جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

FILIERE SCIENCES DE LA MATIERE PHYSIQUE

MODULE : ELECTRICITE III

Cours d’Electricité 3

Chapitre III : Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels

2023-2024

Chapitre III : Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels linéaires

Dans de tels milieux une onde électromagnétique est caractérisée par quatre vecteurs $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$.

I – Equations de MAXWELL

Elles ont la même forme que dans le vide (Cours d'électricité 2 , Module Electromagnétisme dans le vide), il suffit de changer ε_0 en ε et μ_0 en μ :

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$	Relation de MAXWELL - GAUSS	(III-1)
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	Conservation du flux magnétique	(III-2)
$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Relation de MAXWELL – FARADAY	(III-3)
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu\left(\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$	Relation de MAXWELL – AMPERE	(III-4)

ε et μ sont liées par la relation $\mu\,\varepsilon\,v^2 = 1$, où v est la vitesse de propagation de l'onde.

Ces équations de Maxwell s'appliquent dans tous les cas, au sein d'un milieu continu. Pour résoudre un problème particulier on écrira à côté, les relations dépendant de la nature du milieu. Ainsi, dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, on écrira :

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \qquad \text{(III-5)}$$

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} \qquad \text{(III-6)}$$

ε est la permittivité diélectrique absolue et μ la perméabilité magnétique absolue du milieu.

De plus, dans le cas d'un milieu conducteur obéissant à la loi d'Ohm, on écrira la relation supplémentaire :

$$\vec{j} = \gamma\,\vec{E} \qquad \text{(III-7)}$$

où : $\vec{j}$ est la densité de courant de conduction (courant réel) et γ la conductivité électrique du milieu.

Les quatre champs doivent satisfaire en tous les points du milieu à ces équations. On démontre que l'ensemble se propage dans le temps et dans l'espace.

II – Equations de propagation

1- Champ électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$)

a) Champ électrique

Rappel : Soit $\vec{P}$ un champ de vecteurs on a : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{P}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{P}) - \Delta\,\vec{P}$

Pour le champ $\vec{E}$ **:** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\,\vec{E}$

Le premier membre donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = -\mu\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Le second membre s'écrit : $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\,\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\right) - \Delta\,\vec{E}$

d'où l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ **:**

$$\left[\Delta\,\vec{E} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\,\vec{E}}{\partial\,t^2} = \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) + \mu\,\frac{\partial\,\vec{j}}{\partial\,t}\right] \qquad \text{(III-8)}$$

b) Champ d'induction magnétique :

De la même façon on considère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{B}) - \Delta\,\vec{B} = -\Delta\,\vec{B}$$

Le premier membre donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \mu..\vec{\nabla}\,\Lambda\,\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial\,t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \mu..\vec{\nabla}\,\Lambda\,\vec{j} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\,\vec{B}}{\partial\,t^2}$$

d'où l'équation de propagation du champ $\vec{B}$:

$$\left[\Delta\,\vec{B} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\,\vec{B}}{\partial\,t^2} = -\mu\,\vec{\nabla}\,\Lambda\,\vec{j}\right] \qquad \text{(III-9)}$$

2- Potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire V

Rappel :

On sait que $\vec{B}$ dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\,\Lambda\,\vec{A}$$

En plus, en régime variable le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t}$$

Le choix de la jauge ($\vec{A}, V$) n'est pas unique pour une distribution donnée des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

a) Choix de la jauge de potentiel

Pour que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se conservent il faut se fixer une condition pour la jauge ($\vec{A}, V$). La condition la plus commode que doit satisfaire ce couple de potentiel est la condition de Lorentz, donnée par :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\,\vec{A} + \mu\,\varepsilon\,\dfrac{\partial\,V}{\partial\,t} = 0 \\ \vec{A}\,(\infty) = 0 \\ V\,(\infty) = 0 \end{cases} \qquad \text{(III-10)}$$

b) Equations de propagation du potentiel vecteur $\vec{A}$

Dans l'équation de Maxwell N°4'on remplace :

$\vec{B}$ par $\vec{B} = \vec{\nabla}\,\Lambda\,\vec{A}$ et $\vec{E}$ par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \dfrac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t}$

on obtient l'équation de propagation du potentiel vecteur :

$$\left[\Delta\,\vec{A} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\,\vec{A}}{\partial\,t^2} = -\mu\,\vec{j}\right] \qquad \text{(III-11)}$$

c) Equations de propagation du potentiel scalaire V

Dans l'équation de Maxwell N°1'on remplace $\vec{E}$ par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

soit : $\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\,V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta\,V - \dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\,\vec{A}) = 0$

A partir de la condition de LORENTZ on remplace $\vec{\nabla}.\vec{A}$ par $\vec{\nabla}.\vec{A} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t}$, d'où l'équation :

$$\left[\Delta\,V - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}\right] \qquad \text{(III-12)}$$

Remarque :

L'équation homogène est, donc, la même pour $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$ et V **:**

Soit : $$\Box\ \Psi(M, t) = 0 \qquad \text{(III-13)}$$

Où : $\Box = \Delta - \mu\,\varepsilon\,\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ (opérateur mathématique appelé d'Alembercien)

L'ensemble des composantes de $\vec{E}, \vec{B}$, $\vec{A}$ et du potentiel V constituent une onde électromagnétique qui se propage dans l'espace et le temps.

3) Solution de l'équation d'onde

Les solutions sont identiques à celles que l'on avait dans le vide. C'est à dire de la forme :

$$\Psi = f\left(t - \frac{u}{v}\right) + g\left(t + \frac{u}{v}\right) \qquad \text{(III-14)}$$

$f\left(t - \dfrac{u}{v}\right)$ correspond à une onde progressive et $g\left(t + \dfrac{u}{v}\right)$ à une onde régressive.

u est la coordonnée de la direction de propagation .

$v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}$ est la vitesse de phase de l'onde dans le milieu : $v = \dfrac{\omega}{k}$

III – Onde électromagnétique plane progressive monochromatique (OEMPM)

Une onde est dite monochromatique si les composantes du champ EM ainsi que les potentiels vecteur et scalaire s'écrivent :

$$\Psi\,(M, t) = \Psi_0\,\cos\,(\omega\,\ t - \vec{k}.\vec{r} - \phi)$$

$\vec{k} = k.\vec{e}_u$ dirigé suivant la direction de propagation.

Une OEM est dite plane si

- L'amplitude Ψ_0 est constante
- $\Psi\,(M, t)$ dépend uniquement de la coordonnée du point M suivant la direction de propagation.

1) Caractéristiques de l'onde plane

• Orthogonalité de l'onde plane :

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux $\vec{E} \perp \vec{B}$

• Transversalité de l'onde plane :

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont contenus dans un plan (plan d'onde) perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde plane. On parle d'onde Transverse Electromagnétique (TEM).

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment avec le vecteur d'onde $\vec{k}$ un trièdre direct.

On aura également la relation de structure de l'onde plane :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{1}{v}\vec{e}_u \wedge \vec{E} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{v} \qquad \text{(III-15)}$$

2) Energie transportée par une OEM dans un milieu matériel

a- Vecteur de Poynting

On définira le vecteur de Poynting par la relation :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \qquad \text{(III-16)}$$

son module est donné par :

$$R = \frac{E\,.\,B}{\mu} = \frac{E^2}{\mu\,.v} = \varepsilon.v.E^2$$

Unité de R : Watt / m^2

si $\vec{e}_u$ est le vecteur unitaire de la direction de propagation : $\vec{R} = \varepsilon.v.E^2\,.\,\vec{e}_u$

Les densité volumiques des énergies électrique et magnétique sont égales :

$$\frac{1}{2}\varepsilon.E^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{\mu H^2}{2}$$

La densité d'énergie électromagnétique totale est donc :

$$\omega_{tot} = \omega_e + \omega_m = \varepsilon.E^2 = \frac{B^2}{\mu} \qquad \text{(III-17)}$$

donc le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \omega_{tot}.v.\vec{e}_u \qquad \text{(III-18)}$$

b- Puissance électromagnétique transportée par l'OEM

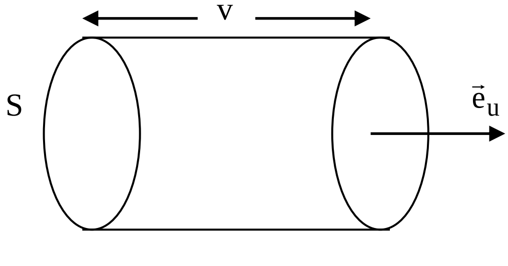
La puissance électromagnétique qui traverse une surface (S) de vecteur unitaire $\vec{e}_u$ est :

$$P = \iint_S \vec{R}.dS.\vec{e}_u = \iint_S \omega_{tot}.v.dS \qquad \text{(III-19)}$$

soit $P = W_{tot}$

Où W est l'énergie électromagnétique qui traverse la surface (S) pendant l'unité de temps.

La longueur du cylindre est L = vdt = v pendant l'unité de temps dt = 1 seconde.



Commentaire :

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface (S) est égal à l'énergie électromagnétique contenue dans un volume cylindrique de base (S), de longueur v allongé parallèlement à la direction de propagation de vecteur unitaire $\vec{e}_u$. L'énergie se propage donc avec la vitesse v. Ce flux représente la puissance électromagnétique qui traverse une surface (S), de vecteur unitaire $\vec{e}_u$.

3) Polarisation des ondes planes monochromatiques

On considère une OEMPM qui se propage suivant l'axe Ox d'un repère cartésien.
Le vecteur d'onde est donc parallèle à Ox :

$$\vec{k} = k.\vec{e}_x$$

L'équation du plan d'onde qui contient les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ est : $x = Cste$

Le champ électrique de cette onde, en un point M et à l'instant t, dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega.t - k.x) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega.t - k.x + \varphi) \end{cases}$$

φ est le déphasage entre les composantes E_y et E_z

Par convention l'état de polarisation de l'onde en un point est celle de son champ électrique.

Différents états de polarisation

Pour déterminer l'état de polarisation de l'onde on étudie le mouvement de l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ dans un plan d'onde, ce qui revient à établir une relation entre E_z et E_y indépendante du temps·

• Polarisation elliptique

Elimination du temps t :

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega.t - k.x)$$
$$E_z = E_{0z} \cos(\omega.t - k.x)\cos\varphi - E_{0z} \sin(\omega.t - k.x)\sin\varphi$$

La 1ère composante donne :

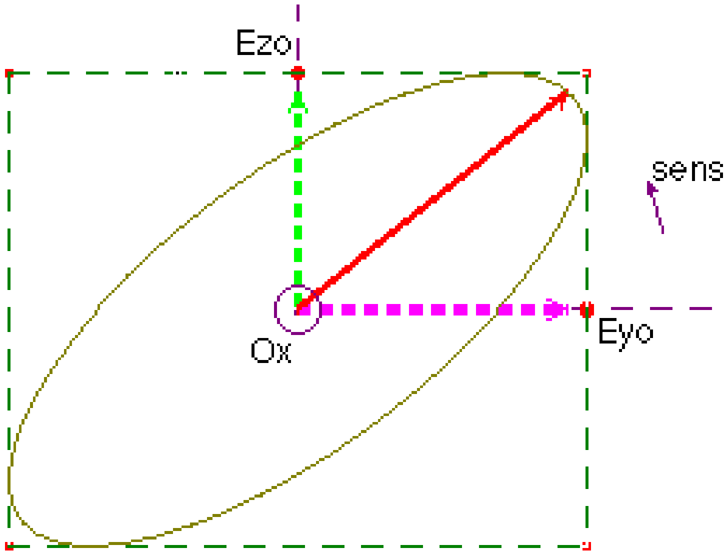
$$\cos(\omega.t - kx) = \frac{E_y}{E_{0y}}$$

$$\sin(\omega.t - k.x) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega.t - kx)} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2}$$

On introduisant ces 2 expressions de la 2ème composante, on obtient l'équation :

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2}+\frac{E_z^2}{E_{0z}^2}-2\frac{E_yE_z\cos\varphi}{E_{0y}E_{0z}}=\sin^2\varphi$$

C'est l'équation d'une ellipse inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{0y}$ et $2E_{0z}$. Elle est décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}$.



▪ Si $\pi \prec \varphi \prec 2\pi$: l'extrémité de $\vec{E}$ se déplace dans le sens trigonométrique, on parle de polarisation elliptique gauche.

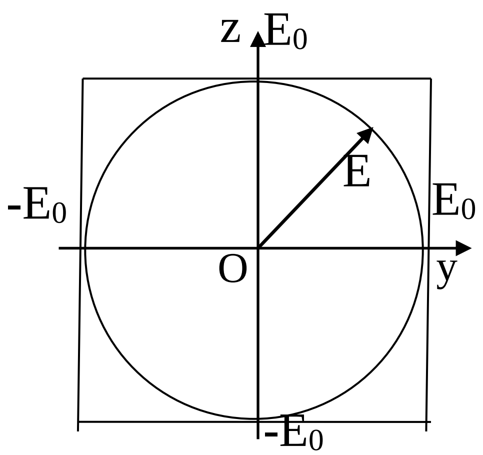
▪ Si $0 \prec \varphi \prec \pi$: l'extrémité de $\vec{E}$ se déplace dans le sens contraire, la polarisation est elliptique droite.

• Polarisation circulaire

Si $\varphi=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ et $E_{0y}=E_{0z}=E_0$

$$\frac{E_y^2}{E_0^2}+\frac{E_z^2}{E_0^2}=1 \Rightarrow E_y^2+E_z^2=E_0^2$$

L'extrémité de $\vec{E}$ décrit un cercle de centre (0,0) et de rayon E_0.



• Polarisation rectiligne

Si $\varphi=n\pi \quad (n\in Z)$ l'équation devient :

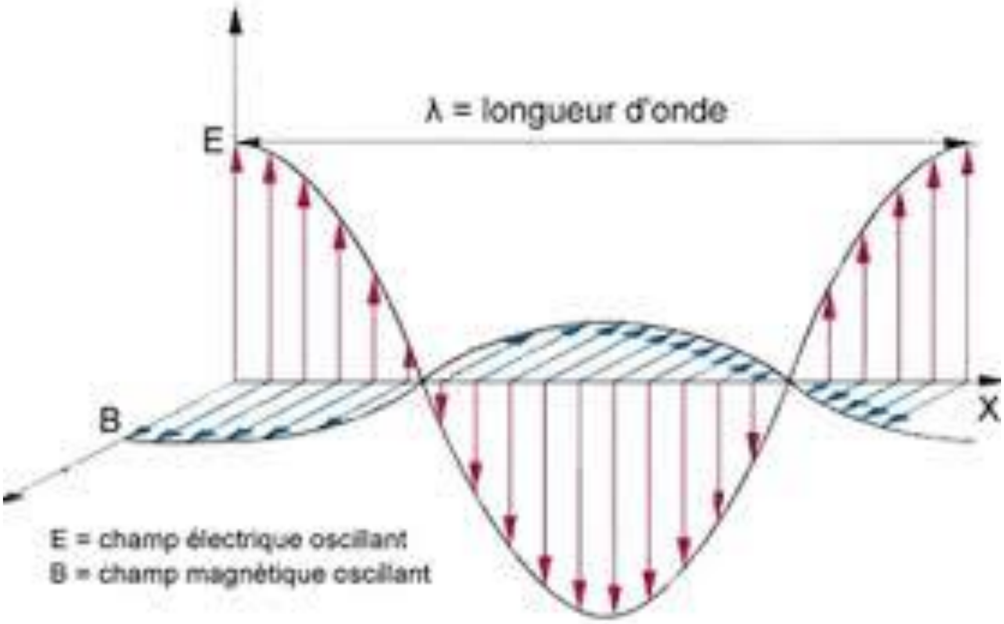
$$\frac{E_z}{E_y}=\pm\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \Rightarrow E_z=\mp\frac{E_{0z}}{E_{0y}}.E_y$$

Le vecteur $\vec{E}$ garde une direction fixe. Il vibre le long d'un segment : L'onde est polarisée rectilignement.

Pour une OEM :

- se propageant suivant Ox : $\vec{k} = k.\vec{e}_x$,
- polarisée rectilignement suivant Oy : $\vec{E}(M, t) = E_y(M, t)\vec{e}_y$

A un instant t donné, en différents points de l'axe Ox le champ EM a l'allure suivante :



IV – Propagation dans les milieux conducteurs non magnétiques

De tels milieux sont caractérisés par : $\rho = 0$, $\mu = \mu_0$ et $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$

1) Conducteurs ordinaires

a – Equations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en notation complexe

Les équations d'onde (II-8) et (III-9) s'écrivent :

$$\Delta\,\vec{\underline{E}} - \mu_0\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\,\vec{\underline{E}}}{\partial\,t^2} = \mu_0\,\gamma\,\frac{\partial\,\vec{\underline{E}}}{\partial\,t} \qquad \text{(III-20)}$$

$$\Delta\,\vec{\underline{B}} - \mu_0\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\,\vec{\underline{B}}}{\partial\,t^2} = -\mu_0\,\gamma\,\vec{\nabla}\,\Lambda\,\vec{\underline{E}} = \mu_0\,\gamma\,\frac{\partial\,\vec{\underline{B}}}{\partial\,t} \qquad \text{(III-21)}$$

Pour une OEM plane sinusoïdale qui se propage le long de l'axe Oz, les opérateurs $\vec{\nabla}$, $\frac{\partial}{\partial\,t}$ et Δ s'expriment par :

$$\frac{\partial}{\partial\,t} = i\,\omega \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial\,t^2} = -\,\omega^2 \quad ; \quad \vec{\nabla} = -i\,\vec{k} \quad ; \quad \Delta = -\,k^2$$

les équations d'onde en notation complexe s'écrivent comme suit :

$$\left(-\,k^2 + \mu_0\,\varepsilon\,\omega^2 - i\,\mu_0\,\gamma\,\omega\right)\vec{\underline{E}} = 0 \qquad \text{(III-22)}$$

$$\left(-\,k^2 + \mu_0\,\varepsilon\,\omega^2 - i\,\mu_0\,\gamma\,\omega\right)\vec{\underline{B}} = 0 \qquad \text{(III-23)}$$

On en déduit donc la relation :

$$-k^2 + \mu_0\, \varepsilon\, \omega^2 - i\, \mu_0\, \gamma\, \omega = 0$$

soit :

$$k^2 = \mu_0\, \varepsilon\, \omega^2 - i\, \mu_0\, \gamma\, \omega = \mu_0\, \varepsilon\, \omega^2 \left(1 - i\, \frac{\gamma}{\varepsilon\, \omega}\right) \qquad \text{(III-24)}$$

Le carré du vecteur d'onde est donc complexe, par suite k est complexe. Il s'écrit en général :

$$\bar{k} = k' - i\, k'' \text{ , avec } k' \text{ et } k'' > 0 \text{ .}$$

La quantité $\frac{\varepsilon\, \omega}{\gamma}$ apparaît comme le quotient du courant de déplacement $\left|\frac{\partial \vec{\bar{D}}}{\partial t}\right| = \varepsilon\, \omega \left|\vec{\bar{E}}\right|$ par la densité de courant de conduction $\left|\vec{\bar{j}}\right| = \gamma \left|\vec{\bar{E}}\right|$.

On appelle facteur de qualité du milieu le rapport :

$$Q = \frac{\left|\frac{\partial \vec{\bar{D}}}{\partial t}\right|}{\left|\vec{\bar{j}}\right|} = \frac{\varepsilon\, \omega \left|\vec{\bar{E}}\right|}{\gamma \left|\vec{\bar{E}}\right|} = \frac{\varepsilon\, \omega}{\gamma} \qquad \text{(III-25)}$$

Dans les conducteurs ordinaires γ est de l'ordre de $10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$ (Ex. cuivre : $\gamma = 5{,}8\ 10^7\ \ \Omega^{-1}.m^{-1}$). Le facteur Q est donc faible pour les conducteurs ordinaires.

La conductivité électrique γ du milieu dépend de la fréquence de l'onde.

b – Atténuation de l'onde

on a : $k^2 = \mu_0\, \varepsilon\, \omega^2 \left(1 - i\, \frac{1}{Q}\right) = (k' - i\, k'')^2$ Soit :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \mu_0\, \varepsilon\, \omega^2 \\ 2\, k' k'' = \dfrac{\mu_0\, \varepsilon\, \omega^2}{Q} \end{cases} \qquad \text{(III-26)}$$

On en déduit :

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0\, \varepsilon}{2}} . \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III-27)}$$

$$k'' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0\, \varepsilon}{2}} . \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III-28)}$$

Remarque : dans le vide $Q \to \infty$ donc $k'' = 0$ et $k' = \omega \sqrt{\mu_0\, \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}$.

L'expression du champ électrique d'une OEM plane sinusoïdale dans un milieu conducteur est donc :

$$\vec{\bar{E}} = E_0\, e^{i\,(\omega t - \bar{k}\, z)} = \vec{E}_0\, e^{i\,(\omega t - k' z + i\, k'' z)} . \vec{u}$$

soit :

$$\bar{\vec{E}} = E_0 \, e^{-k'' z} \, e^{i(\omega t - k' z)} . \vec{u} \qquad \text{(III-29)}$$

Il y a donc atténuation de l'onde plane caractérisée par le coefficient $k'' = k''(\omega)$.

k'' s'appelle coefficient (ou facteur) d'atténuation de l'onde. Il est égal à l'inverse de la distance δ sur laquelle l'amplitude est atténuée d'un facteur e. La distance d'atténuation ou profondeur de pénétration de l'onde est donc :

$$\delta = \frac{1}{k''} \qquad \text{(III-30)}$$

en fonction de δ le champ électrique est :

$$\bar{\vec{E}} = E_0 \, e^{-\frac{z}{\delta}} \, e^{i(\omega t - k' z)} . \vec{u} \qquad \text{(III-31)}$$

2) Cas des milieux très bons conducteurs

Pour ces milieux, la conductivité électrique est infiniment grande ($\gamma >>$). Le facteur de qualité du milieu est infiniment petit ($Q << 1$).

On définit les bons conducteurs comme ceux pour lesquels $Q \leq \frac{1}{50}$, ce qui veut dire que la densité de conduction ($j = \gamma E$) vaut au moins 50 fois la densité de courant de déplacement ($j = \varepsilon \omega E$).

Remarque : γ est fonction de la pulsation ω aux fréquences optiques. Le cuivre reste un bon conducteur jusqu'à des fréquences de l'ordre de $2\ 10^6$ Hz (ultraviolet).

a – Longueur d'atténuation

Pour un milieu très bon conducteur ($Q << 1$) l'expression de k^2 se réduit à :

$$\bar{k}^2 = -i \gamma \mu_0 \omega \qquad \text{(III-32)}$$

sachant que $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, le vecteur d'onde complexe est donné par :

$$\bar{k} = (-i \gamma \mu_0 \omega)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - i) \qquad \text{(III-33)}$$

donc :

$$k' \approx k'' \approx \left(\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III-34)}$$

d'où la longueur d'atténuation de l'onde :

$$\delta = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}} \qquad \text{(III-35)}$$

Remarque :

$$\frac{\bar{E}}{\bar{B}} = \frac{\omega}{\bar{k}} = \omega \left(\frac{1}{\gamma \mu_0 \omega} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{\gamma \mu_0}} \; e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(III-36)}$$

car $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Les expressions du champ électromagnétique de l'onde dans les milieux bons conducteurs sont données par :

$$\vec{\underline{E}} = E_0\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}.\vec{u} \qquad \text{(III-37)}$$

$$\vec{\underline{B}} = \sqrt{\frac{\gamma\mu_0}{\omega}} E_0\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})}.\vec{v} \qquad \text{(III-38)}$$

On note, donc, que dans les bons conducteurs, le champ $\vec{B}$ est en retard de phase de $\frac{\pi}{4}$ par rapport au champ $\vec{E}$, alors qu'ils sont en phase dans les isolants. Cette différence vient du fait que le courant associé à $\vec{B}$ dans les conducteurs est le courant de conduction et non le courant de déplacement comme dans les isolants.

En notation réelle le champ électromagnétique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0\, e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).\vec{u} \qquad \text{(III-39)}$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{\gamma\,\mu_0}{\omega}}\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, E_0 \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right).\vec{v} \qquad \text{(III-40)}$$

b – Effet de peau

On peut remarquer que la profondeur de pénétration de l'onde $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\,\mu_0\,\omega}}$ diminue lorsque γ, μ ou ω augmentent. A la limite lorsque ω ou γ deviennent infinis, δ tend vers zéro. Ainsi donc, les OEM de hautes fréquences ($\omega >>$) ne peuvent pénétrer qu'à une faible profondeur dans les métaux $\gamma >>$**,** voir tableau ci-dessous. L'OEM reste localisée dans une couche d'épaisseur δ : C'est l'effet de peau.

Métal	Conductivité γ (x 10^7) $\Omega^{-1}.m^{-1}$	Profondeur de pénétration (ou épaisseur de peau) δ (en mm)		
		50 Hz	1 KHz	1 MHz
Argent	6.0	9.1	2.03	0.064
Cuivre	5.8	9.3	2.1	0.066
Or	4.5	10.6	2.38	0.075
Aluminium	3.5	12.1	2.7	0.085

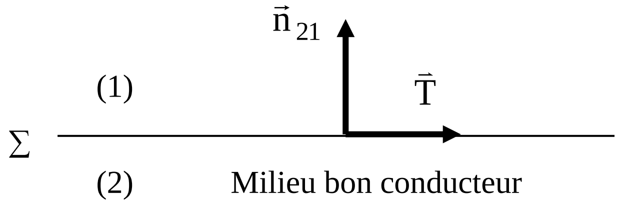
3) Relations de passage à la surface d'un milieu bon conducteur

Nous allons reprendre les relations de passage établies aux paragraphes VI des chapitre 1 et 2 de ce module, avec cette fois le milieu (1) est non conducteur et le milieu (2) est un très bon conducteur.

Soit (Σ) la surface de séparation entre ces deux milieux, et soient :

$\vec{k}_s$: vecteur densité surfacique de courant de conduction qui circulent à la surface **(**Σ **).**

σ : densité surfacique de charge mobile qui pourrait être à la surface de séparation.



$$\vec{E}_2 = 0 \quad \vec{D}_2 = 0$$
$$\vec{B}_2 = 0 \quad \vec{H}_2 = 0$$

a – Composante tangentielle de $\vec{E}$

Rappelons la relation de passage de continuité du champ électrique vue au paragraphe VI du chapitre 1 :

$$\vec{E}_1(M).\vec{T}_1 = \vec{E}_2(M).\vec{T}_1$$

Ici le milieu 2 est un très bon conducteur, donc $\vec{E}_2 = \vec{0}$ dans ce milieu d'où :

$$\vec{E}_1(M).\vec{T}_1 = \vec{0} \qquad \text{(III-41)}$$

La composante tangentielle du champ électrique est, donc, nulle à la surface de séparation d'un bon conducteur.

b – Composante normale de $\vec{D}$

De même nous avons établi, au paragraphe VI du chapitre 1 , la relation de passage pour l'induction électrique :

$$\vec{D}_1(M).\vec{n}_{21} - \vec{D}_2(M).\vec{n}_{21} = \sigma$$

en tenant compte que dans le milieu conducteur $\vec{D}_2 = \vec{0}$, il vient :

$$\vec{D}_1(M)\,.\,\vec{n}_{21} = \sigma \qquad \text{(III-42)}$$

à la surface de séparation d'un milieu bon conducteur la composante normale de $\vec{D}$ est égale à la densité surfacique de charge contenue sur cette surface.

c – Composante normale de $\vec{B}$

Rappelons La relation de passage, établie au paragraphe VI du chapitre 2, traduisant la continuité de la composante normale de $\vec{B}$:

$$\vec{B}_1(M).\vec{n}_1 - \vec{B}_2(M).\vec{n}_1 = 0$$

Puisque dans le milieu 2 est un conducteur, alors $\vec{B}_2 = \vec{0}$, on obtient :

$$\vec{B}_1(M).\vec{n}_1 = 0 \qquad \text{(III-43)}$$

à la surface de séparation d'un bon conducteur la composante normale de $\vec{B}$ est nulle.

d – Composante tangentielle de $\vec{H}$

Si on remplace également $\vec{H}_2 = \vec{0}$ dans la relation de passage pour $\vec{H}$ (paragraphe VI, chapitre 2) :

$$\vec{H}_1(M).\vec{T}_1 - \vec{H}_2(M).\vec{T}_1 = \vec{k}\,.(\,\vec{n}_{21}\,\Lambda.\vec{T}_1)$$

On obtient :

$$\vec{H}_1(M).\vec{T}_1 = \vec{k}\,.\,(\vec{n}_{21}\ \Lambda.\vec{T}_1) = (\vec{k}\ \Lambda.\vec{n}_{21}).\vec{T}_1 \qquad \text{(III-44)}$$

soit encore :

$$\vec{H}_{1T} = \vec{k}\ \Lambda.\vec{n}_{21} \qquad \text{(III-45)}$$

En résumé :

A la surface de séparation d'un conducteur parfait on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_{1T} = 0 & \vec{D}_{1N} = \sigma\,.\ \vec{n}_{21} \\ \vec{B}_{1N} = 0 & \vec{H}_{1T} = \vec{k}\ \Lambda\,\vec{n}_{21} \end{cases} \qquad \text{(III-46)}$$

4) Réflexion et réfraction normales des OEM sur un conducteur parfait

Soit (Σ) une surface de séparation plane entre un milieu (1) non conducteur et un milieu (2) parfait (très bon conducteur).

On considère une OEM incidente plane monochromatique, polarisée rectilignement suivant l'axe Ox ($\vec{E}_i = E_i\,.\vec{e}_x$), se propageant suivant la direction Oz ($\vec{k}_i = k_i\,.\vec{e}_z$) d'un repère cartésien $\Re$ (O; x, y, z) . L'interface (Σ**)** étant choisie parallèle au plan (y O x).

Le champ électromagnétique ($\vec{E}_i$, $\vec{B}_i$) de cette onde incidente est :

$$\begin{cases} \vec{E}_i\ (z,t) = E_{0i}\ \cos(\omega\, t - k_i\ z)\,.\,\vec{e}_x \\ \vec{B}_i\ (z,t) = B_{0i}\ \cos(\omega\, t - k_i\ z)\,.\,\vec{e}_y \end{cases} \qquad \text{(III-47)}$$

où $B_{0i} = \dfrac{E_{0i}}{v_1}$ (pour une onde plane) et v_1 la vitesse de phase de l'onde dans le milieu (1).

Soient :

$\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ le champ électromagnétique dans le milieu (1) après réflexion.

$\vec{E}_t$ et $\vec{B}_t$ le champ électromagnétique dans le milieu (2), conducteur parfait, après transmission.

Rappelons qu'en tout point du milieu conducteur $\vec{E}_t = \vec{0}$ et $\vec{B}_t = \vec{0}$.

Le champ électrique total dans le milieu (1) est : $\vec{E}_1\ (z,t) = \vec{E}_i\ (z,t) + \vec{E}_r\ (z,t)$.

Ecrivons la condition de continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ (relation 41) en un point de la surface du conducteur, c'est à dire pour z = 0 :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1\ (z=0)\,.\,\vec{e}_x &= \left(\vec{E}_i\ (z=0) + \vec{E}_r\ (z=0)\right).\,\vec{e}_x \\ &= \left(E_{0i}\,.\,\vec{e}_x + E_{0r}\,.\,\vec{e}_x\right).\,\vec{e}_x = 0 \end{aligned}$$

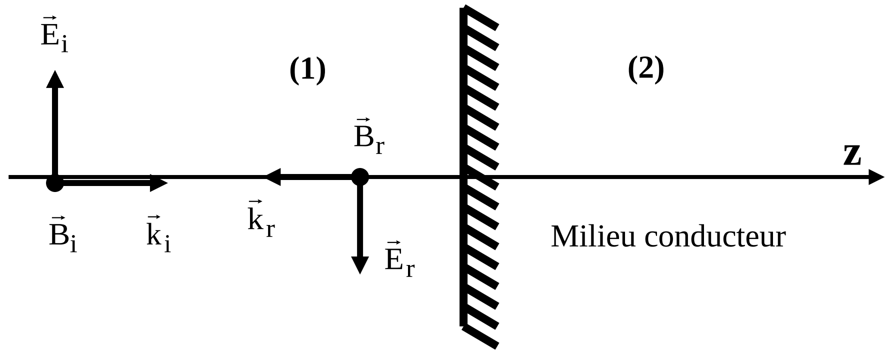
On en déduit que : $\qquad E_{0r} = -\,E_{0i}$

ce qui permet d'écrire pour le champ électrique de l'onde réfléchie ($\vec{k}_i = -\,\vec{k}_r$):

$$\vec{E}_r\ (z,t) = -\,E_{0i}\ \cos(\omega\, t + k_i\ z)\,.\,\vec{e}_x \qquad \text{(III-48)}$$

Le trièdre ($\vec{E}_r$, $\vec{B}_r$, $\vec{k}_r$) étant direct, on en déduit que le champ $\vec{B}_r$ est parallèle à $\vec{B}_i$, donc polarisé rectilignement suivant Oy, soit :

$$\vec{B}_r\ (z,t) = \frac{E_{0i}}{v_1}\cos(\omega\, t + k_i\ z)\,.\,\vec{e}_y = B_{0r}\cos(\omega\, t + k_i\ z)\,.\,\vec{e}_y \qquad \text{(III-49)}$$



5) Superposition d'ondes – Ondes stationnaires

En un point M de l'axe Oz, situé dans le milieu (1), il y a superposition des ondes incidentes $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ et réfléchies $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$. Le champ EM résultant s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_i(M) + \vec{E}_r(M) = E_{0i}\left[\cos(\omega t - k_i z) - \cos(\omega t + k_i z)\right]\vec{e}_x$$

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_i(M) + \vec{B}_r(M) = B_{0i}\left[\cos(\omega t - k_i z) + \cos(\omega t + k_i z)\right].\vec{e}_y$$

soit :

$$\begin{cases} \vec{E}(z,t) = 2E_{0i} \sin k_i z \sin \omega t \,.\vec{e}_x \\ \vec{B}(z,t) = 2B_{0i} \cos k_i z \cos \omega t \,.\vec{e}_y \end{cases} \qquad \text{(III-50)}$$

L'amplitude du champ électromagnétique dépend de la position z, donc l'onde résultante n'est pas plane. Les fonctions d'espace et du temps sont découplées. Il s'agit d'ondes qui ne se propagent pas. Ce sont des ondes stationnaires (ondes vibrant sur place).

L'onde stationnaire est caractérisée par l'existence de nœuds et de ventres.

• **<u>Nœuds</u> :** Tous les points M de l'axe Oz où $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ est nul à un instant donné.

- nœuds du champ électrique : $\vec{E} = \vec{0}$ pour $\sin k_i z = 0$, soit $k_i z = n\pi \quad n \in Z$, pour :

$$z = \frac{n\pi}{k_i} = \frac{n\lambda}{2}$$

- nœuds du champ magnétique : $\vec{B} = \vec{0}$ pour $\cos k_i z = 0$, soit $k_i z = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n \in Z$, pour :

$$z = (2n+1)\frac{\pi}{2k_i} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

La distance entre deux nœuds successifs du champ électrique (ou du champ magnétique) est $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un nœud du champ électrique et un ventre du champ magnétique est $\frac{\lambda}{4}$.

• **<u>Ventres</u> :** Tous les points M de l'axe Oz où les amplitudes de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ sont maximales .en valeurs absolues à un instant donné.

- ventres du champ électrique : $\|\vec{E}\|$ est maximal pour $|\sin k_i z| = 1$, soit $k_i z = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n \in Z$, pour $z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

- ventres du champ magnétique : $\|\vec{B}\|$ est maximal pour $|\cos k_i z| = 1$, soit $k_i z = n\pi \quad n \in Z$, pour :

$z = \frac{n\lambda}{2}$

Ainsi donc les nœuds de $\vec{E}$ coïncident avec les ventres de $\vec{B}$ et inversement.

V – Propagation dans les milieux non conducteurs

De tels milieux sont caractérisés par l'absence de la conductivité électrique ($\gamma = 0$).

V-1 Milieux diélectriques à permittivité diélectrique réelle

Dans un milieu diélectrique (non magnétique $\mu = \mu_0$) à permittivité réelle (Milieu parfait), l'onde électromagnétique se propage à la vitesse $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\, \varepsilon}}$, d'où la permittivité du milieu :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\mu_0\, v^2(\omega)} \qquad \text{(III-51)}$$

l'indice de réfraction du milieu est donné par :

$$n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} = \sqrt{\frac{\mu_r\, \varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\, \varepsilon_r(\omega)} = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \quad (\text{car } \mu_r = 1) \qquad \text{(III-52)}$$

Chaque fois que l'indice de réfraction ou la vitesse de propagation d'un milieu est fonction de la pulsation ω, le milieu est dit dispersif

.

V-2 Milieux absorbant où à permittivité complexe

L'étude de la réponse d'un milieu diélectrique, non magnétique ($\mu = \mu_0$) est caractérisée par une permittivité relative complexe (c'est le cas d'un milieu qui n'est pas parfait) :

$$\bar{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon'_r(\omega) - i\, \varepsilon''_r(\omega) \qquad \text{(III-53)}$$

$$\varepsilon'_r > 0 \text{ et } \varepsilon''_r > 0$$

le vecteur d'onde d'une OEM plane monochromatique dans ce milieu matériel est lui même complexe :

$$\bar{k}(\omega) = k'(\omega) - i\, k''(\omega) \qquad \text{(III-54)}$$

k' et $k'' > 0$, or :

$$\bar{k}^2(\omega) = \mu_0\, \omega^2\, \bar{\varepsilon}(\omega) = \mu_0\, \omega^2\, \varepsilon_0\, \bar{\varepsilon}_r(\omega) \qquad \text{(III-55)}$$

soit

$$k'(\omega) - k''(\omega) - i\, 2\, k'\, k'' = \mu_0\, \omega^2\, \varepsilon_0 \left(\varepsilon'_r - i\; \varepsilon''\right)$$
$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon'_r - i\; \varepsilon''\right)$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient le système qui permet de déterminer k' et k'' :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\, \varepsilon'_r \\[2ex] 2\, k' k'' = \dfrac{\omega^2}{c^2}\, \varepsilon''_r \end{cases}$$

L'indice de réfraction d'un tel milieu est aussi complexe :

$$\bar{n} = \bar{k}\,\frac{c}{\omega} = n' - i\,n'' , \qquad n' > 0 \text{ et } n'' > 0 \quad (56)$$

donc :

$$\bar{n}^2 = \bar{k}^2\,\frac{c^2}{\omega^2} = (n'^2 - n''^2) - i\,2\,n'\,n''$$

En remplaçant $\bar{k}^2$ (55) et en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient le système permettant de calculer n' et n'' :

$$\begin{cases} n'^2 - n''^2 = \varepsilon'_r \\ 2\,n'n'' = \varepsilon''_r \end{cases}$$

Pour une OEM plane monochromatique se propageant suivant la direction Oz d'un repère cartésien, le champ électromagnétique est :

$$\begin{cases} \bar{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \bar{k} z)} = \vec{E}_0\, e^{-k'' z}\, e^{i(\omega t - k' z)} \\ \bar{\vec{B}} = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - \bar{k} z)} = \vec{B}_0\, e^{-k'' z}\, e^{i(\omega t - k' z)} \end{cases} \qquad \text{(III-57)}$$

L'amplitude du champ est exponentiellement décroissante. C'est le phénomène d'absorption ou d'atténuation de l'onde plane lié à la partie imaginaire k'' de $\bar{k}$, tout comme dans les milieux conducteurs.
Pour de telles ondes on a :

$\dfrac{\omega}{k'(\omega)} = v_\varphi$ qui représente la vitesse de phase de l'onde.

$k''(\omega) = \alpha$ qui représente le coefficient d'atténuation de l'onde.

V-3 Réflexion et réfraction des OEM en incidence normale

Soient deux milieux diélectriques parfaits (non magnétiques $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) de permittivités absolues ε_1 et ε_2, séparés par une surface (Σ), ne contenant ni charges $(\sigma = 0)$ ni courants réels ($\vec{k} = \vec{0}$).
Une OEM incidente plane monochromatique, polarisée rectilignement suivant l'axe Ox ($\vec{E}_i = E_i\,.\vec{e}_x$), se propageant suivant la direction Oz ($\vec{k}_i = k_i\,.\vec{e}_z$) d'un repère cartésien $\Re$ (O; x, y, z) . L'interface (Σ**)** étant parallèle au plan (x O y).
Soient :

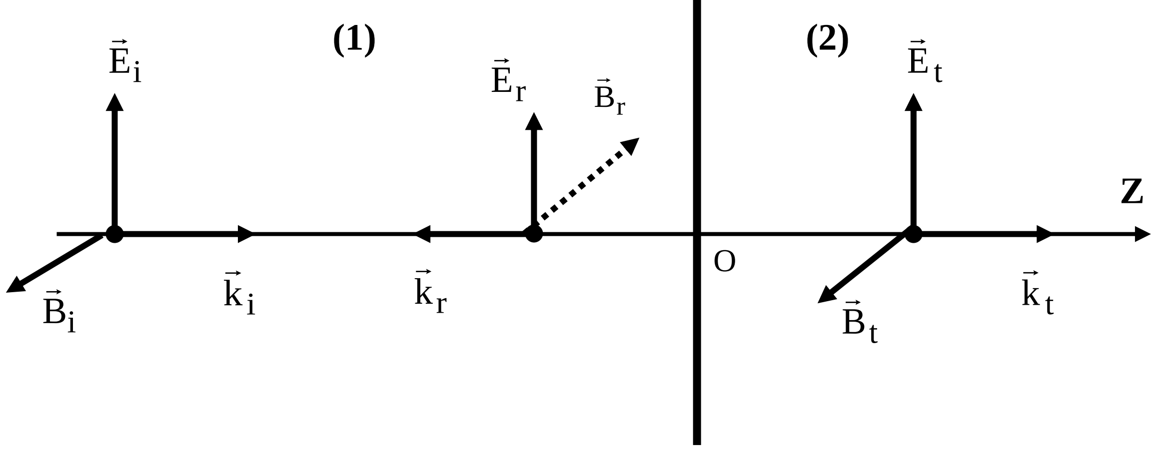
$(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$: onde incidente se propageant dans le milieu (1) à la vitesse $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_1}}$

$(\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r)$: onde réfléchie à la surface (Σ) dans le milieu (1) ayant la même vitesse v_1

$(\vec{E}_t, \vec{B}_t, \vec{k}_t)$: onde transmise dans le milieu (2) et se propageant à la vitesse $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_2}}$

Les modules des vecteurs d'ondes incidente, réfléchie et transmise sont :

$$k_i = k_r = \frac{\omega}{v_1} = k_1 \qquad \text{et} \qquad k_t = \frac{\omega}{v_2} = k_2$$



V-3-1 – Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Les champs électriques des différentes ondes sont :

- Onde incidente : $\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t - k_1 z) . \vec{e}_x$
- Onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t + k_1 z) . \vec{e}_x$
- Onde transmise : $\vec{E}_t = E_{0t} \cos(\omega t - k_2 z) . \vec{e}_x$

Les ondes étant planes on peut donc écrire :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_1}{\omega} \Lambda \vec{E}_i \quad ; \quad \vec{B}_r = -\frac{\vec{k}_1}{\omega} \Lambda \vec{E}_r \quad ; \quad \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_2}{\omega} \Lambda \vec{E}_t \qquad \text{(III-58)}$$

On définit :

- le coefficient de réflexion en amplitude par : $r = \dfrac{E_r(0)}{E_i(0)} = \dfrac{E_{0r}}{E_{0i}}$ (III-59)

- le coefficient de transmission en amplitude par : $t = \dfrac{E_t(0)}{E_i(0)} = \dfrac{E_{0t}}{E_{0i}}$ (III-60)

Ecrivons la continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à la surface de séparation (Σ), donc en z = 0 :

• **<u>Composante tangentielle de $\vec{E}$:</u>**

On choisit comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_x$:

$$\vec{E}_1(z,t) = \vec{E}_i(z,t) + \vec{E}_r(z,t)$$

$$\vec{E}_2(z,t) = \vec{E}_t(z,t)$$

$$\left[\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t)\right] . \vec{e}_x = \vec{E}_t . \vec{e}_x$$

soit :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \qquad \text{(III-61)}$$

• **<u>Composante tangentielle de $\vec{H}$</u> :**

On choisit comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_y$:

$$\vec{H}_1(z,t) = \vec{H}_i(z,t) + \vec{H}_r(z,t)$$

$$\vec{H}_2(z,t) = \vec{H}_t(z,t)$$

$$\left[\vec{H}_i(0,t) + \vec{H}_r(0,t)\right] . \vec{e}_y = \vec{H}_t . \vec{e}_y$$

soit :

$$H_{0i} - H_{0r} = H_{0t}$$

En tenant compte que pour une OEM plane, dans un milieu LHI on a :

$$\begin{cases} H_i = \dfrac{B_i}{\mu_0} = \dfrac{E_i}{\mu_0 \, v_1} \\ H_r = \dfrac{B_r}{\mu_0} = \dfrac{Er}{\mu_0 \, v_1} \\ H_t = \dfrac{B_t}{\mu_0} = \dfrac{E_t}{\mu_0 \, v_2} \end{cases}$$

Il vient :

$$\frac{E_{0i}}{v_1} - \frac{E_{0r}}{v_1} = \frac{E_{0t}}{v_2} \qquad \text{(III-62)}$$

Si on désigne par n_1 et n_2 les indices de réfractions des milieux (1) et (2) respectivement les vitesses des ondes dans les deux milieux sont $v_1 = \frac{c}{n_1}$ et $v_2 = \frac{c}{n_2}$, l'équation (62) devient :

$$n_1 (E_{0i} - E_{0r}) = n_2 E_{0t} \qquad \text{(III-63)}$$

à partir du système d'équations (III-61) et (III-63) on exprime E_{0r} et E_{0t} en fonction de E_{0i}, soit :

$$E_{0r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{0i} \qquad \text{et} \qquad E_{0t} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} E_{0i}$$

d'où les coefficients de réflexion et de transmission de l'onde dans un milieu non absorbant :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

Remarque :
Dans le cas des milieux non absorbants on constate que :

- Le facteur de transmission $t > 0$ quelque soit n_1 et n_2.La transmission de l'onde se fait sans changement de phase.
- Le facteur de réflexion $r > 0$ ou $r < 0$ suivant que $n_1 > n_2$ ou $n_1 < n_2$:

- si $n_1 > n_2$, la réflexion n'introduit pas de changement de phase.
- si $n_1 < n_2$, la réflexion provoque une avance ou un retard de phase égal à π.

Remarque : La figure ci-dessus correspond au cas à $n_1 > n_2$

V-3-2 Facteurs de réflexion R et de transmission T en énergie

Dans le cas de milieux non absorbants ce sont des quantités positives, sans dimension, suivantes :

$$R = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad \text{(III-69)}$$

$$T = 1 - R = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \qquad \text{(III-70)}$$

V-3-3 Cas des milieux absorbants

Si l'un au moins des deux milieux est absorbant, son indice de réfraction est complexe et les coefficients **r** et **t** sont complexes.
On suppose par exemple 2 milieux :

- Milieu (1) : non absorbant, n_1 réel
- Milieu (2) : absorbant (indice complexe), $n_2 = n'_2 - i n''_2$

Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sont donc :

$$\bar{r} = \frac{n_1 - \bar{n}_2}{n_1 + \bar{n}_2} \qquad \text{(III-71)}$$

$$\bar{t} = \frac{2 n_1}{n_1 + \bar{n}_2} \qquad \text{(III-72)}$$

Les facteurs de réflexion et de transmission en énergie sont donnés par :

$$R = \bar{r}.\bar{r}^* = |\bar{r}|^2 = \frac{(n_1 - n'_2)^2 + n''^2_2}{(n_1 + n'_2)^2 + n''^2_2} \qquad \text{(III-73)}$$

$$T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2'}{\left(n_1 + n_2'\right)^2 + n_2''^2} \qquad \text{(III-74)}$$

V-4 Réflexion et réfraction des OEM en incidence oblique

V-4-1 Expressions du champ électromagnétique

Soit une OEM plane monochromatique incidente, polarisée rectilignement arrivant, sous un angle d'incidence θ_1, à la surface de séparation (Σ) entre deux milieux diélectriques et dépourvue de charges et de courant ($\sigma = 0$, $\vec{k}_s = \vec{0}$) :

• Milieux (1), ($\varepsilon_1, \mu_0, n_1$)

• Milieux (2), ($\varepsilon_2, \mu_0, n_2$)

Il existe 2 cas fondamentaux de polarisation :

• 1er Cas : Le champ électrique $\vec{E}$ est dans le plan d'incidence, le champ magnétique $\vec{H}$ est perpendiculaire à ce plan. On parle de mode transverse magnétique noté TM ou mode E.

• 2ème Cas : Le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan d'incidence, le champ magnétique $\vec{H}$ est dans le plan d'incidence. On parle de mode transverse électrique noté TE ou mode H.

On se limitera ici au 1er cas de polarisation. Le deuxième cas de polarisation peut être traité à titre d'exercice. Soient :

($\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{k}_i$) : Onde électromagnétique incidente dans le milieu (1)

($\vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{k}_r$) : Onde électromagnétique réfléchie à la surface (Σ) dans le milieu (1)

($\vec{E}_t, \vec{H}_t, \vec{k}_t$) : Onde électromagnétique transmise dans le milieu (2)

Remarque : On peut aussi considérer le champ d'excitation H au lieu de l'induction magnétique B :

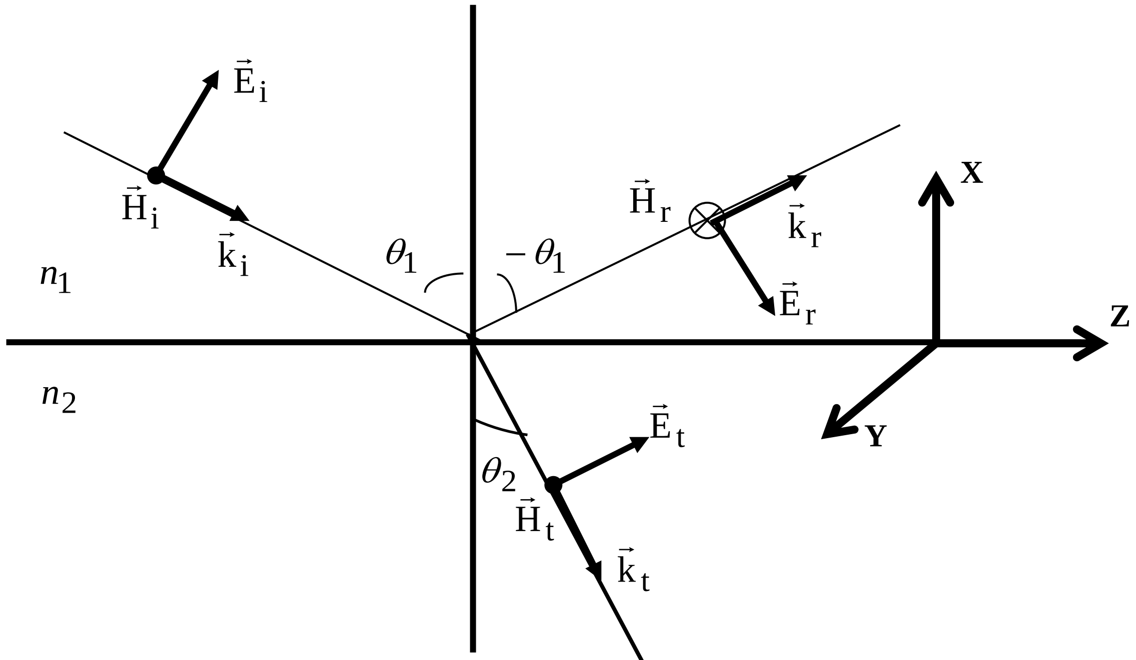
$$\vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} \quad , \vec{H}_r = \frac{\vec{B}_r}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{H}_t = \frac{\vec{B}_t}{\mu_0}$$

Le plan (XOZ) est le plan d'incidence.
Le plan (YOZ) = (Σ) est la surface de séparation.

Donc $\vec{E}_i \in$ (XOZ) et $\vec{H}_i \perp$ (XOZ), c.à.d. $\vec{H}_i = H_i.\vec{e}_y$

♦ On considère le cas $n_1 > n_2$ **:**

Dans ce cas le champ $\vec{E}_i$ de l'onde incidente, et $\vec{E}_r$ de l'onde réfléchie, sont en phase.



Il faut d'abord exprimer les trois vecteurs d'onde $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_t$ dans la base cartésienne.

$$\vec{k}_i = \begin{vmatrix} k_{ix} = -k_1 \cos\theta_1 \\ k_{iy} = 0 \\ k_{iz} = k_1 \sin\theta_1 \end{vmatrix} \qquad \vec{k}_r = \begin{vmatrix} k_{rx} = k_1 \cos\theta_1 \\ k_{ry} = 0 \\ k_{rz} = k_1 \sin\theta_1 \end{vmatrix} \qquad \vec{k}_t = \begin{vmatrix} k_{tx} = -k_2 \cos\theta_2 \\ k_{ry} = 0 \\ k_{rz} = k_2 \sin\theta_2 \end{vmatrix}$$

• Champ électromagnétique de l'onde incidente :

$$\vec{\overline{E}}_i = \begin{cases} \overline{E}_{ix} = E_{0i} \sin\theta_1 \exp i\left[\omega t - k_1 (\text{-x}\cos\theta_1 + z\sin\theta_1\right] \\ \overline{E}_{iy} = 0 \\ \overline{E}_{iz} = E_{0i} \cos\theta_1 \exp i\left[\omega t - k_1 (\text{-x}\cos\theta_1 + z\sin\theta_1\right] \end{cases} \qquad \text{(III-75)}$$

$$\vec{\overline{H}}_i = \vec{\overline{H}}_{iy} = H_{0i} \exp i\left[\omega t - k_1 (-x\cos\theta_1 + z\sin\theta_1)\right].\vec{e}_y \qquad \text{(III-76)}$$

• Champ électromagnétique de l'onde réfléchie :
Orientation des champs :
Le plan (XOZ) est un plan de symétrie pour le système; par conséquent les vecteurs $\vec{H}_r$ et $\vec{H}_t$ sont aussi dirigés suivant OY et les vecteurs $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$ sont contenus dans ce plan.

$$\vec{\overline{E}}_r = \begin{cases} \overline{E}_{rx} = -E_{0r} \sin\theta_1 \exp i\left[\omega t - k_1 (\text{x}\cos\theta_1 + z\sin\theta_1\right] \\ \overline{E}_{ry} = 0 \\ \overline{E}_{rz} = E_{0r} \cos\theta_1 \exp i\left[\omega t - k_1 (\text{x}\cos\theta_1 + z\sin\theta_1\right] \end{cases} \qquad \text{(III-77)}$$

$$\vec{\overline{H}}_r = \vec{\overline{H}}_{ry} = -H_{0r} \exp i\left[\omega t - k_1 (x\cos\theta_1 + z\sin\theta_1)\right].\vec{e}_y \qquad \text{III-78)}$$

• Champ électromagnétique de l'onde transmise :
Le champ $\vec{H}_t$ est transmis sans changement de phase par rapport à $\vec{H}_i$, donc $\vec{H}_t = H_t.\vec{e}_y \mathbin{//} \vec{H}_i$. Le trièdre $(\vec{E}_t, \vec{H}_t, \vec{k}_t)$ étant orthonormé direct, d'où l'orientation de $\vec{E}_t$.

$$\vec{\overline{E}}_t = \begin{cases} \overline{E}_{tx} = E_{0t} \sin\theta_2 \exp i\left[\omega t - k_2 (\text{-x}\cos\theta_2 + z\sin\theta_2\right] \\ \overline{E}_{ty} = 0 \\ \overline{E}_{tz} = E_{0t} \cos\theta_2 \exp i\left[\omega t - k_2 (\text{-x}\cos\theta_2 + z\sin\theta_2\right] \end{cases} \qquad \text{(III-79)}$$

$$\vec{\overline{H}}_t = \vec{\overline{H}}_{ty} = -H_{0t} \exp i\left[\omega t - k_2 (\text{-x}\cos\theta_2 + z\sin\theta_2)\right].\vec{e}_y \qquad \text{(III-80)}$$

V-4-2 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $r_{//}$ **et** $t_{//}$**.**

Rappel :

$$r = \frac{E_r(0)}{E_i(0)} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = r_{//} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{E_t(0)}{E_t(0)} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = t_{//}$$

Les relations de continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ en un point M de (Σ), donc en x = 0 donnent :

• **Continuité de la composante tangentielle de** $\vec{E}$:

$$\vec{E}_1(0,z,t) = \vec{E}_i(0,z,t) + \vec{E}_r(0,z,t)$$
$$\vec{E}_2(0,z,t) = \vec{E}_t(0,z,t)$$

On prend comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_z$, soit :

$$\left(\vec{E}_i(0,z,t) + \vec{E}_r(0,z,t)\right)\vec{e}_z = \vec{E}_t(0,z,t).\vec{e}_z$$

Soit encore :

$$\left(E_{0i}\cos\theta_1 + E_{0r}\cos\theta_1\right) = E_{0t}\cos\theta_2 \qquad \text{(III-81)}$$

En divisant les deux membres de cette expression par E_{0i} on obtient :

$$\left(1 + r_{//}\right)\cos\theta_1 = t_{//}\cos\theta_2 \qquad \text{(III-82)}$$

• **Continuité de la composante tangentielle de** $\vec{H}$:

$$\vec{H}_1(0, z, t) = \vec{H}_i(0, z, t) + \vec{H}_r(0, z, t)$$

$$\vec{H}_2(0, z, t) = \vec{H}_t(0, z, t)$$

On prend comme vecteur unitaire tangent à la surface de séparation le vecteur $\vec{T} = \vec{e}_y$, soit :

$$\left(\vec{H}_i(0, z, t) + \vec{H}_r(0, z, t)\right).\vec{e}_y = \vec{H}_t(0, z, t).\vec{e}_y$$

soit encore :

$$H_{0i} - H_{0r} = H_{0t} \qquad \text{(III-83)}$$

Comme il s'agit d'une onde plane on a les relations :

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{E}{\mu_0 v} = \frac{nE}{\mu_0 c}$$

donc :

$$H_{0i} = \frac{n_1 E_{0i}}{\mu_0 c} \quad ; \quad H_{0r} = \frac{n_1 E_{0r}}{\mu_0 c} \quad \text{et} \quad H_{0t} = \frac{n_2 E_{0t}}{\mu_0 c}$$

d'où l'équation :

$$n_1\left(E_{0i} - E_{0r}\right) = n_2 E_{0t} \qquad \text{(III-84)}$$

En introduisant r// **et** $t_{//}$ on obtient :

$$n_1\left(1 - r_{//}\right) = n_2 t_{//} \qquad \text{(III-85)}$$

En combinant les deux relations de continuité (III-82) et (III-85), on obtient les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à l'interface de deux diélectriques pour une polarisation parallèle au plan d'incidence :

$$r_{//} = \frac{n_1 \cos\theta_2 - n_2 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1} \qquad \text{(III-86)}$$

$$t_{//} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_2 + n_2 \cos\theta_1} \qquad \text{(III-87)}$$

Remarque :

- Le déphasage de l'onde transmise est toujours nul puisque $t_{//}$ est réel positif.
- Le déphasage de l'onde réfléchie est donné par le signe de $r_{//}$.