèmes qui sont de **même nature**, mais qui s'appliquent à un nombre d'objets plus réduit.

- **$n! = n*(n-1)!$** pour **$n \geq 1$**
- **$X^n = X * X^{n-1}$** pour **$n \geq 1$**

➔ La **programmation récursive** sert à **remplacer les boucles.**

# Récursivité

**Définition :**

- Un sous-programme **A** peut appeler un autre sous-programme **B**.
- Lorsqu'un sous-programme appelle lui-même on parle d'**appel récursif**.
- **La récursivité** est la capacité d'un sous-programme (fonction ou procédure) à s'appeler lui-même.
- Elle permet de résoudre beaucoup de problèmes contenant des itérations complexes.
- Toute **méthode récursive** peut-être convertie en **méthode non-récursive**.
- Tout algorithme récursif devra contenir une condition (issue de secours) qui assure la fin du nombre d'appels.

## Exemples

- Dans le **domaine végétal**, le romanesco (*hybride broccolo/ choux-fleur*) est très récursif

- Dans le **domaine animal**, un coquillage de nautilus

- **L'effet droste** (*image en abyme*).

## Définition

- La **récursivité** permet de résoudre des problèmes complexes en les **décomposant en problèmes plus petits**
- Une **procédure (ou fonction)** est dite **récursive** lorsqu'elle fait appel à elle même.
- La programmation récursive sert à remplacer les boucles (while, for, etc). Il faut vérifier si le processus ne boucle pas indéfiniment.

- Une **Procédure (ou Fonction)** est dite récursive si son exécution peut provoquer un ou plusieurs appels (dits **récursif**) à :
    1. Récursivité Simple
    2. Récursivité Multiple
    3. Récursivité Mutuelle
    4. Récursivité Imbriquée
    5. Récursivité Terminale et Non-Terminale

# Exercices d'application

## Calculer une factorielle?

**1** Quel est le lien entre $5!$ et $4!$ ?

- $5! = 5 \times 4!$ ✓
- $5! = 5 \div 4!$
- $5! = 5 - 4!$
- $5! = 5 + 4!$

**2** Quel calcul correspond à $10!$ ?

- $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ✓
- $10! = 10^{9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}}$
- $10! = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
- $10! = 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$

## Récursivité simple

Une **récursivité simple** contient un ***seul appel récursif à la fonction F*** dans le corps de la **fonction récursive F.**

➔ Fonction qui s'invoque elle-même.

**Exemple1**: Calcul de la factorielle

- **n! = n(n-1)(n-2)…2.1** Si **n≥1**
- **n! = n(n-1)!** pour **n≥1**

Noter que : **0! = !1 =1**

**5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120**

5! = 5.4! ⟶ 4! = 4.3! ⟶ 3! = 3.2! ⟶ 2! = 2.1! ⟶ 1! = 1.0!

= 120 ⟵ = 24 ⟵ = 6 ⟵ = 2 ⟵ = 1

**N.B** : La **condition d'arrêt** (issue de secours) est **x=0** ou **x=1**

# Récursivité simple

**Exemple1**: Calcul de la factorielle

**n! = n(n-1)(n-2)…2.1** Si **n≥1**

Noter que : **0! = !1 =1**

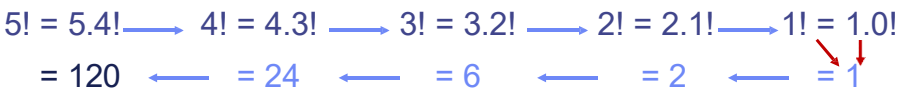
**n! = n(n-1)!** **pour n≥1**

```
Fonction fact(x:entier):entier
Variables  resultat, i: entier
Début
    resultat ← 1
    pour i de 1 à x faire
        resultat ← resultat * i
    finpour
    retourner resultat
Fin
```

**Fonction itérative (non recursive)**

```
Fonction fact(x:entier):entier
Debut
        si x=0 alors      // (ou si x=1)
            retourner (1)
        sinon
            retourner x*fact(x-1)
        Finsi
Fin
```

**Fonction recursive** qui s'invoque elle-même




**N.B**: La condition d'arrêt (issue de secours) est x=0 ou x=1

# Récursivité simple

## Comment ça marche ?

Trace pour x =3:

```
Fonction fact(x:entier):entier
Debut
   si x=0 alors
      retourner(1)
   sinon
      retourner x*fact(x-1)
   Finsi
Fin
```

Appel à **fact (3)** :

**3** ne vaut pas **0**, donc je calcule **3*fact(x-1)** qui est **3*fact(2)** :

**2** ne vaut pas **0**, donc je calcule **2*fact(x-1)** qui est **2*fact(1)** :

**1** ne vaut pas **0**, donc je continue vers **1*fact(0)**

**0** vaut **0**, donc **fact(0)** renvoie **1**

donc **fact(1)** renvoie **1*fact(0)= 1*1=1**

**fact(2)** renvoie **2 * fact(1) = 2 * 1 = 2**

**fact(3)** renvoie **3 * fact(2) = 3 * 2 = 6**

**Condition d'arrêt**

# Récursivité simple

## Comment ça marche?

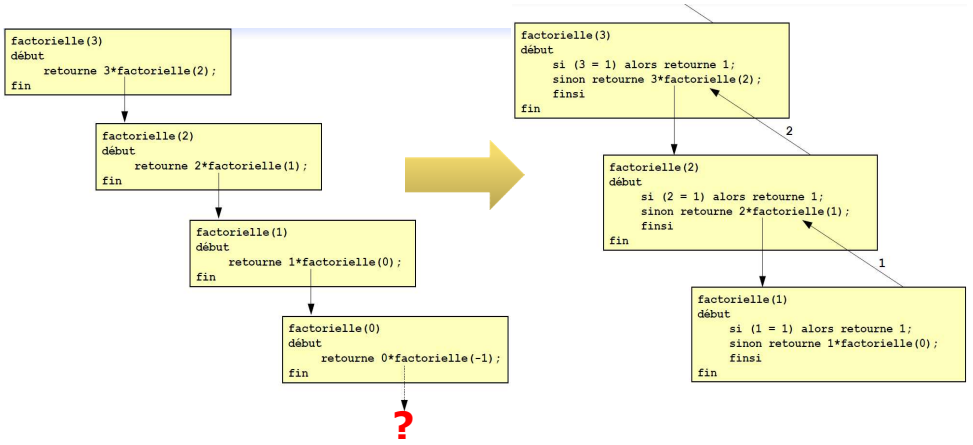
Trace pour n =4 :

```
Fonction fact(x:entier):entier
Debut
        si x=0 alors
            retourner(1)
        sinon
            retourner x*fact(x-1)
        Finsi
Fin
```

Appel à **fact(4)**
. 4*fact(3) = ?
. Appel à fact(3)
. . 3*fact(2) = ?
. . Appel à fact(2)
. . . 2*fact(1) = ?
. . . Appel à fact(1)
. . . . 1*fact(0) = ?
. . . . Appel à fact(0)
. . . . fact(0) retourne la valeur 1
. . . . 1*fact(0) = 1*1 = 1
. . . fact(1) retourne la valeur 1
. . . 2*fact(1) = 2*1 = 2
. . fact(2) retourne la valeur 2
. . 3*fact(2) = 3*2 = 6
. fact(3) retourne la valeur 6
. 4*fact(3) = 4*6 = 24
**fact(4)** retourne la valeur 24

# Récursivité simple

**Tout algorithme récursif** devra contenir une **condition** qui assure la **fin du nombre d'appels** ?.




➔ On doit toujours tester en premier la **condition d'arrêt**, et ensuite, si la condition n'est pas vérifiée, lancer un appel récursif.

## Calculer une factorielle à l'aide d'un programme python?

**Soit n un entier naturel. Quel programme python permet de calculer n!?**

```
n = int(input("Donner l'entier choisi.\n"))
factorielle = 1
for i in range(1,n+1) :
    factorielle = factorielle * i
print(n,"! = ", factorielle)
```

```
n = int(input("Donner l'entier choisi.\n"))
factorielle = 1*2*....*n
print(n,"! = ", factorielle)
```

```
n = int(input("Donner l'entier choisi.\n"))
factorielle = 1
for i in range(1,n) :
    factorielle = factorielle * i
print(n,"! = ", factorielle)
```

```
n = int(input("Donner l'entier choisi.\n"))
factorielle = 0
for i in range(1,n+1) :
    factorielle = factorielle + i
print(n,"! = ", factorielle)
```

## Calculer une factorielle à l'aide d'une fonction python?

```
def factorielle(n) :
    P = 1
    for i in range(n) :
        P = P * i
    return P
```

Fonction itérative (non récursive)

```
def factorielle(n) :
    return n*factorielle(n-1)
```

Fonction récursive

```
def factorielle(n) :
    L = list(range(1,n+1))
    return sum(L)
```

```
def factorielle(n) :
    if n == 0 :
        return 1
    else:
        return n*factorielle(n-1)
```

Fonction récursive

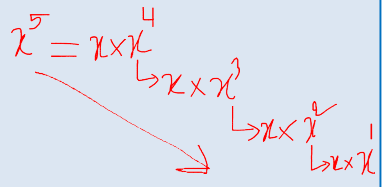
# Récursivité simple

## Exercices d'application

- Écrire une fonction récursive qui calcule la puissance d'un nombre entier

## Solution :

```
fonction puissance ( x:entier, n:entier ) : entier
Début
        Si n=0
                retourner   1
        Si n=1
                retourner   x
        Si n > 1
                retourner x* puissance(x, n-1)
Fin
```



# Récursivité simple

## Exercices d'application

- Traduire la **fonction récursive puissance()** qui calcule la puissance d'un nombre entier

## Solution :

```
def puissance(x:int,n:int):
    if n==0 :
        return 1
    elif n==1:
        return x
    else :
        return x*puissance(x,n-1)

x=int(input("Entrer un nombre entier : la base = "))
n=int(input("Entrer un exposant = "))
print("la puissance est: ", puissance(x,n))
```

```
Entrer un nombre entier : la base = 7
Entrer un exposant = 2
la puissance est:  49
```

## Définition

- La **récursivité** permet de résoudre des problèmes complexes en les **décomposant en problèmes plus petits**
- Une **procédure (ou fonction)** est dite **récursive** lorsqu'elle fait appel à elle même.
- La programmation récursive sert à remplacer les boucles (while, for, etc). Il faut vérifier si le processus ne boucle pas indéfiniment.

- Une **Procédure (ou Fonction)** est dite récursive si son exécution peut provoquer un ou plusieurs appels (dits **récursif**) à :
    1. **Récursivité Simple**
    2. **Récursivité Multiple**
    3. **Récursivité Mutuelle**
    4. **Récursivité Imbriquée**
    5. **Récursivité Terminale et Non-Terminale**

## Récursivité multiple

Une **récursivité** est **multiple** si il y a ***plusieurs appels récursifs à la fonction F dans le corps de la fonction récursive F***.

➔ **Fonction qui s'invoque elle-même plusieurs fois**

La ***suite de Fibonacci*** est définie par :

**Suite de Fibonacci**

$$F(0) = 0$$
$$F(1) = 1$$
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad , \text{ si } n > 1$$

1 2

Récursivité multiple

## Récursivité multiple

La suite de **Fibonacci** est définie par ( entier naturel) :

$$\begin{cases} F(0) = 0, F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2), n > 1 \end{cases}$$

L'algorithme de **Fibonacci** s'écrit :

```
Fonction fib( n : entier ) : entier
    Début
        Si ( n = 0 OU n = 1 ) Alors
            retourner ( n )
        Sinon
            retourner (fib ( n - 1 ) + fib ( n - 2 ))
        FinSi
    Fin
```

1 2

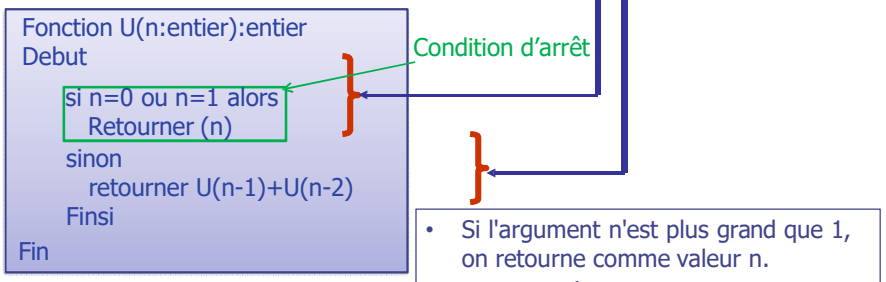
Récursivité multiple

# Récursivité multiple

- **Exemple 2: suite de fibonacci**

  Équations de récurrences :

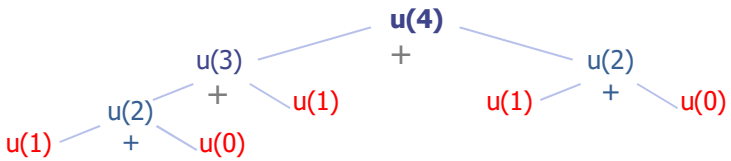
  - u(0) = 0, u(1) = 1 (Base)
  - u(n) = u(n-1)+u(n-2), n>1 (récurrence)




- Si l'argument n'est plus grand que 1, on retourne comme valeur n.
- Sinon, le résultat est U(n-1)+U(n-2)

# Récursivité multiple

- **Exemple 2 (suite) :** Voyons l'exécution : **u(4)**?




- La **condition d'arrêt :**
  **Si** (n=0 ou n=1) **alors retourner (n)**

```
Fonction U(n:entier): entier
Debut
    Si (n=0 ou n=1) alors
       retourner (n)
    Sinon
       retourner U(n-1)+U(n-2)
    Finsi
Fin
```

```
Fonction U(n:entier): entier
Debut
    Si (n>1) alors
          retourner U(n-1)+U(n-2)
     Sinon
          retourner (n)
    Finsi
Fin
```

## Récursivité multiple : programme Python

La suite de **Fibonacci** est définie par :

$$\begin{cases} F(0) = 0, F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2), n > 1 \end{cases}$$

Programme en langage **Python**

```
def fib(n:int):
    if(n==0 or n==1) :
        return n
    else:
        return fib(n-1)+fib(n-2)
```

**Exécution :**

```
Saisir un nombre entier n : 6
La valeur de la suite de Fibonacci est:  8
PS C:\Users\Badraddine AGHOUTANE>
```

# Récursivité Mutuelle

**Définition :**

Une **récursivité** est **mutuelle** ou croisée quand une **procédure P** (ou une fonction) appelle une **autre procédure Q** (ou une fonction) qui déclenche un appel récursif à la **procédure P**.

**Remarque :**

La situation est obligatoirement **symétrique**, puisque P déclenchera un appel de Q, qui déclenchera à son tour un appel de P.

**Exemple :**

La **parité d'un entier naturel** peut être définie par :

$$\text{pair}(n) = \begin{cases} vrai & \text{si } n = 0 \\ \text{impair}(n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{impair}(n) = \begin{cases} faux & \text{si } n = 0 \\ \text{pair}(n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

**La condition d'arrèt est n=0**

# Récursivité Mutuelle

**Exemple :** Les algorithmes correspondants s'écrivent :

```
Fonction pair( n : Entier ) : Booléen
  Début
      Si ( n = 0 ) Alors
        Retourner ( Vrai )
      Sinon
        Retourner ( impair ( n - 1 ) )
      FinSi
  Fin
```

```
Fonction impair ( n : Entier ) :
Booléen Début
      Si ( n = 0 ) Alors
        Retourner ( Faux )
      Sinon
        Retourner ( pair ( n - 1 ) )
      FinSi
Fin
```

Les fonctions **pair()** et **impair()** s'invoquent **mutuellement** : **pair(3)**

**pair(3)**->**impair(2)**->**pair(1)**->**impair(0)** Condition d'arrêt n=0

La **dernière** invocation renvoie **Faux** :

**impair(0)=Faux**->**pair(1)=Faux**->**impair(2)=Faux**->**pair(3)=Faux**

➔ Le nombre n'est pas **Pair** (Il est donc **Impair**)

## Récursivité Mutuelle

**Exemple :** Les algorithmes correspondants s'écrivent :

```
def pair(n : int):
    if(n==0) :
        return True
    else:
        return impair(n-1)
```

```
def impair(n:int):
    if(n==0):
        return False
    else:
        return pair(n-1)
```

```
n = int(input("Saisir un nombre entier n : "))
if (pair(n)==True) :
    print("La valeur" +str(n) + " est: pair")
else :
    print("La valeur" +str(n) + " est: impair")
```

Les fonctions **pair()** et **impair()** s'invoquent mutuellement (**Excécution**) :

```
Saisir un nombre entier n : 36
La valeur36 est: pair
```

```
Saisir un nombre entier n : 25
La valeur25 est: impair
```

**Exemple :**

La fonction **parité** qui calcule si un entier naturel est pair ou impair **sans utilisation de la récursivité** :

Programme Python

```
1  nombre = int(input("Entrez un nombre entier : "))
2  def parité(n):
3      if nombre % 2 == 0:
4          print(nombre, "est un nombre pair.")
5      else:
6          print(nombre, "est un nombre impair.")

   nombre = int(input("Entrez un nombre entier : "))
   parité (nombre)
```

## Récursivité imbriquée

**Définition :**

- Une **récursivité** est **imbriquée** si *une function F (ou procédure récursive P)* ***contient un appel imbriqué.***

**Exemple :**

- La fonction **d'Ackermann** (entiers naturels) est définie comme suit :

$$A(n,p) = \begin{cases} p+1 & \text{si } n = 0 \\ A(n-1,1) & \text{si } n > 0 \text{ et } p = 0 \\ A(n-1, A(n,p-1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

## Récursivité imbriquée

### Exemple :

L'algorithme de la **fonction d'Ackermann** correspondant s'écrit :

```
Fonction ackermann ( n , p : Entier ) : Entier
    Début
        Si ( n = 0 ) Alors
            Retourner (p + 1)
        Sinon
        Si ( p = 0 ) Alors
            Retourner ackermann ( n - 1 , 1)
        Sinon
            Retourner ackermann (n - 1 , ackermann (n , p - 1 ))
        FinSi
    Fin
```

$$A(n,p) = \begin{cases} p+1 & \text{si } n = 0 \\ A(n-1,1) & \text{si } n > 0 \text{ et } p = 0 \\ A(n-1, A(n,p-1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

# Récursivité imbriquée

## Programme en langage Python

Ecrire une function qui retourne la valeur calculée en utilisant la fonction d'Ackermann.

```
def ackermann(n: int, p:int):
    if(n==0) :
        return (p+1)
    elif (p==0):
        return (ackermann(n-1, 1))
    else:
        return (ackermann(n-1, ackermann(n, p-1)))
n = int(input("Saisir le premier paramètre de la fonction Ackermann(n) : "))
p = int(input("Saisir le deuxième paramètre de la fonction Ackermann(p) : "))
print("La valeur de la fonction ackermann est: ", ackermann(n,p))
```

L'execution de la fonction **Ackermann() :**

```
Saisir le premier paramètre de la fonction Ackermann(n) : 3
Saisir le deuxième paramètre de la fonction Ackermann(p) : 2
La valeur de la fonction ackermann_est:  29
```

# Récursivité terminale

## Définition

Une définition de **fonction F** est **récursive terminale** quand tout appel récursif est de la forme **return F(…)**;

La **valeur retournée** est directement la valeur obtenue par un appel récursif, sans qu'il n'y ait aucune opération sur cette valeur.

## somme(a,b)

```
Function somme (a, b: entier) : entier
    Debut
        Si (b=0) alors
            retourner a
        Sinon
            retourner somme (a+1, b-1)
        Finsi
    Fin
```

**somme(4,2)** = **somme(5,1)** = **somme(6,0)** = **6**

# Récursivité terminale

## Programme en langage Python

Ecrire en **langage Python** la fonction **somme** qui retourne la **somme de deux valeurs** sans aucune operation effectuée sur ces valeurs.

```
def somme(a : int, b:int):
    if(b==0) :
        return a
    else :
        return somme(a+1, b-1)

a = int(input("Saisir le premier paramètre : "))
b = int(input("Saisir le deuxième paramètre : "))
print("La somme est: ", somme(a,b))
```

La fonction **somme()** est une function **recursive terminale** :

```
Saisir le premier paramètre : 5
Saisir le deuxième paramètre : 8
La somme est:  13
```

# Récursivité non terminale

**Définition**

Si le résultat de l'**appel récursif** est utilisé pour réaliser un traitement (fait partie d'une expression).

**Exemple :** Ecrire une fonction **somme** qui retourne la **somme de deux valeurs** sans aucune operation effectuée sur ces valeurs.

**somme(a,b)**

```
Fonction  somme (a, b: Naturel): Naturel
    Debut
            si b=0 alors
                retourner a
            sinon
                retourner 1+somme(a,b-1)
            finsi
    Fin
```

**somme(4,2) = 1+somme(4,1) = 1+1+somme(4,0) = 1+1+4=6**

# Récursivité non terminale

## Définition

L'appel récursif n'est pas la dernière instruction et/ou il n'est pas isolée (fait partie d'une expression).

```
def somme(a: int, b:int):
    if b==0 :
        return a
    else:
        return 1+somme(a,b-1)
a = int(input("Saisir le premier paramètre : "))
b = int(input("Saisir le deuxième paramètre : "))
print("La somme est: ", somme(a,b))
```

La fonction **somme()** est une function **recursive non terminale** :

```
Saisir le premier paramètre : 4
Saisir le deuxième paramètre : 2
La somme est:  6
```

somme(5,7) = 1+somme(4,6) = 1+1+somme(4,5) = 1+somme(4,6) =… = 1+1+1+1+1+1+1+somme(4,0)=12

## La recette de récursivité

1. S'assurer que le problème peut se décomposer en un ou plusieurs **sous-problèmes de même nature.**
2. Identifier le **cas de base** qui est le plus petit problème qui ne se décompose pas en sous-problèmes
3. Résoudre(P) =
   - Si P est un cas de base,

     le résoudre directement
   - Sinon
     - décomposer P en sous-problèmes P1, P2, P3, ...
     - résoudre récursivement P1, P2,...
     - combiner les résultats pour obtenir la solution pour P

## Conclusion

- Les algortihmes récursifs permettent de résoudre des problèmes complexes.
- Il est sain de ramener un problème à des sous-problèmes.
- La récursivité permet de ramener un problème à un sous-problème qui est le problème lui-même avec des données plus simples.
- Les algorithmes récursifs sont le plus souvent plus gourmands en ressource que leurs équivalents itératifs.