Chapitre 2:
Espaces vectoriels réels
Algèbre-PC-S2

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Meknès
Université Moulay Ismail

Année Universitaire 2023-2024

كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

Plan

Introduction

- L'espace vectoriel est une notion fondamentale en mathématiques et en physique.
- En algèbre linéaire, un espace vectoriel est un ensemble d'objets appelés vecteurs, que l'on peut additionner entre eux, et que l'on peut multiplier par un scalaire (pour les étirer, les rétrécir, les tourner, ...etc).
- Un espace vectoriel est un ensemble muni d'une structure permettant d'effectuer des combinaisons linéaires.

Notion d'espace vectoriel réel

Définition

On appelle espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) un ensemble non vide E d'éléments désignés par $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ appelés vecteurs, muni d'une structure algébrique définie par la donnée de deux opérations (dites aussi lois):

Addition vectorielle: À tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de E correspond un vecteur de E désigné par $\mathbf{x+y}$ et appelé somme de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. L'addition vectorielle est aussi appelée *loi interne sur E* $(+ : E \times E \to E)$.

Multiplication par un scalaire: À tout α de $\mathbb{R}$ et tout $\mathbf{x}$ de E correspond un vecteur désigné par $(\alpha \cdot \mathbf{x})$ et appelé produit de $\mathbf{x}$ par α. La multiplication par un scalaire est une *loi externe sur E* $(\cdot : \mathbb{R} \times E \to E)$.

Définition (suite)

Ces deux lois satisfont aux conditions suivantes:

1. $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$ (commutativité)
2. $\forall x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité) .
3. Il existe un vecteur (unique), noté 0_E et appelé vecteur nul, tel que $x + 0_E = x$ pour tout $x \in E$.
4. pour tout vecteur $x \in E$, il existe un vecteur (unique) de E, noté $-x$ et appelé opposé de x, tel que $x + (-x) = 0_E$.
5. $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{array}{llll} (a) & \alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x & (b) & (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x \\ (c) & 1_{\mathbb{R}}.x = x & (d) & \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y \end{array}$$

Remarque: L'ensemble vide $\emptyset$ n'est pas un espace vectoriel ($0_E \notin \emptyset$).

Régles élémentaires dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E

Proposition

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a:

1. $0_{\mathbb{R}}.x = 0_E$ et $\alpha.0_E = 0_E$.
2. $-(\alpha.x) = \alpha.(-x) = (-\alpha).x$.
3. $\alpha.x = 0_E \Longrightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{R}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E)$

Exemples d'espace vectoriels

Exemples:

- $\{0_E\}$ est un espace vectoriel sur n'importe quel corps $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n-lignes et à p-colonnes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$: L'ensemble des n-uplets de nombres réels est noté $\mathbb{R}^n$. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &:= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \\ \mathbb{R}^3 &:= \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}, \\ \mathbb{R}^n &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Munissons $\mathbb{R}^n$ des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies au moyen des formules suivantes:

Addition: On définit l'addition sur les n-uplets d'une manière naturelle comme suit:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

On déduit facilement que l'addition sur $\mathbb{R}^n$ vérifie les propriétés $(1) - (4)$ de la définition, où l'élément neutre est $0_{\mathbb{R}^n} := (0, 0, \ldots, 0)$ et l'élément opposé de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est

$$-(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

Multiplication par un scalaire: Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

La multiplication par un scalaire sur $\mathbb{R}^n$ vérifie la propriété (5) de la définition.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

L'espace $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$

Munissons $\mathbb{R}[X]$; l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$, des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies au moyen des formules suivantes:

Addition:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i + \sum_{i=0}^{n} b_i X^i := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i.$$

Multiplication par un scalaire: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la multiplication d'un polynôme par α comme suit:

$$\alpha \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right) := \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i X^i.$$

$(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel réel.

Définition

On appelle produit scalaire dans E toute opération qui fait correspondre à chaque couple (x, y) de vecteurs de E un réel, noté $(x \mid y)$ et appelé produit scalaire de x et y, satisfaisant aux conditions suivantes:

1. $\forall x, y \in E : \quad (x \mid y) = (y \mid x)$ (symétrie).
2. $\forall x, y, z \in E; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad (\alpha x + \beta y \mid z) = \alpha(x \mid z) + \beta(y \mid z)$ (linéarité à gauche).
3. $\forall x \in E, x \neq 0_E : \quad (x \mid x) > 0.$

Remarque:

- Dans la définition précédente, la condition (2) exprime la linéarité à gauche du produit scalaire. La linéarité à droite est obtenue en utilisant (1) et (2):

$$(x \mid \alpha y+\beta z) = (\alpha y+\beta z \mid x) = \alpha(y \mid x)+\beta(z \mid x) = \alpha(x \mid y)+\beta(x \mid z).$$

- Pour $\alpha = \beta = 0$ dans (2), on a : $(0 \mid z) = 0$ et par symétrie $(z \mid 0) = 0$. Donc, le produit scalaire de x et y est nul si x est nul ou y est nul. En particulier $(x \mid x)$ est nul si et seulement si $x = 0$.

Norme d'un vecteur

Définition

Soit x un vecteur de E. On appelle norme de x, noté $\|x\|$, le nombre réel $\sqrt{(x \mid x)}$. On dit que x est unitaire si $\|x\| = 1$.

Remarque:

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in E$;

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x \mid \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x \mid x)} = |\alpha| \sqrt{(x \mid x)} = |\alpha| \, \|x\|.$$

- Pour tout $x \in E$ non nul, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Exemples de produit scalaire

Exemple 1: Produit scalaire canonique

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$, on définit l'opération:

$$((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Cette opération est symétrique. En effet,

$$((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_2 x_2 + y_1 x_1 = ((y_1, y_2) \mid (x_1, x_2)).$$

Elle est aussi linéaire à gauche:

$$\begin{aligned}
(\alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1', x_2') \mid (y_1, y_2)) &= ((\alpha x_1 + \beta x_1', \alpha x_2 + \beta x_2') \mid (y_1, y_2)) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1') y_1 + (\alpha x_2 + \beta x_2') y_2 \\
&= \alpha(x_1 y_1 + x_2 y_2) + \beta(x_1' y_1 + x_2' y_2) \\
&= \alpha\left((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)\right) \\
&\quad +\beta\left((x_1', x_2') \mid (y_1, y_2)\right).
\end{aligned}$$

En plus, si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, on a $((x_1, x_2) \mid (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 > 0$.
Donc, on a un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, dit produit scalaire canonique.
De manière générale, le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ est définie par:

$$((x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (y_1, y_2, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemple 2: Produit scalaire non canonique

On peut définir sur $\mathbb{R}^n$ d'autres produits scalaires (différents du produit scalaire canonique). Par exemple, sur $\mathbb{R}^3$, l'opération:

$$((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 4x_3 y_3,$$

définit un produit scalaire.

Orthogonalité

L'espace vectoriel réel E est muni d'un produit scalaire $(. \mid .)$.

Définition

1. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x \mid y) = 0$. On note alors, $x \perp y$.
2. Deux sous-ensembles F et G de E sont orthogonaux si $\forall x \in F$ et $\forall y \in G$, $(x \mid y) = 0$. On note alors, $F \perp G$.
3. Soit F un sous-ensemble de E. L'orthogonal de F est l'ensemble $F^\perp$ défini par:

$$F^\perp = \{x \in E \mid (x \mid y) = 0, \quad \forall y \in F\}.$$

   C'est l'ensemble de tous les éléments de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de F.

Théorème de Pythagore

Proposition

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y)\\ &= (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Donc, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si $(x \mid y) = 0$.

Combinaisons linéaires

Définition

Soient $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de $x_1, ..., x_n$, toute somme:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, ..., x_n$ est noté $Vect(x_1, ..., x_n)$ ou $\langle x_1, ..., x_n \rangle$.

Remarque: Il est clair qu'une combinaison linéaire des éléments de E est aussi un élément de E. Par conséquent, si $x_1, ..., x_n$ sont des vecteurs de E, alors

$$Vect(x_1, ..., x_n) \subseteq E.$$

Exemple

1. Le vecteur nul est combinaison linéaire de $x_1, x_2, , ..., x_n$. Pour voir cela, il suffit de prendre $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ (combinaison triviale).
2. Une combinaison linéaire des vecteurs $(1,2)$ et $(-2,0)$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de la forme

$$x(1,2) + y(-2,0) = (x - 2y, 2x + 0y) = (x - 2y, 2x),$$

avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$Vect\left((1,2),(-2,0)\right) = \left\{(x-2y, 2x) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Sous-espaces vectoriels

Définition

On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble de E qui est lui-même un espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies dans E.

Un sous-espace vectoriel F de E, ne peut pas être vide ($0_E \in F$ forcément).

Proposition: Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Un sous ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si:

1. $0_E \in F$ (n'est pas vide).
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in F$, on a $\alpha x + \beta y \in F$.

Remarque: Dans la pratique:

- Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel, on montre en général que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est plus rapide que de revenir à la définition.
- Dans tout espace vectoriel E, il y a toujours deux sous-espaces vectoriels dits triviaux: $\{0_E\}$ et E.
- Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E:
  1. On montre que: $F \subseteq E$.
  2. On montre que: $F \neq \emptyset$; la plupart du temps on montre que $0_E \in F$.
  3. On montre que: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in F$, on a $\alpha x + \beta y \in F$.

Exemples

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(0,0) \in A$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall (x,y), (x',y') \in A$, on a:
$$\alpha(x,y) + \beta(x',y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'),$$
et
$$(\alpha x + \beta x') + 2(\alpha y + \beta y') = \alpha(x + 2y) + \beta(x' + 2y') = 0.$$
Donc, $\alpha(x,y) + \beta(x',y') \in A$. Par conséquent, A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, $(0,0) \notin B$. Donc, une partie d'un espace vectoriel n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

Comment montrer que F est un sev d'un ev E?

Proposition

Si $x_1, ..., x_n$ sont des vecteurs de E, alors $Vect(x_1, ..., x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de E tels que $F = Vect(x_1, ..., x_n)$.

Exemple

L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet,

$$A = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect\left((1, 1)\right).$$

Proposition

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E, noté $F \cap G$, est un sous-espace vectoriel de E.

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$.
- $(0, 1) \in F$, $(1, 0) \in G$.
- $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin F \cup G$.
- $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Proposition

La réunion de deux sous espaces vectoriels F et G est un espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Définition: Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de F et G est l'ensemble

$$F + G := \{x + y \in E \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Proposition

- $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

Exemple

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z = 0\}$.

- Un élément w de $F + G$ s'écrit $w = u + v$ où $u \in F$ et $v \in G$.
- Comme $u \in F$, $u = (x, 0, 0)$.
- Comme $v \in G$, $v = (0, y, 0)$.
- Donc $w = (x, y, 0)$.
- $F + G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$.

Famille génératrice

Définition

Une famille $\{x_1, .., x_n\}$ d'éléments de E est dite génératrice de E si:

$$E = Vect(x_1, x_2, ..., x_n).$$

C'est-à-dire, si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des éléments $x_1, ..., x_n$:

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} : \quad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n.$$

On dit que $x_1, ..., x_n$ engendrent E.

Exemples

1) Le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est formé de tous les multiples de ce vecteur. On appelle un tel sous-espace droite vectorielle. Un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs non multiples l'un de l'autre est appelé plan vectoriel.
2) Tout nombre complexe s'écrit de la forme $z = a \times 1 + b \times i$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Donc, $\{1, i\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3) Tout élément de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ s'écrit sous la forme:

$$(x, y, z) = (x, y, x + 2y) = (x, 0, x) + (0, y, 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2).$$

Donc, $\{(1, 0, 1); (0, 1, 2)\}$ est une famille génératrice de F.

4) On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$;

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0;\ x - y + 2z = 0\right\}.$$

On a:

$$(x, y, z) \in G \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \end{cases}$$

Alors $(x, y, z) = (-y, y, y) = y(-1, 1, 1)$. Donc, la famille $\{(-1, 1, 1)\}$ est une famille génératrice de G.

5) Tout élément (x, y) de l'espace réel $\mathbb{R}^2$ s'écrit de la forme:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Donc,

$$\mathbb{R}^2 = Vect\left((1, 0), (0, 1)\right).$$

De même,

$$\mathbb{R}^3 = Vect\left((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\right).$$

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on considère e_i l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coordonnées sont nulles sauf celle à la i-ième place qui vaut 1. C'est-à-dire;

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Alors,

$$\mathbb{R}^n = Vect(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

En effet,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Proposition

1. Si $\{x_1, ..., x_n\}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E et $\{y_1, .., y_p\}$ est une famille d'éléments de E, alors $\{x_1, ..., x_n, y_1, .., y_p\}$ est encore génératrice.
2. Si une famille est génératrice, toute famille obtenue en permutant ses éléments est aussi génératrice. Le fait qu'une famille soit génératrice ne dépend donc pas de l'ordre de ses éléments.

Remarque: La famille génératrice n'est pas unique. Par exemple, $Vect((1,1,1))$ admet les familles $\{(1,1,1)\}$, $\{(2,2,2)\}$ comme familles génératrices.

famille libre et famille liée

Définition

Soient $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille finie d'éléments d'un espace vectoriel réel E.

1. On dit que $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une famille libre ou que les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont linéairement indépendants, si $\forall \lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0).$$

2. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'on peut trouver une famille de scalaires $\lambda_1, .., \lambda_n$ non pas tous nuls vérifiant $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E$, on dit que la famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est liée ou que les vecteurs $x_1, x_2, .., x_n$ sont linéairement dépendants.

Exemples

1. On a $1_{\mathbb{R}}.0_E = 0_E$ donc $\{0_E\}$ est toujours liée.
2. Si $x \neq 0$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$. Donc, $\{x\}$ les libre. Donc, la famille $\{x\}$ est libre si et seulement si $x \neq 0$.
3. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la famille de $\mathbb{R}^n$ considérée dans l'exemple précédent. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = (0, 0, \ldots, 0).$$

Donc, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, et ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Par conséquent, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ et $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition

1. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
2. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

En particulier,

- Une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul.
- Une famille libre ne peut pas avoir deux vecteurs proportionnels, et a fortiori deux vecteurs égaux.

Remarque

$\{0_E\}$ est une famille liée donc elle ne peut être une sous famille d'une famille libre. La même chose pour une famille de la forme $\{x, \alpha x\}$ avec $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition

Soient $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille libre de E et $x \in E$. La famille $\{x_1, ..., x_n, x\}$ est liée si et seulement si x est une combinaison linéaire de $x_1, ..., x_n$.

Proposition

Soit $\{x_1, ..., x_n\}$ une famille libre. Soient $\alpha_1, .., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$ des scalaires. Alors,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n.$$

Comment prouver qu'une famille est libre ou liée?

Famille libre: Il suffit d'appliquer la définition en supposant qu'on a une combinaison linéaire nulle des $x_1, \ldots, x_n$ et en montrant que tous les coefficients sont nuls, c'est-à-dire:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Dans $\mathbb{R}^n$, on se ramène à un système linéaire homogène qu'on doit résoudre et avoir l'unique solution $0_{\mathbb{R}^n}$.

Famille liée: Il suffit de prouver l'existence des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non **tous nuls** tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$

En d'autre terme, il suffit d'écrire un des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ en fonction des autres vecteurs.

Exemples

Déterminons la nature des deux familles suivantes:

$$A = \{(1,0,1),(0,0,1),(1,1,1)\} \quad \text{et} \quad B = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}$$

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,0,1) + y(0,0,1) + z(1,1,1) = (0,0,0)$. Alors,

$$\begin{cases} x + z & = 0 \\ z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $x = y = z = 0$. Par suite, A est libre.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(2,1,1) = (0,0,0)$. Alors,

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $x = y = -z$. Donc, B n'est pas libre. En effet, pour $x = y = 1$ et $z = -1$, on a

$$(1,0,1) + (1,1,0) + (-1)(2,1,1) = (0,0,0).$$

On a pu remarquer dès le début que $(2,1,1) = (1,0,1) + (1,1,0)$ et déduire directement que cette famille est liée.

Base d'un espace vectoriel

Définition

• On dit qu'une famille finie de vecteurs est une base de E si elle est libre et engendre E.
• Si E est muni d'un produit scalaire $(. \mid .)$, une base de E est dite orthogonale si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
• De plus, si tous les vecteurs de la base sont unitaires, la base est ainsi dite orthonormale.

Remarque: De la définition ci-dessus, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille libre de E, alors c'est une base de $Vect(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Proposition

Une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur x de E s'exprime de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$.
C'est-à-dire,

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad \text{est une base de} \quad E$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in E, \exists! \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}; \quad x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Remarques:

1. Les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dans la proposition précédente sont appelés composantes ou coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Dans une base, tout vecteur est entièrement déterminé par ses composantes.
2. Si la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est orthonormale, alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
(x \mid e_i) &= (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \mid e_i) \\
&= \lambda_1 (e_1 \mid e_i) + \cdots + \lambda_i (e_i \mid e_i) + \ldots \lambda_n (e_n \mid e_i) \\
&= \lambda_i (e_i \mid e_i) \\
&= \lambda_i .
\end{aligned}$$

Exemples

1. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0);\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0);\ \ldots\ ;\ e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

   La famille $\mathcal{B}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, dite la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathcal{B}_2 = ((1, 0); (0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{B}_3 = ((1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. La famille $((1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (qu'est différente de la base canonique $\mathcal{B}_2$). Elle n'est pas orthogonale.
5. Soit n un entier naturel. La famille des polynômes $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (dite base canonique).

Définition

1. Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.
2. Un espace euclidien est un espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Théorème: Théorème de la base incompléte (Admis)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
2. Toute famille génératrice de E contient une base de E.

Du théorème précédent, on déduit le corollaire suivant:

Corollaire

Tout espace vectoriel E de dimension finie et non réduit au vecteur nul admet une base. En fait, de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Théorème (Admis)

Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, toute famille de vecteurs $(x_1, ..., x_k)$ dont le nombre des éléments k est supérieur strictement à n est liée.

Corollaire

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_k)$ sont deux bases de E, alors $k = n$.

Démonstration

Du théorème précédent, nous déduisons que $k \leq n$ ainsi que $n \leq k$, par échange de rôle de deux bases. Il s'ensuit que $k = n$.

Dimension d'un espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de E le nombre de vecteurs d'une base quelconque $\mathfrak{B}$ de E notée
$\dim E = Card(\mathfrak{B})$.
Si E se réduit au seul vecteur nul, on dit que sa dimension est nulle:
$\dim\{0_E\} = 0$.

Exemples

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n \quad \text{et} \quad \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1.$
2. Le sous-espace vectoriel réel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et possède la base $((1, 0, 1); (0, 1, 2))$.
   Donc, $\dim F = 2$.

Caractérisations d'une base

Proposition: Caractérisations d'une base

Supposons que E soit de dimension finie non nulle n et $S = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. S est une base si et seulement si S est libre et $p = n$.
2. S est une base si et seulement si S est génératrice et $p = n$.

Démonstration

1. Une famille libre à n vecteurs qui ne serait pas une base se prolongerait en une base, d'après le théorème de la base incomplète, et la dimension de E serait alors supérieure à n.
2. D'une famille génératrice à n termes qui ne serait pas une base on pourrait extraire une base, d'après le théorème de la base incomplète, et la dimension de E serait alors inférieure à n.

Proposition

Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. En outre, $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Comment montrer qu'une famille est une base?

Pour prouver qu'une famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une base d'un sous espace vectoriel F, il y a deux façons de faire:

- Prouver que la famille est libre et génératrice;
- Prouver que tout vecteur de F est combinaison linéaire de façon unique des x_i.

La difficulté dans les deux démarches se situe au même endroit: c'est le caractère générateur (donc l'existence des coefficients, appelés coordonnées dans le cas d'une base), qui pose problème.
Si on connait d'avance que $\dim F = n$, on a le choix entre montrer que "la famille est libre à n éléments" ou " qu'elle est génératrice à n éléments".

Exemple

Montrons que la famille $A = \{(1,0,1),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

D'après les exemples précédents, A est libre. En plus, $\mathrm{Card} A = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc, A est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème: Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Espaces vectoriels supplémentaires

Définition: somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme $F+G$ est dite directe si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas la somme $F+G$ est notée $F \oplus G$.
Si $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont supplémentaires dans E.

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe.
2. Tout vecteur de $F+G$ se décompose **de manière unique** comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G $(\forall x \in F+G, \exists! a \in F, \exists! b \in G,$ tels que $x = a+b)$.

Exemple

1. $F = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}$
   - $F \cap G = \{(0,0)\}$.
   - $F + G = \mathbb{R}^2$ car $(x,y) = (x,0) + (0,y)$.
   - Conclusion: $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.
   - Autre méthode: la décomposition $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ est unique.
2. Gardons F et notons $G' = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que l'on a aussi $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$.
   - $F \cap G' = \{(0,0)\}$.
   - $F + G' = \mathbb{R}^2$ car $(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$.
3. Deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sous-espaces supplémentaires.

Théorème: Caractérisation de la supplémentarité en termes de bases

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E munis des bases $e = (e_1, ..., e_p)$ et $f = (f_1, ..., f_q)$, respectivement. On a équivalence entre :

1. $E = F \oplus G$
2. $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est une base de E.

Proposition: Existence d'une base orthonormale d'un espace Euclidien

Tout espace euclidien admet une base orthonormale.

Exemple

Cherchons une base orthonormale du sous-espace vectoriel $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
Il est facile de voir que $A = Vect\,(u = (1, 0, 1), v = (0, 1, 1))$. On peut vérifier que $\{u, v\}$ est libre mais elle n'est pas orthogonale. En effet,

$$(u \mid v) = 1.$$

Cherchons, $w = \alpha u + \beta v$ tel que $(u \mid w) = 0$, ce est équivalent à $\alpha(u \mid u) + \beta(u \mid v) = 0$. Or, $(u \mid u) = 2$ et $(u \mid v) = 1$. Ainsi, $2\alpha + \beta = 0$. Prenons, $\beta = 2$ et ainsi $\alpha = -1$. Donc, $w = -u + 2v = (-1, 2, 1)$. Par conséquent, (u, w) est une base orthogonale de A, mais pas normale. Pour finir, on prend $e_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{u}{\sqrt{2}}$ et $e_2 = \frac{w}{\|w\|} = \frac{w}{\sqrt{6}}$, et alors (e_1, e_2) est une base orthonormale de A.