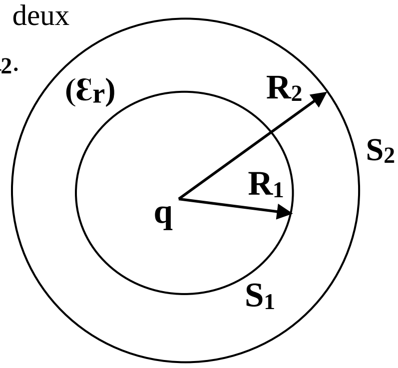
UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année Universitaire 2023/2024
SMP-S4
Module : Electricité 3

Corrigé de la Série N° 1 : Milieux diélectriques

Exercice 1 :

Milieu diélectrique parfait de permittivité diélectrique ε_r, limité par deux surfaces sphériques (S_1) et (S_2) de même centre **O** et rayons respectifs $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$. Le milieu est constitué par des molécules non polaires. Une charge électrique ponctuelle **q**, réelle et positive, est placée au centre **O**.



1)

♦ La charge réelle **q** crée en tout point $M(r,\theta,\varphi)$ un champ $\vec{E}_0(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r = E_0(r).\vec{e}_r$

♦ Sous l'action de ce champ, le MD fait apparaitre une polarisation de même forme que $\vec{E}_0$ (puisque le MD est parfait), soit $\vec{P}(M) = P(r).\vec{e}_r$.

♦ Une fois le milieu est polarisé, il devient actif et crée un champ dépolarisant de même forme, soit $\vec{E}_d(M) = E_d(r).\vec{e}_r$.

♦ En définitive, le champ total est : $\vec{E}_{tot}(M) = E_d(r).\vec{e}_r + \vec{E}_0(r).\vec{e}_r = E_{tot}(r).\vec{e}_r$

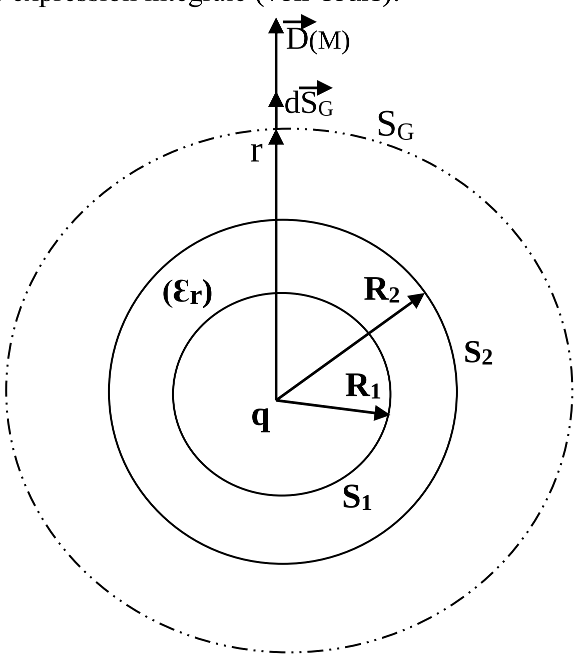
♦ de même l'induction électrique s'écrit : $\vec{D}(M) = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}_{tot}(M) = \varepsilon_0\varepsilon_r E_{tot}(r).\vec{e}_r = D(r).\vec{e}_r$

2) Expressions de l'induction électrique $\vec{D}(M)$ et du champ électrique total $\vec{E}_{tot}(M)$:

Le théorème de GAUSS généralisé est donné par l'expression intégrale (voir cours):

$$\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = Q_{tot}^{réelle}$$

En raison de la symétrie sphérique, la surface fermée $\mathbf{S_G}$ de GAUSS convenable est une sphère de centre O et de rayon **r**. Elle est représentée en pointillés sur la figure ci-dessous.



On calcule d'abord l'intégrale : $\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G$, sachant que :

Où : $\begin{cases} \vec{D}(M) = D(r).\vec{e}_r \\ d\vec{S}_G = dS_G.\vec{e}_r \end{cases}$

On a :

$$\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = \oiint_{(S_G)} D(r).\vec{e}_r.dS_G.\vec{e}_r = \oiint_{(S_G)} D(r).dS_G = D(r).\oiint_{(S_G)} .dS_G = D(r).4\pi.r^2$$

<u>**Remarque :**</u> L'induction $\vec{D}(M)$ ne dépend que de la coordonnée r du point **M**, donc elle est constante en tout point **M** de la sphère de Gauss de rayon **r** fixe.

En résumé on a :

$$D(r).4\pi.r^2 = Q_{tot}^{réelle}$$

Soit : $$\vec{D}(M) = \frac{Q_{tot}^{réelle}}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$$

Il faut donc exprimer la charge électrique totale $Q_{tot}^{réelle}$ pour chaque région de l'espace :

♦ Si $r > R_2$: $Q_{tot}^{réelle} = q$; $$\vec{D}(M) = \frac{q}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$$

On est dans le vide : $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow$ $$\vec{E}_{tot}(M) = \frac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\vec{e}_r$$

♦ Si $R_1 < r < R_2$: $Q_{tot}^{réelle} = q$; $$\vec{D}(M) = \frac{q}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$$

On est dans le MD : $\varepsilon_r \neq 1 \Rightarrow$ $$\vec{E}_{tot}(M) = \frac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r^2}.\vec{e}_r$$

♦ Si $r < R_1$: $$\vec{D}(M) = \frac{q}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$$

On est dans le vide : $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow$ $\vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\vec{e}_r$

3) Expression du champ électrique dépolarisant $\vec{E}_d(M)$ créé par le MD en tout point de l'espace :

A partir de l'expression du champ total donnée par :

$$\vec{E}_{tot}(M) = \vec{E}_d(M) + \vec{E}_0(M)$$

On a : $$\vec{E}_d(M) = \vec{E}_{tot}(M) - \vec{E}_0(M)$$

Où $\vec{E}_0(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r$ (champ créé par la charge ponctuelle placée au centre O).

♦ Si $r > R_2$: $$\vec{E}_d(M) = \vec{E}_{tot}(M) - \vec{E}_0(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r = \vec{0}$$

♦ Si $R_1 < r < R_2$: $$\vec{E}_d(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r^2}.\vec{e}_r - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\vec{e}_r$$

♦ Si $r < R_1$: $$\vec{E}_d(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r = \vec{0}$$

4) Expression du vecteur polarisation $\vec{P}(M)$ du milieu :

Le MD est parfait donc : $\vec{P}(M) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_{tot}(M)$

avec $\vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r^2}.\vec{e}_r$, d'où l'expression :

$$\vec{P}(M)=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r^2}.\vec{e}_r=\frac{(\varepsilon_r-1)q}{4\pi\varepsilon_r.r^2}.\vec{e}_r$$

5) a- Densités des charges fictives de polarisation :

♦ **Densité volumique :** $\rho_P(M)=-div\vec{P}(M)$

Remarque : On utilisera **l'**expression de la divergence en coordonnées sphériques en un point $M(r,\theta,\varphi)$:

$$div.\vec{P}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2P_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(P_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi}$$

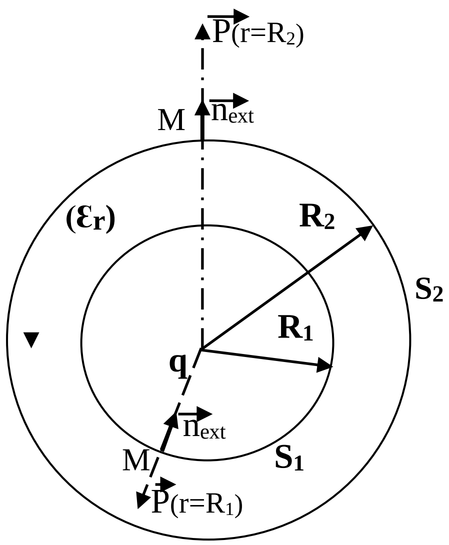
D'après l'expression de $\vec{P}(M)$ de la question **5** on a :

$$\vec{P}(M)=\underset{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)}{}\begin{cases}P_r=\dfrac{(\varepsilon_r-1)q}{4\pi\varepsilon_r.r^2}\\P_\theta=0\\P_\varphi=0\end{cases}$$

$$\rho_P(M)=-div\vec{P}(M)=-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2.P_r\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2.\frac{(\varepsilon_r-1)q}{4\pi\varepsilon_r.r^2}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{(\varepsilon_r-1)q}{4\pi\varepsilon_r}\right)=0$$

♦ **Densités surfaciques :** $\sigma_P(M\in S)=\vec{P}(M\in S).\vec{n}_{ext}(M\in S)$

Les orientations du vecteur unitaire $\vec{n}_{ext}$ normal à la surface externe S_2 et interne S_1 du MD, sont représentées sur la figure suivante :



▪ **Densités surfacique de la charge au niveau de la surface sphérique externe S_2 de rayon R_2 :**

$$\begin{cases}\vec{n}_{ext}(M\in S_2)=\vec{e}_r\\\vec{P}(M\in S_2)=\vec{P}(r=R_2)=\dfrac{(\varepsilon_r-1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2}.\vec{e}_r\end{cases}$$

$$\sigma_{P_2}(M \in S_2) = \frac{(\varepsilon_r - 1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2}.\vec{e}_r.\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2} > 0$$

▪ **Densités surfacique de la charge au niveau de la surface sphérique interne S_1 de rayon R_1 :**

$$\begin{cases} \vec{n}_{ext}(M \in S_1) = -\vec{e}_r \\ \vec{P}(M \in S_1) = \vec{P}(r = R_1) = \frac{(\varepsilon_r - 1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2}.\vec{e}_r \end{cases}$$

$$\sigma_{P_1}(M \in S_1) = \frac{(\varepsilon_r - 1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2}.\vec{e}_r.(-\vec{e}_r) = -\frac{(\varepsilon_r - 1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2} < 0$$

b- Expressions des charges fictives :

▪ **Charge fictive volumique :**

$$Q_V^P = \iiint_V \rho_P(M).dv = 0 \quad \text{car } \rho_P = 0$$

▪ **Charge fictive surfacique au niveau de la surface sphérique externe S_2 :**

$$Q_{P_2} = \iint_{S_2} \sigma_{P_2}.dS_2 = \sigma_{P_2}\iint_{S_2} dS_2 = \sigma_{P_2}.S_2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2}.4\pi R_2^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)q}{\varepsilon_r} > 0$$

▪ **Charge fictive surfacique au niveau de la surface sphérique interne S_1 :**

$$Q_{P_1} = \iint_{S1} \sigma_{P_1}.dS_1 = \sigma_{P_1}\iint_{S1} dS_1 = \sigma_{\sigma_{P_1}}.S_1 = -\frac{(\varepsilon_r - 1)q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2}.4\pi R_1^2 = -\frac{(\varepsilon_r - 1)q}{\varepsilon_r} < 0$$

6) Energie électrostatique W_e emmagasinée dans le volume du milieu diélectrique :

L'énergie électrostatique stockée dans un volume donné, s'écrit : $W_e = \iiint_V \omega_e.dv$

Où ω_e est la densité volumique d'énergie électrostatique, qui s'exprime, dans d'un MD parfait, par : $\omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_{tot}^2(M)$

<u>**Remarque :**</u> On utilisera l'expression de $\vec{E}_{tot}(M)$ à l'intérieur du MD $(R_1 < r < R_2)$ et l'élément de volume dv en coordonnées sphériques. Soit :

$$\begin{cases} \vec{E}_{tot}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r^2}.\vec{e}_r \\ dv = r^2 \sin\theta.dr.d.\theta.d\varphi \\ R_1 < r < R_2 \ ; \ 0 < \theta < \pi \ ; \ 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

L'énergie électrostatique est donc :

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \iiint_V E_{tot}^2(M).dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \left(\frac{q^2}{16\pi^2(\varepsilon_0\varepsilon_r)^2.}\right)\iiint_V \frac{dv}{r^4} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^2dr}{r^4}\int_0^{\pi}\sin\theta.d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}\int_0^{\pi}\sin\theta.d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R2}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

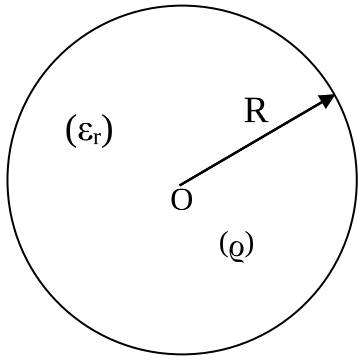
Soit : $$W_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

Exercice 2 :

Milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de permittivité diélectrique relative ε_r, de forme sphérique (centre **O**, rayon **R**), est polarisé sous l'action d'un champ électrique créé par une charge volumique réelle répartie dans le volume du milieu diélectrique avec une densité ρ (uniforme). On désignera par **Q** la charge réelle totale contenue dans le volume sphérique de rayon **R**.

1) Etude de la symétrie de la densité de charge électrique

♦ Tout plan diamétral est un plan de symétrie (PS) de la distribution de charge ρ. L'intersection des différents plans de symétrie passant par le point M est la droite passant par le centre O et le point M, qui est confondue avec le diamètre de la sphère, d'où :



$$\vec{E}_0(M) = E_0(M).\vec{e}_r$$

♦ Invariance de la distribution de charge ρ :

En tout point $M(r,\theta,\varphi)$ la densité de charge $\rho(M)$ est définie par :

$$\rho(M)\begin{cases} = \rho & \text{si } r \le R \\ = 0 & \text{si } r \ge R \end{cases}$$

Donc $\rho(M)$ ne dépend que de r : $\rho(M) = \rho(r)$. Elle est donc invariante par rapport à θ et φ. Il en est de même pour le champ $\vec{E}_0(M)$:

$$\vec{E}_0(M) = \vec{E}_0(r)$$

En conclusion on a : $$\vec{E}_0(M) = E_0(r).\vec{e}_r$$

Le champ $\vec{E}_0(M)$ est radial (dirigé suivant la direction du vecteur radial $\vec{e}_r$ de la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, et son module ne dépend que de la coordonnée r du point $M(r,\theta,\varphi)$.

Et comme le milieu diélectrique est parfait alors le champ électrique dépolarisant $\vec{E}_d(M)$ (champ créé par le MD) est également de la même forme :

$$\vec{E}_d(M) = E_d(r).\vec{e}_r$$

Par suite le champ électrique total est tel que : $\vec{E}_{tot}(M) = E_0(r).\vec{e}_r + E_d(r).\vec{e}_r = E_{tot}(r).\vec{e}_r$

Il en est de même pour l'induction électrique : $\vec{D}(M) = \varepsilon.\vec{E}_{tot}(M) = \varepsilon.E_{tot}(r).\vec{e}_r = D(r).\vec{e}_r$

<u>Remarque :</u> On peut aussi répondre à cette question en disant :

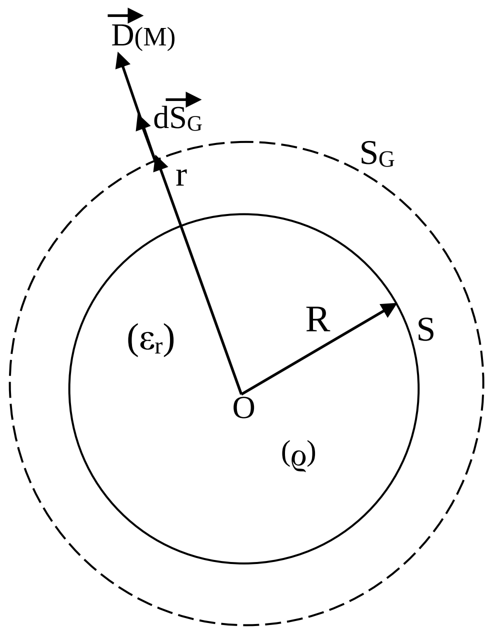
En raison de la symétrie sphérique de la distribution de charge : $\begin{cases} \vec{E}_{tot}(M) = E_{tot}(r).\vec{e}_r \\ \vec{D}(M) = D(r).\vec{e}_r \end{cases}$

2) a et b-Expressions des champs $\vec{D}(M)$ et $\vec{E}_{tot}$'M) :

Le théorème de GAUSS généralisé est donné par l'expression : $\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = Q_{tot}^{réelle}$

En raison de la symétrie sphérique, la surface fermée $\mathbf{S_G}$ de GAUSS convenable est une sphère de centre O et de rayon **r**. Elle est représentée en pointillés sur la figure ci-dessous.

Calculons d'abord l'intégrale $\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G$, Où : $\begin{cases}\vec{D}(M) = D(r).\vec{e}_r \\ d\vec{S}_G = dS_G.\vec{e}_r\end{cases}$



On a :

$$\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = \oiint_{(S_G)} D(r).\vec{e}_r.dS_G.\vec{e}_r$$

$$= \oiint_{(S_G)} D(r).dS_G = D(r).\oiint_{(S_G)} .dS_G = D(r).4\pi.r^2$$

<u>Remarque :</u> L'induction $\vec{D}(M)$ ne dépend que de la coordonnée **R** du point **M**, donc elle est constante en tout point **M** de la sphère de Gauss de rayon **r** fixe.

En résumé on a : $D(r).4\pi.r^2 = Q_{tot}^{réelle}$

Soit : $\vec{D}(M) = \dfrac{Q_{tot}^{réelle}}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$

Il faut donc exprimer la charge électrique totale $Q_{tot}^{réelle}$ pour chaque région de l'espace :

♦ Si $r > R$: $Q_{tot}^{réelle} = Q$; $\vec{D}(M) = \dfrac{Q}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$

On est dans le vide : $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow$ $\vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\vec{e}_r$

♦ Si $r < a$: $Q_{tot}^{réelle} = \iiint_V \rho.dv = \rho\iiint_V dv = \rho\dfrac{4\pi.r^3}{3}$

En remplaçant la densité ρ par son expression en fonction de Q et r donnée par : $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi.R^3}$

on obtient : $Q_{tot}^{réelle} = \dfrac{r^3}{R^3}Q$

d'où l'expression : $\vec{D}(M) = \dfrac{Q.r}{4\pi.R^3}.\vec{e}_r$

On est dans le M.D. : $\varepsilon_r \neq 1 \Rightarrow$ $\vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{Q.r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.R^3}.\vec{e}_r$

3) Expression de la polarisation $\vec{P}(M)$:

Le MD étant parfait donc : $\vec{P}(M) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_{tot}(M)$

avec $\vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{Q.r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.R^3}.\vec{e}_r$, d'où l'expression de la polarisation :

$$\vec{P}(M) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)Q.r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.R^3}.\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q.r}{4\pi\varepsilon_r.R^3}.\vec{e}_r$$

a-Densités de charge fictive de polarisation :

♦ **Densité volumique :** $\rho_P(M) = -div\vec{P}(M)$

<u>Remarque :</u> On utilisera **l'e**xpression de la divergence en coordonnées sphériques en un point $M(r, \theta, \varphi)$:

$$div.\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(P_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi}$$

D'après l'expression de $\vec{P}(M)$ ci-haut on a :

$$\vec{P}(M)= \underset{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)}{} \begin{cases} P_r = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q.r}{4\pi\varepsilon_r.R^3} \\ P_\theta = 0 \\ P_\varphi = 0 \end{cases}$$

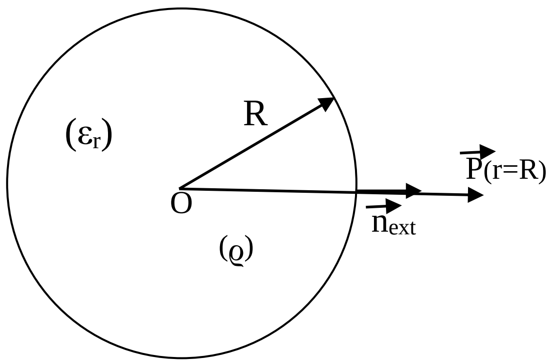
En tenant compte des composantes $P_\theta = 0$ et $P_\varphi = 0$ on a :

$$\rho_P(M) = -div\vec{P}(M) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2.P_r\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2.\frac{(\varepsilon_r - 1)Q.r}{4\pi\varepsilon_r.R^3}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^3}r^3\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^3}\right)\frac{dr^3}{dr} = -\frac{3(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^3} < 0$$

♦ **Densité surfacique au niveau de la surface sphérique de rayon R:**

$$\sigma_P(M \in S) = \vec{P}(M \in S).\vec{n}_{ext}(M \in S)$$



Où : $\begin{cases} \vec{n}_{ext}(M \in S) = \vec{e}_r \\ \vec{P}(M \in S) = \vec{P}(r = R) = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R^2}.\vec{e}_r \end{cases}$

D'où l'expression :

$$\sigma_{P_S}(M \in S) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R^2}.\vec{e}_r.\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R^2} > 0$$

b-Charges électriques fictives de polarisation :

▪ **Charge fictive volumique :**

$$Q_V^P = \iiint_V \rho_P(M).dv = -\frac{3(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^3}\iiint_V dv = -\frac{3(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^3}.\frac{4\pi R^3}{3} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} < 0$$

▪ **Charge fictive surfacique au niveau de la surface S** :

$$Q_{P_S} = \iint_S \sigma_{P_S}.dS = \sigma_{P_S}\iint_{S_2} dS = \sigma_{P_S}.S = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R^2}.4\pi.R^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} > 0$$

Vérification de la neutralité de la charge fictive totale :

On vérifie que : $Q_V^P + Q_{P_S} = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} + \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} = 0$

4) ♦ Densité d'énergie électrostatique ω_e emmagasinée dans le MD :

Le MD étant parfait, la densité volumique d'énergie s'écrit : $\omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_{tot}^2(M)$

Où : $\vec{E}_{tot}(M) = \frac{Q.r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.R^3}.\vec{e}_r$

Soit : $\omega_e(M) = \frac{Q^2.r^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r R^6}$

♦ Energie électrostatique W_e emmagasinée :

Elle est donnée par l'expression : $W_e = \iiint_v \omega_e(M).dv$

Où **dv** est l'élément de volume en coordonnées sphériques.

$$\begin{cases} dv = r^2\sin\theta.dr.d\theta.d\varphi \\ 0 \le r \le R \;;\; 0 \le \theta \le \pi \;;\; 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

L'énergie électrostatique est donc :

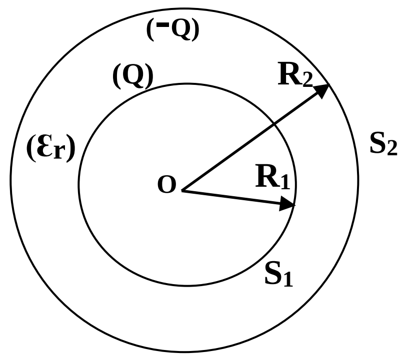
$$W_e = \iiint_v \omega_e(M).dv = = \left(\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r R^6}\right)\iiint_v r^2 dv = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r R^6}\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r R^6}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi}$$

Soit : $W_e = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$

Exercice 3 :

Milieu diélectrique parfait de permittivité électrique ε_r, limité par deux conducteurs sphériques (S_1) et (S_2) de même centre **O** er de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). Les deux surfaces regard de (S_1) et (S_2) portent des charges réelles (+Q) et (-Q). Sous l'action du champ appliqué créé par ces charges réelles, le milieu diélectrique possède une polarisation de la forme $\vec{P}(M) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$ où **r** est la distance du point $M(r,\theta,\varphi)$ au centre **O**.



<u>Remarque :</u> Dans cet exercice les calculs sont identiques que ceux de l'exercice 1, la seule différence est au niveau de l'évaluation de la charge électrique totale dans le théorème de GAUSS.

1) Distributions de charge fictive de polarisation :

♦ Densité volumique : $\rho_p(M) = -div\vec{P}(M)$

En utilisant l'expression de la divergence en coordonnées sphériques et en tenant compte de l'expression de $\vec{P}(M)$ donnée dans le texte ci-haut, où $P_\theta = 0$ et $P_\varphi = 0$:

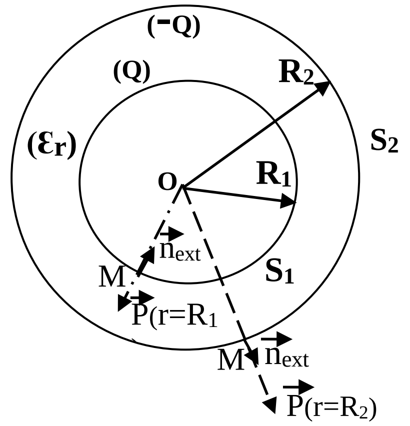
$$\vec{P}(M) = \begin{cases} P_r = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r . r^2} \\ P_\theta = 0 \\ P_\varphi = 0 \end{cases}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)}$$

On obtient :

$$\rho_P(M) = -div\vec{P}(M) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2.P_r\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2.\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r^2}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) = 0$$

♦ **Densités surfaciques :** $\sigma_P(M \in S) = \vec{P}(M \in S).\vec{n}_{ext}(M \in S)$

Les orientations du vecteur unitaire $\vec{n}_{ext}$ **normal à la surface externe S_2 et interne S_1 du MD, sont représentées sur la figure ci-contre.**



▪ **Densités surfacique de la charge au niveau de la surface sphérique externe S_2 de rayon R_2 :**

$$\begin{cases} \vec{n}_{ext}(M \in S_2) = \vec{e}_r \\ \vec{P}(M \in S_2) = \vec{P}(r = R_2) = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2}.\vec{e}_r \end{cases}$$

$$\sigma_{P_2}(M \in S_2) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2}.\vec{e}_r.\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2} > 0$$

▪ **Densités surfacique de la charge au niveau de la surface sphérique interne S_1 de rayon R_1 :**

$$\begin{cases} \vec{n}_{ext}(M \in S_1) = -\vec{e}_r \\ \vec{P}(M \in S_1) = \vec{P}(r = R_1) = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2}.\vec{e}_r \end{cases}$$

$$\sigma_{P_1}(M \in S_1) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2}.\vec{e}_r.(-\vec{e}_r) = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2} < 0$$

2) **Charges électriques fictives de polarisation :**

▪ **Charge fictive volumique :** $Q_V^P = \iiint_V \rho_P(M).dv = 0 \quad \text{car } \rho_P = 0$

▪ **Charge fictive surfacique au niveau de la surface externe S_2** :

$$Q_{P_2} = \iint_{S_2} \sigma_{P_2}.dS_2 = \sigma_{P_2}\iint_{S_2} dS_2 = \sigma_{P_2}.S_2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_2^2}.4\pi.R_2^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} > 0$$

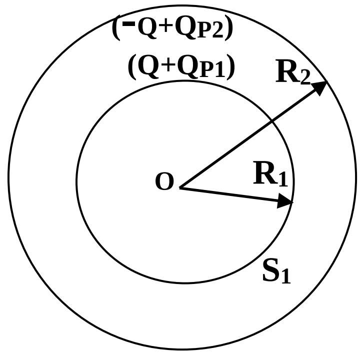
▪ **Charge fictive surfacique au niveau de la surface interne S_1** :

$$Q_{P_1} = \iint_{S1} \sigma_{P_1}.dS_1 = \sigma_{P_1}\iint_{S1} dS_1 = \sigma_{\sigma_{P_1}}.S_1 = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r.R_1^2}.4\pi R_1^2 = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} < 0$$

Vérification de la neutralité de la charge fictive totale :

$$Q_V^P + Q_{P_2} + Q_{P_1} = 0 + \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} - \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} = 0$$

Schéma équivalent au milieu diélectrique dans le vide :



3) Calcul du champ $\vec{E}_{tot}(M)$ et l'induction $\vec{D}(M)$:

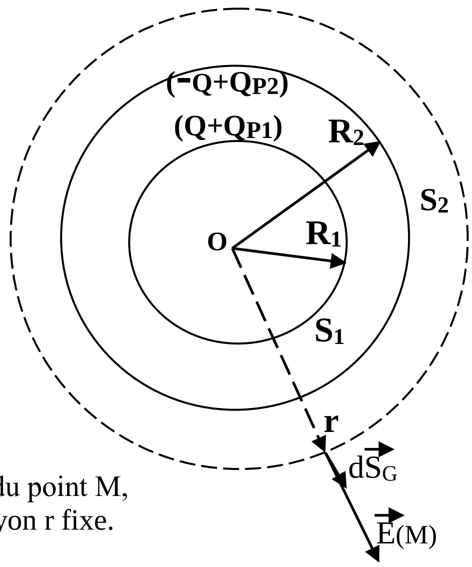
Remarque : Etant donné que les charges fictives de polarisation sont maintenant connues, on peut appliquer le théorème de GAUSS qui fait intervenir $\vec{E}_{tot}(M)$.

$$\oiint_{(S_G)} \vec{E}_{tot}(M).d\vec{S}_G = \frac{Q_{tot}^{réelle} + Q_{tot}^{fictive}}{\varepsilon_0}$$

En raison de la symétrie sphérique, le champ et l'induction électriques sont tels que :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = E(r).\vec{e}_r \\ \vec{D}(M) = D(r).\vec{e}_r \end{cases}$$

La surface fermée S_G de GAUSS convenable est une sphère de centre O et de rayon **r**. Elle est représentée en pointillés dans la figure ci-dessous.



On calcule d'abord l'intégrale $\oiint_{(S_G)} \vec{E}_{tot}(M).d\vec{S}_G$,

Où : $\begin{cases} \vec{E}(M) = E(r).\vec{e}_r \\ d\vec{S}_G = dS_G.\vec{e}_r \end{cases}$

On a :

$$\oiint_{(S_G)} \vec{E}_{tot}(M).d\vec{S}_G = \oiint_{(S_G)} E_{tot}(r).\vec{e}_r.dS_G.\vec{e}_r$$

$$= \oiint_{(S_G)} E_{tot}(r)..dS_G = E_{tot}(r).\oiint_{(S_G)}.dS_G$$

$$= E_{tot}(r).4\pi.r^2$$

Remarque : L'induction D(M) ne dépend que de la coordonnée r du point M, donc elle est constante en tout point M de la sphère de Gauss de rayon r fixe.

En résumé on a : $E_{tot}(r).4\pi.r^2 = \dfrac{Q_{tot}^{réelle} + Q_{tot}^{fictive}}{\varepsilon_0}$

Soit : $\vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{Q_{tot}^{réelle} + Q_{tot}^{fictive}}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\vec{e}_r$

Il faut donc exprimer les charges électriques totales réelle $Q_{tot}^{réelle}$ et fictive $Q_{tot}^{fictive}$ pour chaque région de l'espace :

♦ Si $r > R_2$:
$$\begin{cases} Q_{tot}^{réelle} = Q + (-Q) = 0 \\ Q_{tot}^{fictive} = Q_{P_2} + Q_{P1} = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} - \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} = 0 \end{cases}$$

donc : $\vec{E}_{tot}(r) = \vec{0}$ et $\vec{D}(M) = \vec{0}$

♦ Si $R_1 < r < R_2$:
$$\begin{cases} Q_{tot}^{réelle} = Q \\ Q_{tot}^{fictive} = Q_{P_1} = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} \end{cases}$$

donc :
$$\vec{E}_{tot}(M) = \frac{Q + Q_{P_1}}{4\pi\varepsilon_0 . r^2} . \vec{e}_r = \frac{Q - \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r}}{4\pi\varepsilon_0 . r^2} . \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi . \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} . \vec{e}_r$$

On est dans le MD : $\varepsilon_r \neq 1 \Rightarrow \vec{D}(M) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{Q}{4\pi . r^2} . \vec{e}_r$

♦ Si $r < R_1$:
$$\begin{cases} Q_{tot}^{réelle} = 0 \\ Q_{tot}^{fictive} = 0 \end{cases}$$

D'où : $\vec{E}_{tot}(M) = \vec{0}$ et $\vec{D}(M) = \vec{0}$

4) Energie électrostatique stockée dans le MD :

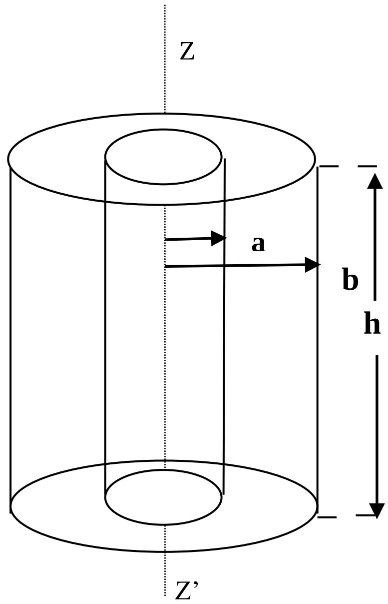
L'énergie électrostatique stockée dans le MD parfait s'écrit :
$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \iiint_V E_{tot}^2(M) . dv$$

Où **dv** est l'élément de volume en coordonnées sphériques.
$$\begin{cases} \vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r . r^2} . \vec{e}_r \quad ; \quad R_1 < r < R_2 \\ dv = r^2 \sin\theta . dr . d\theta . d\varphi \\ R_1 \leq r \leq R_2 \ ; \ 0 \leq \theta \leq \pi \ ; \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

L'énergie électrostatique est donc :
$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \iiint_V E_{tot}^2(M) . dv = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{Q^2}{16\pi^2 (\varepsilon_0 \varepsilon_r)^2 .} \right) \iiint_V \frac{dv}{r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{r^4} \int_0^{\pi} \sin\theta . d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$
$$= \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin\theta . d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R2} \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} \left[\varphi \right]_0^{2\pi}$$

Soit :
$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

Exercice 4 :



Milieu diélectrique parfait, de permittivité diélectrique relative ε_r, limité par deux surfaces cylindriques de même axe **ZZ'** et de même hauteur **h**: une surface externe (S_2) de rayon **b** et une surface interne (S_1) de rayon **a**. Le volume cylindrique interne, de rayon **a** et de hauteur **h**, contient une charge électrique volumique réelle **Q** répartie avec une densité ρ uniforme. La polarisation du milieu est induite par le champ électrique créé par la charge réelle.

1) **Expression de la densité volumique de charge réelle ρ en Fonction de a et Q :**

$$\begin{cases} V = \pi.a^2 h \quad \text{(volume cylindrique contenant la charge Q)} \\ \rho = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q}{\pi.a^2 h} \quad \text{(densité volumique de charge)} \end{cases}$$

2) **Expression de l'induction électrique $\vec{D}(M)$ et du champ $\vec{E}_{tot}(M)$:**

On applique le théorème de GAUSS généralisé, puisque les Charges fictives de polarisation ne sont pas connues :

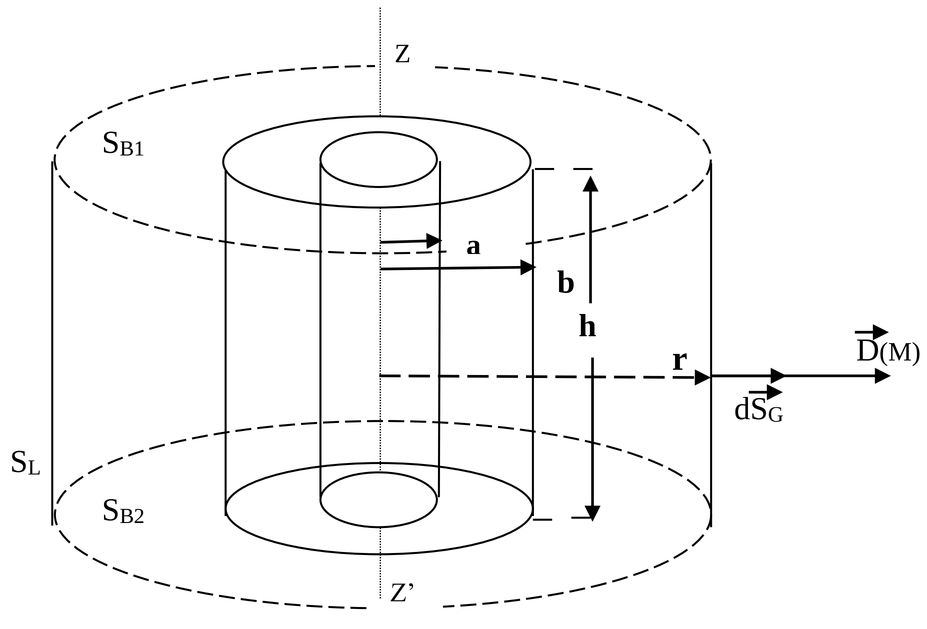
$$\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = Q_{tot}^{réelle}$$

En raison de la symétrie cylindrique, le champ $\vec{E}_{tot}(M)$ et l'induction $\vec{D}(M)$ sont tels que :

$$\begin{cases} \vec{E}_{tot}(M) = E_{tot}(r).\vec{e}_r \\ \vec{D}(M) = D(r).\vec{e}_r \end{cases}$$

La surface fermée $\mathbf{S_G}$ de GAUSS convenable est une surface cylindrique de hauteur **h**, de rayon **r**, de surface latérale S_L et des surfaces de base S_{B1} et S_{B2}, telle que :

$$S = S_L + S_{B1} + S_{B2}$$



On calcule d'abord l'intégrale $\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G$:

$$\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = \iint_{S_L} \vec{D}(M).d\vec{S}_L + \iint_{S_{B1}} \vec{D}(M).d\vec{S}_{B1} + \iint_{S_{B2}} \vec{D}(M).d\vec{S}_{B2}$$

Où : $\begin{cases} \vec{D}(M) = D(r).\vec{e}_r \\ d\vec{S}_L = dS_L.\vec{e}_r \\ d\vec{S}_{B1} = dS_{B1}.\vec{e}_z \\ d\vec{S}_{B2} = -dS_{B2}.\vec{e}_z \end{cases}$ dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

En remarquant qu'au niveau des deux surfaces de base S_{B1} et S_{B2} on a :

$$\vec{D}(M) \perp d\vec{S}_{B1} \quad \text{et} \quad \vec{D}(M) \perp d\vec{S}_{B2}$$

En effet :

$$\vec{D}(M).\, d\vec{S}_{B1} = D(M).\vec{e}_r.dS_{B1}.\vec{e}_z = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{D}(M).\, d\vec{S}_{B2} = D(M).\vec{e}_r.dS_{B2}.\vec{e}_z = 0$$

Il s'en suit :

$$\oiint_{(S_G)} \vec{D}(M).d\vec{S}_G = \iint_{S_L} \vec{D}(M).d\vec{S}_L = \iint_{S_L} D(r)\vec{e}_r.dS_L.\vec{e}_r = \iint_{S_L} D(r).dS_L = D(r).\iint_{S_L} dS_L$$
$$= D(r).S_L = D(r).2\pi.r.h$$

<u>Remarque :</u> L'induction D(M) ne dépend que de la coordonnée **r** du point **M**, donc elle est constante en tout point **M** de la surface latérale de la surface cylindrique de Gauss de rayon **r** fixe.

En résumé on a : $D(r).2\pi.r.h = Q_{tot}^{réelle}$

Soit : $$\vec{D}(M) = \frac{Q_{tot}^{réelle}}{2\pi.r.h}.\vec{e}_r$$

Il faut exprimer la charge électrique totale $Q_{tot}^{réelle}$ située à l'intérieur de la surface fermée de Gauss, pour chaque région de l'espace :

♦ Si $r > b$: $Q_{tot}^{réelle} = Q$; $\qquad \vec{D}(M) = \dfrac{Q}{2\pi.r.h}.\vec{e}_r$

On est dans le vide : $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \qquad \vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0.h.r}.\vec{e}_r$

♦ Si $a < r < b$: $Q_{tot}^{réelle} = Q \Rightarrow \qquad \vec{D}(M) = \dfrac{Q}{2\pi.r.h}.\vec{e}_r$

On est dans le MD : $\varepsilon_r \neq 1 \Rightarrow \qquad \vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r.h}.\vec{e}_r$

♦ Si $r < a$: $Q_{tot}^{réelle} = \iiint_V \rho.dv = \rho\iiint_V dv = \rho\pi.a^2h$

En remplaçant la densité ρ par son expression $\rho = \dfrac{Q}{\pi a^2 h}$ donnée dans la question 1, on obtient :

$$Q_{tot}^{réelle} = \frac{r^2}{a^2}Q$$

d'où l'expression : $$\vec{D}(M) = \frac{Q.r}{2\pi.a^2h}.\vec{e}_r$$

On est dans un milieu non diélectrique : $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \vec{E}_{tot}(M) = \frac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0} = \frac{Q.r}{2\pi\varepsilon_0 a^2 h}.\vec{e}_r$

3) Expression du vecteur polarisation $\vec{P}(M)$ du MD :

Le MD étant parfait donc : $\vec{P}(M) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_{tot}(M)$

avec $\vec{E}_{tot}(M) = \frac{\vec{D}(M)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r.h}.\vec{e}_r$, d'où l'expression de la polarisation :

$$\vec{P}(M) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r.h}.\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.r.h}.\vec{e}_r$$

4) Densités de charge fictive de polarisation :

♦ **Densité volumique :** $\rho_P(M) = -div\vec{P}(M)$

<u>Remarque :</u> On utilisera **l'**expression de la divergence en coordonnées cylindriques en un point $M(r, \theta, z)$:

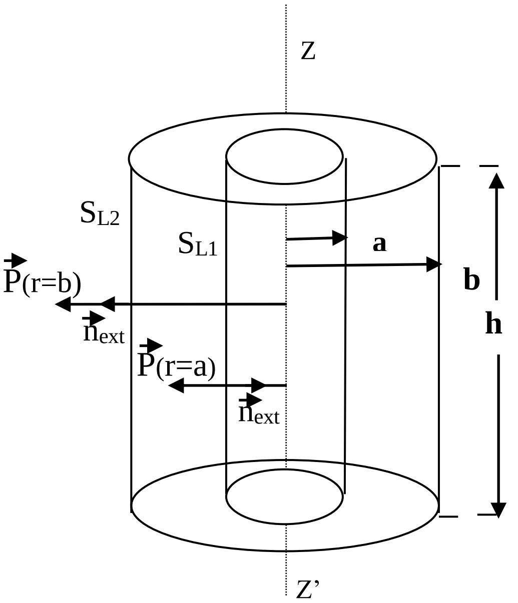
$$div.\vec{P}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.P_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

$$\underset{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)}{\vec{P}(M)=} \begin{cases} P_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.h.r} \\ P_\theta = 0 \\ P_\varphi = 0 \end{cases}$$

En tenant compte des composantes $P_\theta = 0$ et $P_z = 0$ de $\vec{P}(M)$ on a :

$$\rho_P(M) = -div\vec{P}(M) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r.P_r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r.\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.h.r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r h}\right) = 0$$

♦ **Densités surfaciques :** $\sigma_P(M \in S) = \vec{P}(M \in S).\vec{n}_{ext}(M \in S)$



▪ **Densités surfacique de la charge au niveau de la surface latérale externe S_{L2} de rayon b :**

$$\begin{cases} \vec{n}_{ext}(M \in S_{L2}) = \vec{e}_r \\ \vec{P}(M \in S_{L2}) = \vec{P}(r = b) = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.b.h}.\vec{e}_r \end{cases}$$

$$\sigma_{P_{S_{L2}}}(M \in S_{L2}) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.b.h}.\vec{e}_r.\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.b.h} > 0$$

▪ **Densités surfacique de la charge au niveau de la surface latérale interne S_{L1} de rayon a :**

$$\begin{cases} \vec{n}_{ext}(M \in S_{L1}) = -\vec{e}_r \\ \sigma_{P_{S_{L1}}}(M \in S_{L1}) = \vec{P}(r = a) = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.a.h}.\vec{e}_r \end{cases}$$

$$\sigma_{P_{S_{L1}}}(M \in S_{L1}) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.a.h}.\vec{e}_r.(-\vec{e}_r) = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.a.h} < 0$$

5) Charges électriques fictives de polarisation :

▪ **Charge fictive volumique :**

$$Q_V^P = \iiint_V \rho_P(M).dv = 0 \quad \text{car } \rho_P = 0$$

▪ **Charge fictive surfacique au niveau de la surface latérale externe S_{L2} :**

$$Q_{P_{S_{L2}}} = \iint_{S_2} \sigma_{P_{S_{L2}}}.dS2 = \sigma_{P_{S_{L2}}} \iint_{S_2} dS_{L2} = \sigma_{P_{S_{L2}}}.S_{L2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.b.h}.2\pi.b.h = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} > 0$$

▪ **Charge fictive surfacique au niveau de la surface interne S_1 :**

$$Q_{P_{S_{L1}}} = \iint_{S1} \sigma_{P_{S_{L1}}}.dS1 = \sigma_{P_{S_{L1}}} \iint_{S1} dS_{L1} = \sigma_{P_{S_{L1}}}.S_{L1} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{2\pi\varepsilon_r.a.h}.2\pi.a.h = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} < 0$$

Vérification de la neutralité de la charge fictive totale :

$$Q_V^P + Q_{P_2} + Q_{P_1} = 0 + \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} - \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{\varepsilon_r} = 0$$

6) Energie électrostatique W_e emmagasinée dans le MD :

<u>Remarque :</u> Le calcul de l'énergie est identique à celui des exercices précédents.

L'énergie électrostatique stockée dans le MD parfait s'écrit :

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \iiint_V E_{tot}^2(M).dv$$

Où **dv** est l'élément de volume en coordonnées cylindriques.

$$\begin{cases} \vec{E}_{tot}(M) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r.r.h}.\vec{e}_r \quad ; \quad a < r < b \\ dv = r.dr.d\theta.dz \\ a \le r \le b \; ; \; 0 \le \theta \le 2\pi \; ; \; 0 \le z \le h \end{cases}$$

L'énergie électrostatique est donc :

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \iiint_v E_{tot}^2(M).dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \left(\frac{Q^2}{4\pi^2(\varepsilon_0\varepsilon_r)^2.h^2}\right)\iiint_v \frac{dv}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r h^2}\int_a^b \frac{rdr}{r^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r h^2}\int_a^b \frac{dr}{r}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r h^2}[\ln r]_a^b [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^h$$

Soit : $$W_e = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

==