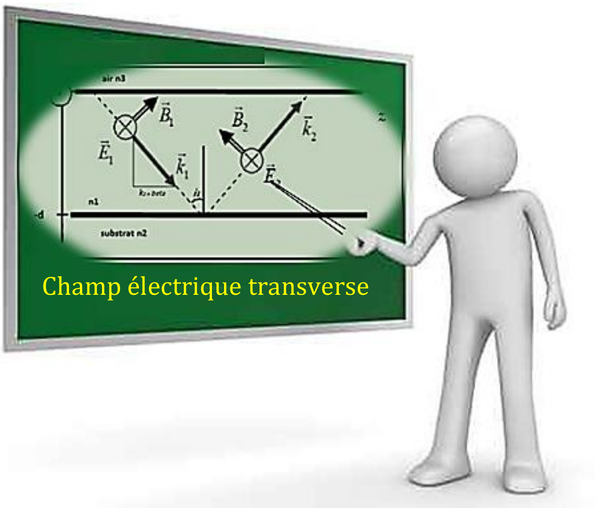
جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Guides d’Ondes Electromagnétiques
§
Fibres Optiques

SMP6



A. BOUZID

Année Universitaire : 2017 / 2018

AVANT PROPOS

Durant les trois dernières décennies, les télécommunications optiques connaissent un essor sans précédent. Ce progrès fulgurant est le fruit d'un grand effort de recherche et de développement dans le domaine de l'optique guidée, conduisant à l'amélioration des performances des fibres optiques.
En plus des fibres optiques, qui sont des guides de lumière cylindriques, toutes les structures susceptibles de guider la lumière, notamment en géométrie plane seront étudiées.
L'étude des propriétés de telles structures constitue le domaine de l'Optique Guidée. Ce domaine à d'importantes applications en télécommunication, en médecine et dans la fabrication de composants miniaturisés pour l'optronique.

Un autre domaine où la fibre optique a trouvé une application plus récemment est celui de la mesure. La fibre optique, comme tout objet, subit les influences de différents paramètres. Elle sera, entre autres, légèrement déformée lorsqu'elle est soumise à une pression, une force, une contrainte ou une variation de température. La déformation subite par la fibre optique aura une influence sur la façon dont la lumière s'y propage. Il est possible de mesurer ces modifications et de convertir cette mesure en unités de pression, de température ou de force, selon ce qu'on désire mesurer. Ces capteurs à fibre optique ou à guides d'ondes planaires ont l'avantage d'être très petits, très précis et insensibles aux perturbations électromagnétiques.

Il va de soi que ce cours ne couvre pas de façon complète les guides d'ondes et les fibres optiques. Ces thèmes forment en effet un domaine extrêmement vaste, qui reste en évolution constante en suscitant des recherches fondamentales et appliquées. Ce cours se veut simplement une introduction au sujet des fibres optiques ; il en présente les principes physiques fondamentaux et s'appuie sur des points essentiels d'optique électromagnétique, qui sont rappelés dans le troisième chapitre.

J'espère qu'ainsi, les étudiants de SMP6 disposeront d'un outil de travail approprié qui contribuera à la compréhension du cours magistral (en effet, le cours s'appuie sur ce polycopié qui joue en quelque sorte le rôle de conservatoire des connaissances auxquelles les étudiants peuvent se référer pour confirmer leur saisie de notes lors de leur révision de examen).

Consignes pour le bon déroulement de l'enseignement :

- Les trois derniers chapitres sont nouveaux pour vous, il faut savoir les mettre en œuvre. Les formules sur Bessel et Legendre ne sont pas à connaitre par cœur.
- Afin de pouvoir mieux suivre les TD et poser des questions sur les parties du cours correspondantes, Vous devez lire les chapitres du cours correspondant avec chaque TD,
- Vous devez aussi commencer à chercher les TD avant chaque séance.

CHAPITRE I

Généralités sur les phénomènes de propagation

1.1 Propagation des ondes

Lorsqu'une source émet un signal et crée une perturbation locale d'une grandeur physique, cette perturbation se transmet de proche en proche constituant ainsi une onde qui se propage dans le milieu environnant.

La source détermine la nature physique et temporelle de la perturbation, le milieu conditionne la propagation de l'onde.

La grandeur physique qui se propage peut être de nature vectorielle (le champ électrique par exemple) ou scalaire (pression sonore ou intensité d'un courant par exemple).

L'onde se propage avec une vitesse v sans qu'il y ait transport de matière entre la source et le point atteint par la perturbation. Pourtant une onde transporte de l'énergie: chaque point atteint par l'onde sert de relais entre le point précédent et le point suivant.

Dans le cas idéal, le signal, qui se propage, n'est ni atténué ni déformé par le milieu de propagation. Un point quelconque M, atteint par l'onde, va alors subir une perturbation identique à celle qu'engendre la source S à l'instant t mais retardé.

1.1.1 Définition

On dit qu'une grandeur s, fonction de l'abscisse et du temps, se propage sur un axe Ox si sa valeur en un point d'abscisse x_0 à l'instant t_o se retrouve en un point quelconque d'abscisse x à l'instant t avec un décalage dans le temps proportionnel à la différence des abscisses :

$t - t_0 = \frac{x-x_0}{v}$ Soit : $$s(x,t) = s(x_o, t_o) = s\left(x_o, t - \frac{x}{v} + \frac{x_o}{v}\right) \quad (1)$$

La quantité v qui a la dimension d'une vitesse s'appelle la vitesse de propagation.

Si x_o et t_o sont fixes, s est une fonction f de la variable composée $t - \frac{x}{v}$:

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

<u>Remarque</u>:

- La fonction $s(x,t)$ est telle que : $$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (2)$$

- Généralisation :

Une grandeur $\vec{s}$, fonction du temps et des coordonnées (x, y, z) d'un point dans l'espace, représente un phénomène de propagation, si elle satisfait à l'équation différentielle :

$$\Delta\vec{s} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial t^2}$$ où Δ est le Laplacien de la fonction $\vec{s}\,(\vec{r}, t)$.

- L'équation de propagation étant linéaire à la fonction $\vec{s}(\vec{r}, t)$, toute combinaison linéaire de solution est aussi une solution de l'équation.

:

1.1.2 Ondes planes

Une onde est plane s'il est possible de trouver des axes de coordonnées cartésiennes telles que $\vec{s}$ ne dépend que d'une seule coordonnée spatiale et du temps (x et t par exemple).
Dans ce cas $\vec{s}$ aura la même valeur à un instant donné quelconque en tous les points d'un plan perpendiculaire à l'axe des x. Un tel plan s'appelle un <u>plan d'onde.</u>

Dans ce cas, l'équation de propagation s'écrit : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

Pour résoudre cette équation, faisons le changement de variables suivant : $p = t - \frac{x}{v}, q = t + \frac{x}{v}$

On obtient : $$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s \partial q}{\partial q \partial x} = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial s}{\partial p} - \frac{\partial s}{\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial p} - \frac{\partial s}{\partial q}\right) = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} - \frac{2\partial^2 s}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2}\right)$$

de même on trouve : $$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} + \frac{2\partial^2 s}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2}$$

or $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ soit $\frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} = 0$

Par intégration par rapport à q puis par rapport à p, on trouve : $\frac{\partial s}{\partial p} = f_1(p)$

$s = f(p) + g(q)$ où f, g fonctions arbitraires d'une seule variable, deux fois dérivables.
Finalement, en revenant aux variables x et t :
$s = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ f et g sont appelées ondes planes progressives.

Remarque :

- $s = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ On reconnaît en f une onde se propageant dans le sens positif de l'axe des x, tandis que g est une onde même type se propageant en sens inverse.

- On peut, dans l'expression de s, éliminer le choix de l'axe des coordonnées : $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de la direction de propagation et $\vec{r}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$,

  $s = f\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}\right) + g\left(t + \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}\right)$

- Un cas particulier important d'ondes progressives est celui des ondes sinusoïdales où s est une fonction sinusoïdale :

$s = s_0 \cos\omega(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ où $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{u}$ est le vecteur d'onde de l'onde.

En introduisant la période temporelle $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et la longueur d'onde $\lambda = vT$, le module du vecteur d'onde devient : $k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{vt} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ est la phase spatio-temporelle de l'onde.

La fonction s a une double périodicité, dans le temps (période temporelle T) et dans l'espace (période spatiale λ).

- Revenons au cas général d'une onde plane progressive :
  si f est une fonction périodique elle est représentable par une série de Fourier :

$$f\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t - \vec{k}_n\vec{r}) \quad \text{où } \vec{k}_n = n.k.\vec{u} \qquad (3)$$

- **Ondes lumineuses :**

Les ondes lumineuses sont des ondes électromagnétiques, c'est-à-dire que les grandeurs qui se propagent sont un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique$\vec{H}$. Autrement dit, la grandeur $\vec{s}$ peut être identifiée à $\vec{E}$ ou à $\vec{H}$.

Les modules des vecteurs champ électrique et champ magnétique étant proportionnels, l'intensité lumineuse, qui dépend du carré du module du champ électrique et du carré du module du champ magnétique, pourra donc s'écrire en fonction de $E.E*$.

Comme les récepteurs sensibles à la lumière sont en fait sensibles au champ électrique, la vibration lumineuse sera identifiée au champ électrique pour toute l'étude de l'optique physique.

1.2 Surface d'onde

Il existe en général autour d'un point M des points possédant le même état vibratoire. Aux mêmes instants, l'ensemble de ces points définit une surface appelée surface d'onde ou front d'onde. En tous ces points, la phase φ garde une valeur constante : $\varphi(M) = cte$.

Remarque:

- La nature d'une onde est déterminée par la forme de ses surfaces d'ondes.
- Une onde plane peut être considérée comme la limite d'une onde sphérique lorsque la source (ponctuelle) des vibrations est très éloignée du point considéré.
- Des ondes planes sont des ondes pour lesquelles les vecteurs champ électrique et champ magnétique conservent chacun la même valeur et la même direction en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation Δ. On montre que dans ce cas les vecteurs champ électrique et champ magnétique sont perpendiculaires à Δ.

1.3 Superposition d'ondes

1.3.1 Somme de deux ondes progressives de même pulsation

Soient deux ondes lumineuses 1 et 2 de même fréquence qui se superposent en un point M. Ecrivons les champs électriques (en représentation complexe) des ondes 1 et 2 au point M :

$$\overrightarrow{E_1} = a_1 expj(\omega t - \varphi_1)\vec{e}_x$$
$$\overrightarrow{E_2} = a_2 expj(\omega t - \varphi_2)\vec{e}_x$$

Le champ électrique résultant au point M est :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \hat{a} exp(j\omega t).\vec{e}_x$$

où $\hat{a} = aexpj\varphi = a_1 expj(\varphi_1) + a_2 expj(\varphi_2)$

L'éclairement au point M est proportionnel au carré du module de l'amplitude:

$$I = \gamma|\hat{a}|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}cos\varphi$$

1.3.2 Phénomène des battements

La superposition de deux ondes sinusoïdales de fréquences très voisines ω_1 et ω_2 donne un signal quasi sinusoïdal dont la fréquence est la moyenne des deux fréquences et dont l'amplitude est modulée dans le temps à la fréquence : $\omega_{batt} = |\omega_2 - \omega_1|$.
C'est le phénomène des battements qui s'observe avec des signaux physiques de toutes natures.
En effet :

Supposons pour simplifier que les deux ondes ont même amplitude réelle ($a_1 = a_2 = a$).

En notation complexe la superposition des deux signaux est alors donnée par :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \to a.e^{j(\omega_1 t - \varphi_1)} + a.e^{j(\omega_2 t - \varphi_2)}$$

Soient : $$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad et \quad 2\omega = \omega_2 + \omega_1$$
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad et \quad 2\varphi = \varphi_2 + \varphi_1$$

En termes de ces paramètres, nous avons :

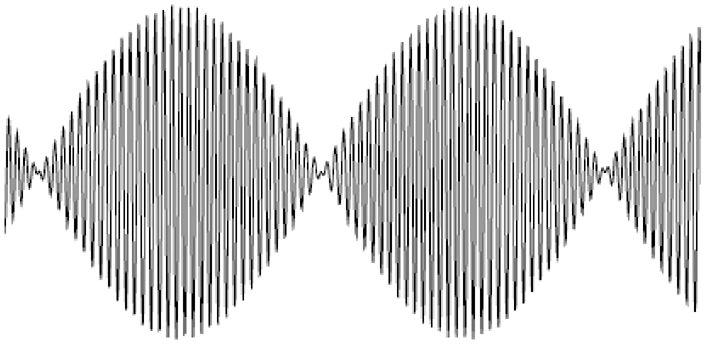
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \to a.e^{j(\omega t - \varphi)}\left[e^{j(\frac{\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2})} + e^{j(\frac{\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2})}\right]$$

L'onde réelle est alors simplement donnée par :

$$s(t) = 2a\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2})\cos(\omega t - \varphi) \qquad (4)$$

avec $\Delta\omega \ll \omega$

Dans cette limite, la période $2\pi/|\Delta\omega|$ associée au premier terme est beaucoup plus grande que la période moyenne $2\pi/\omega$, qui apparaît dans le second cosinus.



On peut considérer que nous avons un signal périodique de pulsation ω, dont l'amplitude varie lentement avec le temps.
Cette variation constitue l'enveloppe du signal. La largeur temporelle d'un lobe de l'enveloppe est donnée par la demi-période de $a(t)$, soit $\pi/|\Delta\omega|$.

1.3.3 Dispersion, vitesse de groupe

Les ondes progressives de forme arbitraire et qui vérifient l'équation de d'Alembert $(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2})$ se propagent à la vitesse v sans se déformer. Pour les ondes sinusoïdales, cette vitesse est appelée vitesse de phase et elle est donnée par la relation : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$. Cette vitesse dépend de la fréquence: on dit qu'il y a **dispersion**.

En général, la propagation d'une onde dans un milieu se fait souvent avec déformation de l'onde. En effet, Chacun des facteurs de l'équation (4) a la forme d'une onde progressive $f(x - ct)$ mais leurs vitesses ne sont pas les mêmes s'il y a de la dispersion. Le facteur $\cos(\omega t - kx)$ se propage à la vitesse de phase v_φ . Le facteur $2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ se propage à la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ (lorsque $\Delta\omega \to 0$). La vitesse de groupe est également celle avec laquelle se propage l'énergie. Si on connaît la relation de dispersion, c'est-à-dire l'équation qui relie ω et k, on peut calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

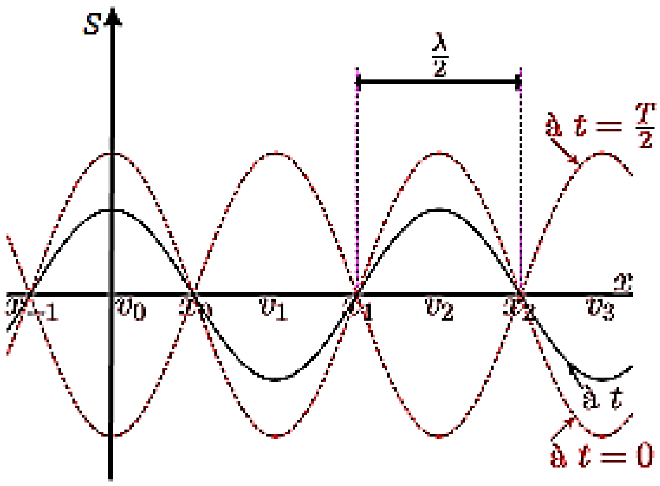
1.3.4 Ondes stationnaires

Une onde est stationnaire lorsque le signal réel $\vec{s}(x,t) = f(\vec{r})g(t)$ est le produit d'une fonction spatiale $f(\vec{r})$ et d'une fonction temporelle $g(t)$.
Le mot réel est souligné parce que l'onde $\tilde{s}(x,t) = \hat{a}.exp - jkx.expj\omega t$ est un tel produit, mais n'est pas stationnaire.

<u>Remarque</u>:

- On peut obtenir une onde stationnaire de forme plus générale
$$s(x,t) = 2acos[k(x - x_0)]cos[\omega(t - t_0)]$$
avec un ventre en un point x_0 arbitraire, en superposant les ondes
$s_1(x,t) = acos(\omega t - kx + \varphi_1)$ et $s_2(x,t) = acos(\omega t + kx + \varphi_2)$
avec $\varphi_1 = kx_0 - \omega t_0$ et $\varphi_2 = -kx_0 - \omega t_0$

- Une onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives harmoniques de même amplitude et de sens de propagation opposés. Inversement, une onde progressive harmonique est la superposition de deux ondes stationnaires de même amplitude. Par exemple $acos(\omega t - kx) = acos(\omega t)cos(kx) + asin(\omega t)sin(kx)$.



CHAPITRE II

Polarisation des ondes électromagnétiques dans le vide

Les ondes électromagnétiques sont caractérisées par deux grandeurs vectorielles : leur champ électrique $\vec{E}$et son champ magnétique $\vec{B}$. Nous considérons des ondes planes progressives sinusoïdales se propageant en ligne droite. L'axe de propagation sera l'axe Oz. Dans ces conditions, on sait que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont contenus dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz, à savoir le plan Oxy.

Par ailleurs, il existe des dispositifs permettant précisément d'identifier une direction de vibration (dans le plan orthogonal à la direction de propagation) : ces dispositifs sont des analyseurs directionnels.
On constate ainsi que la vibration d'un champ électromagnétique et sa propagation peuvent se présenter sous différentes formes : vibration non-polarisée ou vibration polarisée.

2.1 Etats de polarisation

2.1.1 Définition

Les phénomènes de polarisation sont les phénomènes liés au caractère vectoriel des deux caractéristiques de l'onde lumineuse à savoir le champ électrique $\vec{E}$ et son champ magnétique $\vec{B}$. Les évolutions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant liées au cours du temps, il suffit de d´écrire le comportement du champ électrique $\vec{E}$. C'est pourquoi, par la suite, toute l'attention est portée sur le champ électrique.

On appelle plan de polarisation de l'onde, le plan formé par le vecteur d'onde $\vec{k}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

2.1.2 Perception d'un état de polarisation

Pour percevoir un état de polarisation de l'onde, il faut placer son œil sur la direction de propagation de l'onde, face à l'onde. On observe alors l'évolution au cours du temps du champ électrique $\vec{E}$ dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation.

2.1.3 Polarisation rectiligne

Le champ électrique conserve une direction fixe au cours du temps dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}$ qui marque la direction de propagation. Dans ce cas, l'expression du champ électrique de l'onde est de la forme :

$$\vec{E} = E_0 cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$$

Dans un cas le plus général de l'onde polarisée rectilignement où le champ électrique occupe de façon permanente, une direction fixe quelconque dans le plan Oxy, la forme mathématique du champ électrique est :

$$\vec{E} = E_{0x}cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + E_{0y}cos(\omega t - kz)\vec{e}_y \qquad (1)$$

2.1.4 Onde non polarisée

Lorsque le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde observée possède une direction qui évolue de façon complétement aléatoire au cours du temps, toujours dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, on dit que l'onde n'est pas polarisée.

Ce cas de figure correspond au modèle de polarisation adopté pour l'onde naturelle (la lumière solaire avant qu'elle ne soit diffusée par l'atmosphère n'est pas polarisée). Après sa diffusion, elle l'est partiellement. La lumière émise par une lampe classique à incandescence n'est pas non plus polarisée. Pour les lasers, on peut rencontrer plusieurs cas de figure : polarisée, polarisée de façon partielle ou encore non polarisée. Pour comprendre la notion de polarisation partielle, on peut se contenter de dire que le champ électrique de l'onde résulte de deux contributions comme par exemple celle d'un champ $\vec{E}_1$ dont la direction est fixe (polarisation rectiligne) et celle d'un champ $\vec{E}_2$ dont la direction est complètement aléatoire.

2.1.5 Polarisation elliptique

Dans ce cas, la direction du champ électrique évolue en permanence au cours du temps. Pour autant, le comportement du champ électrique n'est pas quelconque. Si on fixe son origine, au point O du plan Oxy, on constate que son extrémité décrit une ellipse dans ce même plan.
La forme mathématique de l'onde polarisée elliptiquement est :

$$\vec{E} = E_{0x}cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + E_{0y}cos(\omega t - kz - \varphi)\vec{e}_y$$

On parle de polarisation elliptique droite (gauche) si l'ellipse est décrite au cours du temps dans le sens des aiguilles d'une montre (sens inverse des aiguilles d'une montre).
En effet ;
Si φ est quelconque, et en nous plaçant en $z = 0$, nous avons :

$$\vec{E} = E_{0x}cos\omega t\vec{e}_x + E_{0y}cos(\omega t - \varphi)\vec{e}_y$$

$$E_x = E_{0x}cos\omega t \text{ et } E_y = E_{0y}cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = cos\omega t \;\; et \;\; \frac{E_y}{E_{0y}} = cos(\omega t - \varphi) = cos\omega t.cos\varphi + sin\omega t.sin\varphi$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}}.cos\varphi + \sqrt{1 - cos^2\omega t}\,.sin\varphi$$

$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}.cos\varphi\right]^2 = (1 - cos^2\omega t)sin^2\varphi$$

$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}.cos\varphi\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}cos\varphi = sin^2\varphi \qquad (2)$$

L'extrémité du champ $\vec{E}$ décrit donc une ellipse et nous parlons dès lors naturellement de "polarisation elliptique".

Suivant la valeur de φ, cette ellipse peut être parcourue dans un sens ou dans l'autre. Pour déterminer ce sens, dérivons l'expression du champ et plaçons nous à $t = 0$ toujours dans le même plan d'onde en $z = 0$

$$d_t\vec{E} = \frac{d}{dt}\begin{cases} E_{0x}cos\omega t \\ E_{0y}cos(\omega t - kz - \varphi) \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -\omega E_{0x}sin\omega t \\ -E_{0y}sin(\omega t - kz - \varphi) \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \omega E_{0y}sin(\varphi) \\ 0 \end{cases} \quad (3)$$

Si $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ l'ellipse est parcourue dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre). Nous disons alors que la polarisation est "elliptique gauche".
Si $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ l'ellipse est parcourue dans le sens horaire (sens des aiguilles d'une montre). Nous disons alors que la polarisation est "elliptique gauche ".

<u>Remarque</u> :

- si l'un des champs $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ se propage, l'autre aussi, et avec les mêmes caractéristiques de propagation : vitesse, direction et sens,
- si l'un est polarisé, l'autre aussi et dans une direction telle que le trièdre ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$) est direct,
- la valeur de la norme de l'un des champs impose l'autre,
- plus généralement, il n'y a pas d'action sur l'un qui ne soit en même temps action sur l'autre.

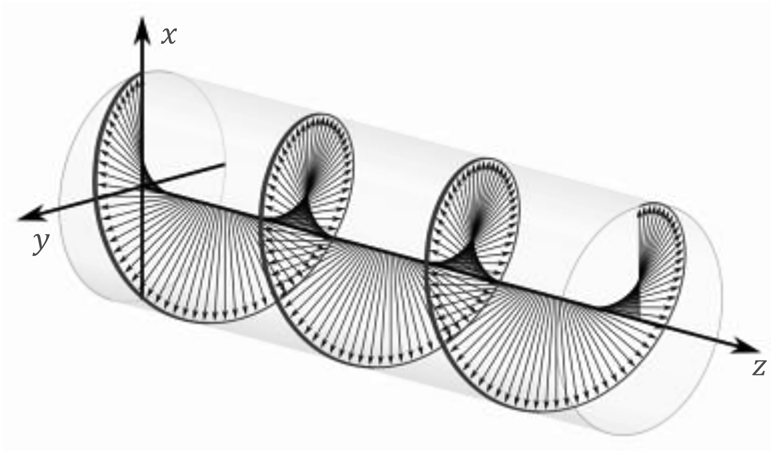
Cette raison de structure s'exprime par le terme de champ "électromagnétique" en un seul mot... puisqu'il s'agit en fait d'un seul champ trièdre ($\vec{E}$, $\vec{B}$).

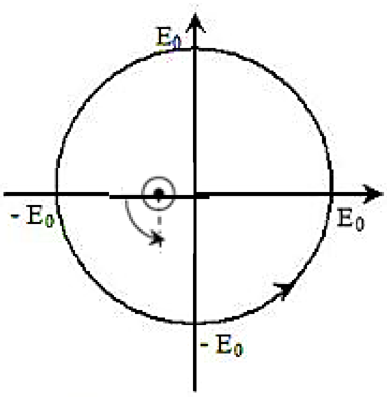
2.1.6 Polarisation circulaire

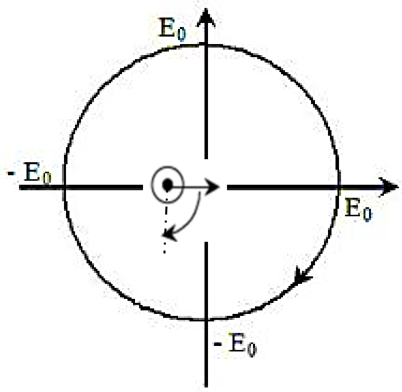
C'est un cas particulier de la polarisation elliptique, obtenu quand :

$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$

De même que la polarisation elliptique, la polarisation circulaire peut être droite ou gauche suivant le sens de parcours du cercle







$$\begin{cases} E_x = E_0 cos\omega t \\ E_y = E_0 sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = E_0 cos\omega t \\ E_y = -E_0 sin\omega t \end{cases}$$

Polarisation circulaire gauche :

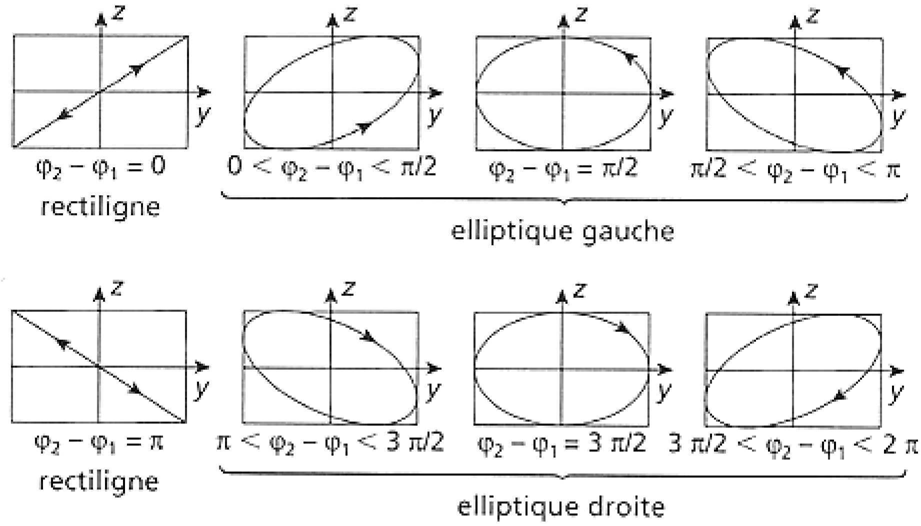
$$\vec{E} = E_0 cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + E_0 sin(\omega t - kz)\vec{e}_y \qquad (4)$$

Polarisation circulaire droite :

$$\vec{E} = E_0 cos(\omega t - kz)\vec{e}_x - E_0 sin(\omega t - kz)\vec{e}_y \qquad (5)$$

2.1.7 Conclusion

Le schéma de la figure ci-dessous présente l'ensemble des situations de polarisations possibles.
La polarisation linéaire : $\varphi = 0 \; ou \; \varphi = \pi$
La polarisation elliptique : $0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \;\; ou \;\; \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$
La polarisation circulaire : $\varphi = \frac{\pi}{2} \; ou \; \varphi = \frac{3\pi}{2}$



2.2. Biréfringence

2.2.1. Définition de la biréfringence

La biréfringence est une propriété de certains cristaux transparents anisotropes qui ont la propriété de décomposer la lumière en deux rayons de polarisation croisée. Cette double réfraction est due au fait qu'il existe dans le cristal une direction particulière (axe de biréfringence) où l'indice n_e dit indice extraordinaire est différent de l'indice dans les directions perpendiculaires n_o dit indice ordinaire. Le rayon extraordinaire est polarisé dans le plan contenant l'axe de biréfringence et le rayon ordinaire perpendiculairement à l'axe. Remarque : n_e et n_0 dépendent de la longueur d'onde λ de la lumière

2.2.2. Lames polarisantes

Ce sont des lames minces à faces parallèles taillées dans un cristal biréfringent de manière que l'axe de biréfringence soit parallèle aux faces. Ces lames sont utilisées en incidence normale, ainsi les deux rayons ordinaire et extraordinaire sont confondus (ils ne sont pas déviés). les deux rayons ne voient pas le même indice donc ils ne se déplacent pas à la même vitesse, l'un va à $\frac{c}{n_o}$, l'autre à $\frac{c}{n_e}$, ce qui fait qu'ils se retrouvent déphasés à la sortie.

Si l'épaisseur de la lame est L, le retard de l'un sur l'autre est $\Delta t = \frac{L}{c}(\, n_0 - n_e)$ le déphasage est donc $\varphi = \frac{2\pi L}{\lambda}(\, n_0 - n_e)$ (6)

2.3. Production de lumière polarisée

2.3.1. Production de lumière polarisée rectilignement

a - Polarisation par réflexion

Si un miroir (M) d'indice n reçoit un faisceau de lumière naturelle sous une incidence i_B (dite de Brewster) telle que $tgi_B = n$, la lumière réfléchie est polarisée rectilignement et son vecteur champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence.

b - Polarisation par transmission

Les polariseurs par transmission sont des systèmes optiques qui permettent de sélectionner dans la lumière naturelle de la lumière polarisée rectilignement. Ils sont donc caractérisés par une direction privilégiée du vecteur de polarisation $\vec{E}$.

Ils se présentent sous la forme de lames à faces parallèles et utilisent :

• soit la propriété de biréfringence

• soit la propriété de dichroïsme de certains cristaux.

Nous considérerons toujours des faisceaux lumineux perpendiculaires aux faces des polariseurs.

2.3.2. Production de lumière elliptique ou circulaire

Pour produire de la lumière elliptique, nous utiliserons des lames biréfringentes. Une lame biréfringente est une lame à faces parallèles taillée dans un milieu n'ayant pas les mêmes propriétés optiques selon toutes les directions et caractérisée par deux axes orthogonaux $OX \ et \ OY$ parallèles aux faces de la lame. Nous utiliserons toujours des faisceaux lumineux perpendiculaires aux faces de la lame ; le plan d'onde du faisceau lumineux sera confondu avec les faces de la lame. Soit $\vec{E} = \overrightarrow{E_0} \, cos \, \omega t$ le champ électrique d'une onde : il est parallèle au plan XOY et fait un angle α avec l'axe .

Décomposons $\vec{E}$ suivant $OX \ et \ OY$:

$$\begin{cases} X = E \cos \alpha = E_0 \cos \omega t \ \cos \alpha \\ Y = E \, sin \, \alpha = E_0 \, cos \, \omega t \ \, sin \, \alpha \end{cases} \qquad (7)$$

La propriété de biréfringence se traduit par le fait que les composantes $X \ et \ Y$ de $\vec{E}$ se propagent à des vitesses différentes dans la lame.

Soit V_x la vitesse suivant OX et V_y la vitesse suivant OY. La vibration X voit un indice $n_x = {}^{c}/_{V_x}$ et la vibration Y un indice $n_y = {}^{c}/_{V_y}$.

A la sortie de la lame, les deux composantes présentent un déphasage φ. Elles s'écrivent par exemple

$$\begin{cases} X_1 = Eo \cos \alpha \cos \omega t \\ Y_1 = Eo \sin \alpha \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \qquad (8)$$

C'est l'équation d'une ellipse quelconque.

Dans ce cas, Y_1 présente un retard de phase par rapport à X_1.La composante Y de $\vec{E}$ se propage plus lentement que la composante X. Par conséquent, l'axe OX est appelé l'axe rapide et OY axe lent

En conclusion, si φ est quelconque, la vibration rectiligne est transformée en vibration elliptique par la lame biréfringente.

2.3.3. Cas particulier important de lames

- $\varphi = 2k\pi$: lame onde, le champ $\vec{E}$ ressort inchangé de la lame
- $\varphi = (2k+1)\pi$: lame demi-onde
- La vibration $\vec{E}$ émergente est symétrique de l'onde incidente par rapport aux lignes neutres de la lame.
- Une lame biréfringente particulière pour laquelle le déphasage est $\varphi = \pi/2$ est appelée lame quart d'onde. La différence de marche entre les deux composantes X et Y de $\vec{E}$ vaut un quart de longueur d'onde.
- De même, une lame demi onde crée un déphasage $\varphi = \pi$ et une différence de marche $\delta = \lambda/2$.

2.4. Interférences en lumière polarisée

A la sortie des lames biréfringentes, l'intensité de la lumière est uniforme comme on peut aisément s'en persuader en considérant le module du champ électrique dont les composantes sont données par la relation (8). Pour faire apparaitre sur l'intensité les effets d'interférence liée au déphasage, un analyseur, qui va "mélanger" les deux composantes du champ, doit être placé à la sortie de la lame.

2.4.1 Conditions d'observation

On observe les interférences entre les rayons ordinaire et extraordinaire. Pour qu'ils interfèrent, il faut :

- qu'ils se recouvrent dans certaines régions de l'espace, ce qui implique que la lame ne soit pas trop épaisse

- que leurs polarisations respectives ne soient pas orthogonales. C'est pourtant le cas des vibrations ordinaire et extraordinaire. Ainsi, il va falloir les " recombiner" sur un analyseur en sortie de lame.

Autrement dit, pour observer des interférences avec des lames biréfringentes, on se placera donc toujours entre polariseur et analyseur.

CHAPITRE III

Propagation libre des ondes électromagnétiques

3.1. Introduction

L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ou dans le milieu diélectrique parfait (homogène et isotrope) servira d'introduction à l'étude générale des phénomènes de propagation.

Le fait d'obtenir l'équation de propagation comme conséquence des équations de Maxwell est intéressant à souligner, car le domaine de la validité des équations de Maxwell s'étend lui-même à une très grande variété d'ondes : radio, télé, radar... et dans des domaines de radiations eux-mêmes très variés : infra-rouge, visible, Ultra-violet, rayons X, Gamma, etc...

On verra que cette étude de la propagation des ondes électromagnétiques permet en particulier de réinterpréter les lois de l'optique géométrique, relatives aux phénomènes de réflexion, réfraction, et qu'elle trouve un champ d'application important dans le cadre du modèle de l'optique ondulatoire.

Par contre, les limites théoriques de cette étude sont celles de la validité du modèle spécifique utilisé. Un ensemble de phénomènes échappent en effet à une interprétation par l'électromagnétisme classique : phénomènes d'émission, ou d'absorption effet photo-électrique, création-annihilation de particules lors des interactions matière-rayonnement...

On se limitera donc ici à l'optique électromagnétique déductible des équations de Maxwell.

La démarche sera la suivante :

- Etablissement des équations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à partir des équations de Maxwell,
- Etude de la structure de l'onde électromagnétique dans le cas important d'une onde plane,
- Jonction des modèles : les lois de l’optique géométrique seront obtenues comme solution de l'équation de propagation lors de la traversée de la surface de séparation de 2 milieux.
- Modélisation par l’optique ondulatoire d’un guide d’onde plan.
- Modélisation par l’optique ondulatoire d’un guide d’onde circulaire (fibre optique).
- Guidage faible et ses applications
- Couplage de modes

3.2. Historique

L'électromagnétisme a été fondé par le théoricien Maxwell qui formula ses équations vers 1860 (Traité sur l'électricité et le magnétisme de 1873). Ce n'est que vingt ans plus tard (1888) que Hertz pu produire et détecter des ondes électromagnétiques à une fréquence de l'ordre de 1GHz. En 1890, Marconi montra expérimentalement qu'on pouvait faire voyager ces ondes en espace libre entre des points éloignés. Sept ans plus tard (1897), Rayleigh démontra théoriquement qu'on pouvait guider ces ondes dans des tubes métalliques creux appelés maintenant guide d'onde.

Les télécommunications modernes sont nées au début du XX^{e} siècle, soit seulement quelques années après, suites aux travaux de Kennelly et Heavyside qui découvrirent que ces ondes pouvaient se réfléchir sur certaines couches de l'ionosphère. Dès 1907, des tubes électroniques sources inventés par Lee de Forest furent utilisés pendant environ 50 ans.

Le système radar (Radio Detection and Ranging) vit le jour dans les années trente par la mise au point d'un nouveau type de source tube micro-onde : le magnétron et d'un nouveau type d'antenne micro-onde, le réflecteur paraboloïdal. Les bases théoriques et pratiques furent particulièrement développées pendant la seconde guerre mondiale .

A titre de comparaison rappelons quelques grandes dates propres au rayonnement optique: Les lois de la réflexion étaient connues des Grecs ; les lois de la réfraction furent découvertes par Ibn El-Haytem vers 998, puis retrouvées par Snell en 1621, puis par Descartes en 1637; elles permettent de déterminer le rayon réfracté lorsque la lumière traverse un dioptre (lois de la réfraction) ou le rayon réfléchi sur un miroir (lois de la réflexion). Les lois de propagation des ondes lumineuses ont étés établies par Maxwell à partir de 1865 mais elles ne furent pas immédiatement étendues aux rayons-X découverts par Röntgen en 1895. Il s'en suivit les premières mesures de diffraction-X par des cristaux effectuées par Max Laue vers 1912 et réalisée par Rudolf et Knipping.

3.3. Quelques applications notables

Télécommunications terrestres et Transmission en espace libre.

- Radionavigation.
- Médecine (endoscopie, chirurgie, radiométrie, etc.)
- Radioastronomie (antennes paraboliques de 100m de diamètre).
- Accélérateurs de particules, capteurs (température, pression, etc.)
- Industrie et recherche en science des matériaux : Polymérisation de plastiques, Spectroscopies diélectriques.
- Les fibres optiques, grâce aux performances qu'elles offrent, sont de plus en plus utilisées dans les réseaux de télécommunications. Avec l'essor d'Internet et des échanges numériques, leur utilisation se généralise petit à petit jusqu'à venir chez le particulier. Elles sont particulièrement appréciées par les militaires pour leur insensibilité aux IEM (Interférences électromagnétiques) mais aussi pour leur légèreté.

3.4. Propagation

3.4.1. Equations de Maxwell

a. Rappel

Les équations de Maxwell fournissent des relations entre les variations des grandeurs électromagnétiques $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B})$en tout point $M(x, y, z)$ de l'espace.

Les variations en fonction du temps s'expriment par la dérivée partielle par rapport au temps, les variations en fonction des coordonnées d'espace s'expriment par l'intermédiaire des opérateurs différentiels : rotationnel et divergence.

Ces relations sont locales : elles relient les variations au point $M(x, y, z)$ des grandeurs électromagnétiques à chaque instant.

Dans ce qui suit, on ne traite pas le cas général des milieux matériels réels, mais simplement le cas des milieux homogènes et isotropes : dans ce cas, l'excitation magnétique $\vec{B}$ est un vecteur proportionnel à l'induction magnétique $\vec{H}$, et l'induction électrique $\vec{D}$ est proportionnelle au champ électrique $\vec{E}$.

b. Equations de propagation

On étudie la propagation (dans un milieu homogène et isotrope) d'une onde électromagnétique, mais en se limitant aux régions de l'espace où :

- la densité volumique de charge est nulle : $\rho = 0$
- le vecteur densité de courant est nul : $\vec{j} = \vec{0}$

Nous obtenons les expressions suivantes qui se simplifient :

$$\begin{cases} div\vec{E} = 0 & div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t} & \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \varepsilon\mu\dfrac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t} \end{cases} \qquad (1)$$

Par combinaison des équations de Maxwell on obtient deux équations du second ordre auxquelles satisfont les champs $\vec{E}\ et\ \vec{B}$.

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta\vec{B} = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (2)$$

c. Equations de propagation des composantes

Les équations de propagation (2) se résolvent par projection. On obtient respectivement :

$$\begin{cases} \Delta E_x = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \Delta E_y = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \Delta E_z = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta B_x = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\ \Delta B_y = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \Delta B_z = \varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (3)$$

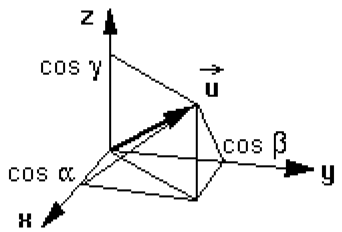
Chacune de ces équations admet comme solutions des fonctions de la variable :

$$\phi = \vec{u}\,\vec{r} \pm v.t$$

Démonstration

Soient x , y , z , les composantes du vecteur position et α, β, γ les cosinus directeurs du vecteur unitaire $\vec{u}$.

On obtient : $\vec{u}.\vec{r} \;=\; x.cos\ \alpha\ + y.cos\ \beta + z.cos\gamma$



On en tire, par exemple pour l'équation relative à la composante E_x du champ $\vec{E}$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial \emptyset}\left[\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right] = \frac{\partial E_x}{\partial \emptyset} cos\alpha$$

d'où l'on déduit la relation entre opérateurs de dérivation : $\frac{\partial}{\partial x} = cos\alpha.\frac{\partial}{\partial \emptyset}$

Sachant que le vecteur $\vec{u}$ *e*st unitaire, la relation : $cos^2\ \alpha\ + cos^2\ \beta + cos^2\gamma = 1$ permet alors d'obtenir l'expression du Laplacien de la composante E_x du champ $\vec{E}$:

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial \phi^2}.[\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)] = \frac{\partial^2 E_x}{\partial \phi^2}$$

On montre de même la relation suivante : $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2}{\partial \emptyset^2}$

L'équation du Laplacien de la composante sur x donne alors :

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial \emptyset^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \varepsilon\mu v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial \emptyset^2} \qquad (4)$$

Cette équation est évidemment satisfaite à la condition que : $\varepsilon\mu v^2 = 1$

La solution de l'équation de propagation en projection sur x (concernant la composante sur x du champ électrique) est donc bien de la forme :

$E_x(\emptyset) = E_x(\vec{u}\vec{r} \pm v.t)$, expression dans laquelle le vecteur unitaire $\vec{u}$ est quelconque, et le coefficient v est parfaitement déterminé :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

On procèderait de même pour les autres composantes de $\vec{E}$ et pour les composantes de $\vec{B}$.

d. Analyses d'une propagation

-La linéarité des équations de propagations appelle un commentaire : l'ensemble des solutions possède une structure d'Espace Vectoriel.

- La propagation dans le cas général ne se réduit pas au cas très particulier (évoqué jusqu'ici) de la propagation par translation. Ce cas très particulier est celui où la propagation laisse le signal qui se propage invariant par translation.

- Compte tenu de la linéarité, rien n'exclut la possibilité théorique d'une solution représentée par une combinaison linéaire de solutions se propageant à des vitesses de translation différentes. On comprend bien qu'une telle combinaison n'est plus invariante par translation : dans ce cas, le signal "se déforme" pendant sa propagation. Ce cas (que l'on nomme dispersion) sera étudié dans un chapitre suivant.

- En particulier, la propagation d'un vecteur (ici le champ électromagnétique) étant représentée par la propagation de ses composantes, on peut donc également imaginer la possibilité théorique que dans certains milieux matériels, les composantes du champ (selon des axes particuliers du milieu considéré) ne se propagent pas à la même vitesse (que l'on nomme biréfringence).

3.4.2 Structure de l'onde plane

a. Propriété caractéristique d'une onde plane

Reprenons l'expression de la propagation selon la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ par une fonction, de la variable $(\vec{u}.\vec{r} \pm v.t)$, on constate que dans tout le plan orthogonal au vecteur $\vec{u}$, la valeur de $\emptyset$ est indépendante du point dans le plan. Un tel plan est appelé Plan d'Onde, et une telle onde est appelée Onde Plane.

Réciproquement, si une onde est plane, il existe une famille de plans (P) parallèles entre eux (donc orthogonaux à une direction fixe $\vec{u}$), dans lesquels le champ qui se propage reste indépendant du point considéré.

D'après la forme des solutions trouvées pour la propagation des composantes de $\vec{E}$:

- E_x est constant dans un plan orthogonal à sa direction de $\vec{u}$ propagation,
- E_y est constant dans un plan orthogonal à sa direction $\vec{u}'$ de propagation,
- E_z est constant dans un plan orthogonal à sa direction $\overrightarrow{u''}$ de propagation.

Le champ vectoriel ne peut être constant dans un plan (P) que si, dans ce plan, ses composantes sont également constantes : les trois directions $\vec{u}\,,\vec{u}'$, et $\overrightarrow{u''}$ sont donc identiques, et confondues avec le vecteur unitaire $\vec{U}$ orthogonal à (P), $\vec{U}$ vecteur unitaire de la direction de propagation de cette onde plane.

b. Composante du champ sur la direction de propagation

Choisissons arbitrairement la position du repère de référence de sorte que, par exemple, la propagation de l'onde plane soit décrite par la seule variable z.

Le vecteur unitaire $\vec{U}$ dans le sens de la propagation est alors le vecteur unitaire $\vec{k}$ du repère orthonormé ($\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}$) et tout plan $(x\,;\ y)$ est un plan d'onde.

N.B : Dans ce cas, ne pas confondre le vecteur unitaire $\vec{k}$ et le vecteur d'onde $\vec{K}$.

Si on considère la propagation d'un champ électromagnétique en dehors des charges et des courants (selon l'hypothèse déjà faite), on a d'après les relations de Maxwell :

$$div\vec{E} = 0 \quad ou \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$div\vec{B} = 0 \quad ou \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Dans ces conditions, aucune des composantes du champ électromagnétique n'est fonction de la variable z. Donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

c. Positions relatives des champs pour une onde plane

Les relations entre le champ électrique et le champ magnétique lors de la propagation d'une onde électromagnétique plane vont se déduire des équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \varepsilon.\mu.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En appelant $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans le sens de la propagation et en se limitant aux parties variables des champs, la propagation d'une onde électromagnétique plane satisfait les relations :

$$\vec{E} = -\,v\,\vec{u}\wedge\vec{B} \quad et \quad \vec{B} = \frac{1}{v}\,\vec{u}\wedge\vec{E}$$

Conséquences immédiates : $\left|\begin{array}{l} \vec{E} \perp \vec{u} \\ \vec{B} \perp \vec{u} \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{array}\right.$

- le trièdre $(\vec{E}\,,\vec{B}\,,\vec{u}\,)$ est direct :
- $\|\vec{E}\| = v.\|\vec{B}\|$

Remarque :

Ces relations s'appliquent aussi bien à des ondes planes progressives qu'à des ondes planes régressives (par rapport à un sens de référence) puisque, dans tous les cas, $\vec{u}$ désigne le vecteur unitaire dans le sens de la propagation.

d. Indice de Réfraction

On ne traite pas ici le cas général de la propagation dans les milieux mais seulement le cas de la propagation dans un diélectrique "parfait", i.e. homogène et isotrope.

La propagation dans ce type de milieu " idéal " est traitée de la même façon que si elle avait lieu dans le vide.

Cependant, on traitera le cas de la discontinuité représentée par le dioptre de séparation entre deux milieux différents, ou entre le vide et un autre milieu.

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques, exprimée dans le système d'unités MKSA, est définie par :

- dans le vide par : $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 . \mu_0}}$

- dans un diélectrique homogène, isotrope et transparent par : $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon . \mu}}$

- L'indice de réfraction à la traversée du dioptre séparant le vide d'un milieu transparent est égal au rapport des vitesses de propagation dans le vide et le milieu, soit :

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\varepsilon . \mu}{\varepsilon_0 . \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r . \mu_r} \qquad (6)$$

  où ε_r et μ_r sont respectivement la permittivité relative et la perméabilité relative du milieu et n l'indice : $n > 1$.

- Par définition, un milieu non magnétique est tel que sa perméabilité magnétique soit égale à celle du vide.

L'indice de réfraction d'un milieu non magnétique vaut donc : $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

- Le plus souvent, dans un milieu matériel, la vitesse de propagation d'une onde dépend de sa fréquence. On dit que le milieu est dispersif pour cette onde.

Un tel milieu ne possède donc pas un indice unique (les valeurs de sa perméabilité et de sa permittivité ne sont pas uniques), mais sera caractérisé par la valeur de son indice (i.e. par la valeur de la vitesse de propagation de l'onde) en fonction de la fréquence de l'onde.

Dans un premier temps, nous ne considèrerons que le cas d'une onde électromagnétique harmonique (s'exprimant selon une fonction sinus, ou cosinus, ou exponentielle imaginaire) possédant une fréquence déterminée.

Le problème de la dispersion ne sera posé que dans un second temps, où l'on verra comment s'exprime la propagation d'ondes non-harmoniques (périodiques ou non-périodiques).

3.5. Relations de continuité

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu homogène et isotrope, en dehors des charges et des courants.

On s'intéresse maintenant aux conditions de passage d'une onde électromagnétique à travers la surface de séparation entre deux milieux homogènes et isotropes.

Cependant, les deux milieux étant différents, il y a donc une discontinuité au niveau du dioptre constitué par la surface de séparation, ce qui interdit que l'on puisse utiliser les équations de Maxwell caractéristiques des milieux homogènes et isotropes : dans ces conditions, $\vec{B}$ n'est pas proportionnel à $\vec{H}$, et $\vec{D}$ n'est pas proportionnel à $\vec{E}$.

Si l'on se place en dehors de la présence de charges et de courants, de sorte que les équations de Maxwell (1) s'écrivent :

$$\begin{cases} div\vec{D} = 0 & div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad (7)$$

En appliquant ces équations et les théorèmes généraux, on démontre 2 types de relations, valables au voisinage immédiat du dioptre et concernant la continuité des composantes tangentielles au dioptre [pour les champs ($\vec{E}\ et\ \vec{H}$) et la continuité des composantes normales au dioptre [pour les champs ($\vec{D}\ et\ \vec{B}$).

Par contre, sur un dioptre métallique où il existera en général une densité de courant de surface ($\vec{J} \neq \vec{0}$), la démonstration des relations de continuité devra utiliser les relations de Maxwell :

$$\begin{cases} div\vec{D} = \rho & div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad (8)$$

en dehors des charges et des courants , les relations de continuité deviennent:

$$\begin{cases} \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} & \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \\ \vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} & \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \end{cases} \qquad (9)$$

Ces relations représentent les champs au voisinage immédiat du dioptre de part et d'autre de sa surface.

a. Surface de séparation entre un diélectrique et un conducteur

La surface de séparation entre un diélectrique et un métal conducteur "parfait" est un nœud de vibration des champs $\vec{E}$ et $\vec{D}$.

Exemple : Séparation entre un diélectrique et un métal non-magnétiques, en l'absence de charges

- Dans ce cas, on a respectivement dans ces deux régions de l'espace :

$$\vec{B}_1 = \mu_0.\vec{H}_1 \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \mu_0.\vec{H}_2$$

donc en particulier : $\vec{B}_{1t} = \mu_0.\vec{H}_{1t} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2n} = \mu_0.\vec{H}_{2n}$

- Si de plus on peut négliger les courants sur la surface du conducteur ($\vec{j} = \vec{0}$), alors les relations de continuité (tangentielles pour $\vec{H}$ et normales pour $\vec{B}$) impliquent :

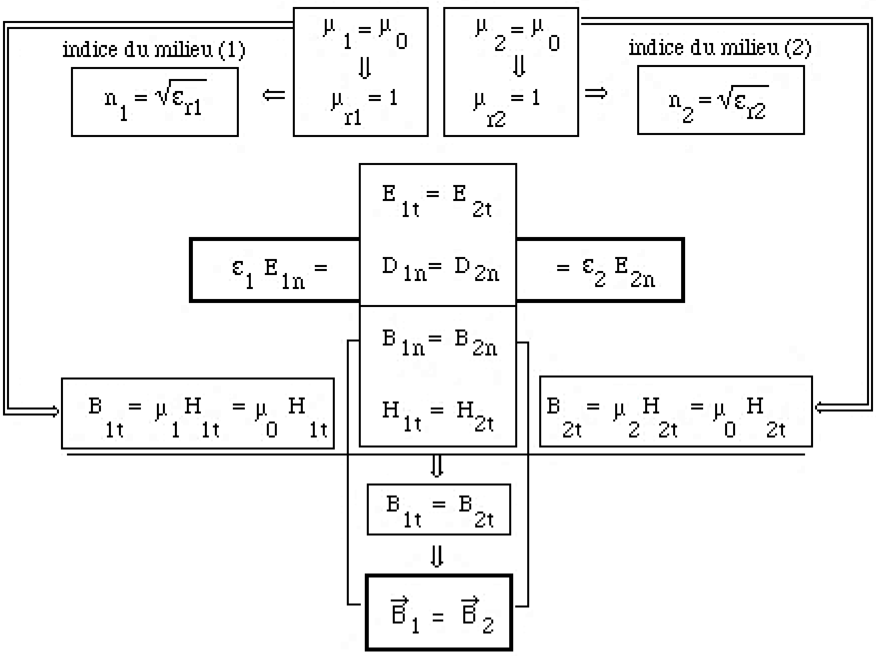
$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \quad \Rightarrow \quad \mu_0.\vec{H}_{1t} = \mu_0.\vec{H}_{2t} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{1t} = \vec{B}_{2t}$$
$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \quad \Rightarrow \quad \mu_0.\vec{H}_{1n} = \mu_0.\vec{H}_{2n} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_{1n} = \vec{H}_{2n}$$

On déduit que, dans ce cas particulier : $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$ et $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$

- Mais il faut retenir que dans le cas général, sur la surface d'un conducteur : $\vec{j} \neq \vec{0}$

L'existence d'un courant de surface sur le conducteur se traduit alors, au passage entre les 2 régions, par une discontinuité de la composante tangentielle de l'excitation magnétique $\vec{H}$.

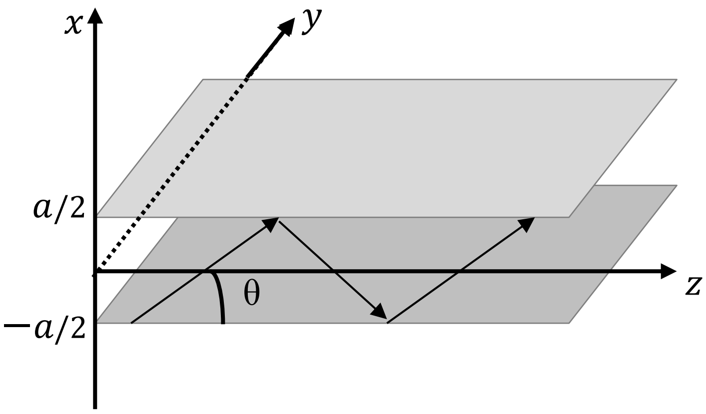
b. Surface de séparation entre deux diélectriques



CHAPITRE IV

Généralités sur les modes de propagation

Considérons un guide constitué de deux réflecteurs plans parfaitement réfléchissants, parallèles et distants de a.



$Fig.$ 4.1 : *Géométrie du guide* à *miroirs*

On peut considérer, comme sur la figure ci- dessus, les réflexions successives d'un pinceau lumineux sur les deux parois parfaitement réfléchissantes. Elles se produisent quel que soit la valeur de l'angle θ entre ce pinceau et la direction moyenne de propagation z. Cette description peut sembler juste dans le cas d'un pinceau de lumière dont on peut négliger la diffraction et lorsque l'épaisseur a du guide est grande devant la longueur d'onde de la lumière utilisée. Elle ignore en effet l'élargissement du faisceau lumineux par diffraction et les interférences qui peuvent apparaitre entre différents faisceaux incidents et réfléchis. Cette interprétation laisse faussement penser que tout faisceau peut se propager dans le guide.

Nous allons nous placer dans le cas où le guide est entièrement rempli par l'onde. On doit alors décrire les interférences qui s'y produisent et cela nous conduira à une condition de guidage.

4.1 Notion de modes

Une onde plane infinie se propage sans déformation dans l'espace libre, et toute onde de l'espace libre se décompose en une superposition unique d'ondes planes : les ondes planes sont des modes de propagation de la lumière en espace libre. Pour des ondes de pulsation ω, ces modes sont caractérisés par :

- une distribution transverse (dans le plan orthogonal à la direction de propagation) d'amplitude constante et invariante par propagation,
- une constante de propagation k qui est le module du vecteur d'onde $\vec{k}$. La relation qui lie k et ω est la relation de dispersion.

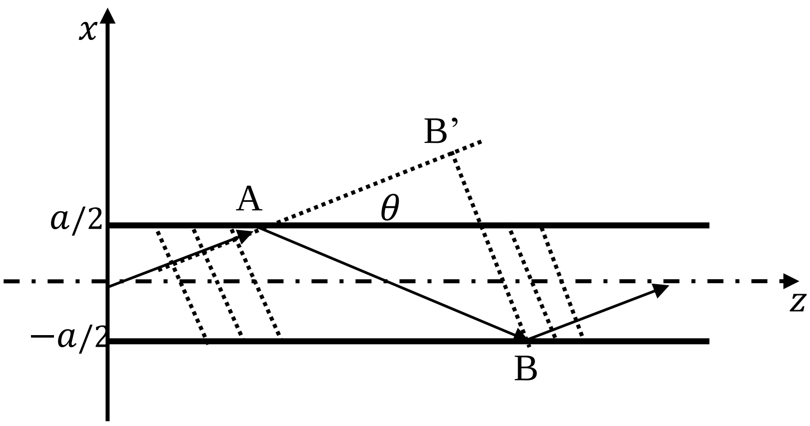
Nous allons montrer que, de la même façon, une onde guidée peut être totalement décrite comme une superposition unique de modes et que pour une onde de pulsation ω, ces modes sont caractérisés par une distribution transverse d'amplitude et une constante de propagation β qui est le module du vecteur d'onde de propagation de cette distribution .

4.2 Interférences et modes

Nous allons tout d'abord décrire les interférences entre ondes planes quasi-monochromatiques, qui règnent à l'intérieur du guide et montrer qu'à cause de ces interférences, seul un ensemble discret de modes optiques peut se propager.

Sur la figure 4.2, les ondes planes sont représentées indifféremment par les rayons qui représentent la direction de propagation ou par les plans d'onde. L'onde plane ascendante après le point B provient de l'onde plane ascendante arrivant en A; aussi bien par le trajet (AB') que par le trajet (AB), incluant deux réflexions. Cette onde plane est unique. Ces deux chemins optiques doivent donc nécessairement différer d'un nombre entier de longueurs d'ondes pour qu'elle transporte de l'énergie et que cette énergie soit constante le long de z. Sinon, on aurait toute une superposition d'onde qui ne sont pas en phase les unes avec les autres et peuvent donc interférer d'une manière destructive.

On se placera ici dans le cas d'ondes planes TE (transverse électrique). On pourrait faire le même calcul pour une onde TM (transverse magnétique).



$Fig.$ 4.2 : $Condition\ de\ guidage$

La différence de trajet géométrique s'écrit :

$$(AB) - (AB') = 2a.sin\theta \qquad (1)$$

En tenant compte, à chaque réflexion d'un retard de phase $\varphi_r = \pi$ indépendant de l'angle d'incidence, on obtient la condition d'interférence :

$$sin\theta_p = p\frac{\lambda}{2a} \qquad (2)$$

C'est la condition de propagation guidée.

Chaque valeur de p, définit une onde plane ascendante et une onde plane descendante de vecteurs d'ondes respectifs :

$$\overrightarrow{k_p^+} = \begin{cases} \beta_p = k_0 cos\theta_p \\ k_{xp}^+ = k_0 sin\theta_p = p\frac{\pi}{a} \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{k_p^+} = \begin{cases} \beta_p = k_0 cos\theta_p \\ k_{xp}^- = -k_0 sin\theta_p = -p\frac{\pi}{a} \end{cases} \qquad (3)$$

La représentation graphique ci-dessous permet de remarquer que les deux ondes correspondant une même valeur de p ont même constante de propagation longitudinale et des constantes de propagation transversales opposées.

4.3 Structure des champs guidés

Le déphasage de la réflexion sur la surface métallique parfaitement conductrice implique que le champ total (résultant de la superposition des ondes planes de même constante de propagation longitudinale β_p), est nul sur la surface de réflexion.

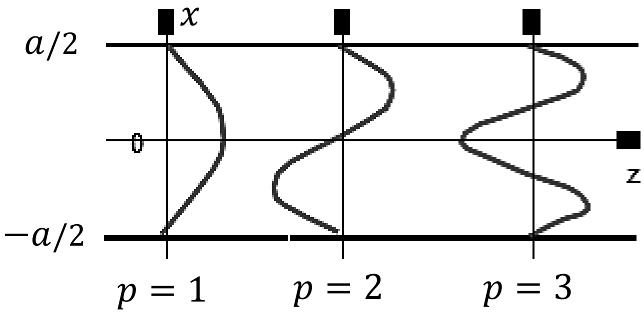
Une première conséquence de cette condition est que l'onde guidée correspondant $p = 0$ n'existe pas. La relation (3) montre en effet que l'onde ascendante et l'onde descendante dégénèrent dans ce cas en une unique onde plane se propageant selon l'axe du guide; si son amplitude est nulle sur la surface du guide, elle est nulle partout. Pour toutes les autres valeurs de p, la condition d'interférences constructives implique que ces deux ondes ont des constantes de propagation transverses opposées .

On appelle "mode guidé" cette structure transverse se propageant sans déformation selon z: Elle peut être caractérisée partir des deux ondes planes en question :

$$\overrightarrow{E_x} = \begin{cases} E_y^+(x,z) = A_p exp - j(\beta_p z + k_{xp}x) \\ E_y^-(x,z) = A_p exp - j(\beta_p z - k_{xp}x) exp j\varphi_p \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varphi_p = (p+1)\pi$$

Ce facteur de phase, implique l'existence de modes guidés symétriques ou anti-symétriques. En effet, le champ résultant de la superposition des deux ondes planes doit être nul en $x = \pm d/2$

$$\begin{cases} \text{Si } p \text{ est impair :} \quad E_y(x,z) = 2A_p cos k_{xp} x . exp - j\beta_p z \\ \\ \text{Si } p \text{ est pair :} \quad E_y(x,z) = 2jA_p sin k_{xp} x . exp - j\beta_p z \end{cases} \qquad (4)$$



$Fig.$ 4.3 : $modes \quad p = 1, 2, 3$

Comme le montre la figure 4-3, les modes impairs sont symétriques et les modes pairs, antisymétriques. Les relations (4) décrivent bien les modes comme des structures transverses se propageant sans déformation selon z : p, qui définit les angles θ_p de propagation des ondes planes qui interfèrent pour donner cette structure, donne aussi le nombre d'extrema que l'on y observe.

4.4 Dispersion du guide

Au travers de la relation (3), p définit aussi la constante de propagation β_p du mode :

$$\beta_p = \frac{2\pi}{\lambda}\, cos\theta_p = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - sin^2\theta_p} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - p^2\frac{\lambda^2}{4a^2}}$$

$${\beta_p}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \qquad (5)$$

Cette relation est une « relation de dispersion » car elle définit la relation entre la constante de propagation de l'onde à sa pulsation. Le guidage introduit donc une dispersion différente de celle du milieu de propagation. β_p décroît avec l'ordre p du mode. Cela rend compte du fait que la vitesse de phase est d'autant plus faible que les ondes planes sont fortement inclinées par rapport à l'axe du guide :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta_p} = \frac{c}{\sqrt{1 - p^2\left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}}$$

On peut formaliser ce résultat en calculant à partir de la relation (5), la vitesse de groupe de la structure de champ :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c.cos\theta_p \qquad (6)$$

4.5 Orthogonalité des modes guidés

Il est essentiel pour la suite de remarquer que les modes définis par les relations (4) sont orthogonaux. En effet, si $p \neq q$, alors

$$\begin{cases} \int_{-a/2}^{+a/2} A_p cosk_{xp}x A_q cosk_{xq}x.\,dx = 0 \\ \int_{-a/2}^{+a/2} A_p cosk_{xp}x A_q sink_{xq}x.\,dx = 0 \\ \int_{-a/2}^{+a/2} A_p sink_{xp}x A_q sink_{xq}x.\,dx = 0 \end{cases}$$

On définit des modes $u_p(x)$ orthogonaux et normés, en notant :

$$E_y\,(x,z) = E_p.u_p.exp - j\beta_p z \qquad \text{où} \quad E_p\ est\ l'amplitudedu\ mode \qquad (7)$$

Si p est pair : $E_p = j\sqrt{2a}$ $\quad u_p(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}sink_{xp}x$

Si p est impair : $E_p = \sqrt{2a}$ $\quad u_p(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}cosk_{xp}x$

En effet :

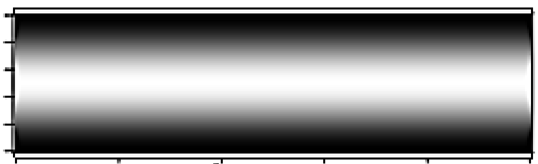
$$u_p(x).u_q(x)dx$$

si $p \neq q \quad alors$

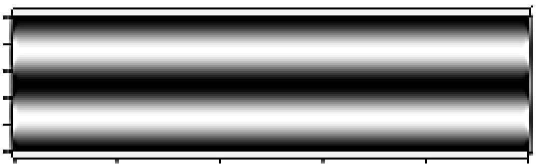
$$\int_{-a/2}^{+a/2} u_p(x).u_q(x)\,.dx = 0 \qquad et \qquad \int_{-a/2}^{+a/2} u_p^2(x).\mathrm{dx} = 1$$

Le champ total dans le guide s'écrit donc de façon générale comme une combinaison linéaire de ces modes :

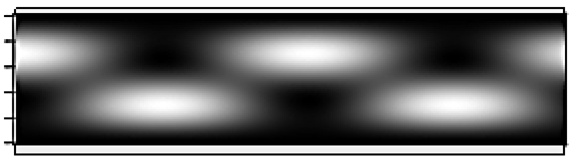
On notera que bien qu'un mode soit une structure transverse invariante par propagation, ce n'est pas le cas de la superposition de deux modes. Par exemple, la structure résultant de la superposition des modes $p = 1\ et\ p = 2$ est périodique le long de la direction de propagation.



$Mode \quad p = 1$



$Mode \quad p = 2$



$Modes \quad p = 1\ et\ p = 2$

4.6 Nombre de modes

Dans ce guide très particulier, le champ est nul sur les surfaces. Le mode $p = 0$ qui correspondrait à un champ partout nul n'a pas de signification. Par ailleurs, la valeur maximale de p est définie par la condition :

$$sin\theta_p = p\frac{\lambda}{2a} \leq 1 \quad soit \quad 0 < p \leq p_{max} = Ent\left(\frac{2a}{\lambda}\right) \qquad (8)$$

Le mode p ne peut exister que si $\frac{2a}{\lambda} \geq p$ c'est-à-dire si : $\lambda \leq \lambda_{max} = \frac{2a}{p}$
ou bien

$$\nu \geq \nu_{min} = p\frac{c}{2a} \qquad (9)$$

ν_{min} est la fréquence de coupure du mode p. Ce mode cesse de se propager dès que la fréquence devient inférieure à la fréquence de coupure. En particulier, dans le cas de ce guide, il n'y a plus aucune propagation possible lorsque la fréquence ν est inférieure à $\frac{c}{2a}$.

Le nombre de modes dans le guide croît lorsque la fréquence de l'onde qui s'y propage augmente (ou que sa longueur d'onde diminue).

CHAPITRE V

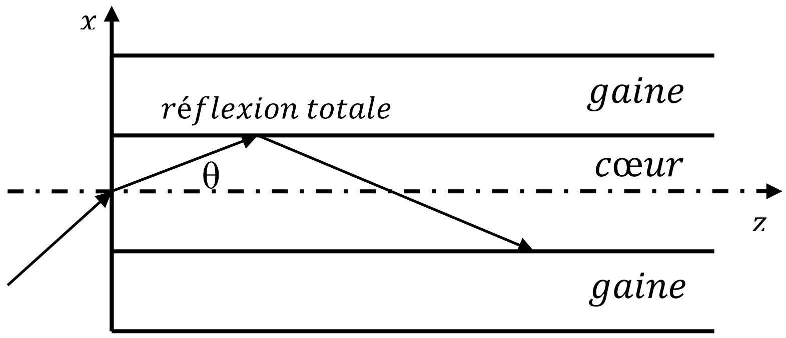
Electromagnétique du guide plan

5.1 Guide plan symétrique à saut d'indice :

Considérons un guide plan diélectrique constitué d'une couche diélectrique d'indice de réfraction n_c et d'épaisseur a qui constitue le guide proprement dit. Elle est entourée de deux milieux diélectriques semi-infinis, le substrat (cœur) et le superstrat (gaine), d'indices de réfraction supérieurs à n_c : Si ces deux milieux ont le même indice n_g ; le guide est dit symétrique.
Le milieu composite ainsi constitué est invariant par translation dans les directions $y\ et\ z$: Il présente deux sauts d'indice dans la direction x.

5.2 Modélisation par l'optique géométrique

a) *Réflexion totale*



$Fig.$ 5.1 : *Condition de guidage*

Pour qu'il y ait réflexion totale, l'angle θ doit être supérieur à $arccos\ n_c/n_g$ c'est-à-dire $\cos\theta > n_c/n_g$

L'angle à l'entrée de la fibre doit rester inférieur à : $\sqrt{n_c{}^2 - n_g{}^2}$ (1)

La quantité $\sqrt{n_c{}^2 - n_g{}^2}$ est appelée ouverture numérique de la fibre

b) *Modes et interférences*

Quand la condition (1) est remplie, le guide contient une superposition d'ondes réfléchies. Ces ondes interfèrent entre elles, ce qui conduit à une atténuation importante de l'amplitude si ces interférences sont destructives. L'onde ne peut se propager dans la fibre que si l'angle θ vaut une certaine valeur discrète θ_p .C'est-à-dire, en plus de la condition de la réflexion totale, θ doit vérifier la condition d'interférence constructive.

$$sin\theta_p = p\frac{\lambda}{2a} \quad et \quad cos\theta_p = \frac{n_g}{n_c} \qquad (2)$$

L'intensité lumineuse dans la fibre est la même que celle qui provient d'un réseau de pas égal à 2a.

c) *Nombre de modes*

Deux conditions sont nécessaires ($\cos\theta > n_c/n_g$ et $sin\theta_p = p\frac{\lambda}{2a}$) pour que l'onde puisse se propager, et le nombre de modes permis est limité. On doit avoir :

$$cos\theta_p = \sqrt{1-\left(p\frac{\lambda}{2a}\right)^2} > \frac{n_g}{n_c} \quad \text{soit} \quad p < \frac{a}{\lambda}\frac{\sqrt{n_c^2-n_g^2}}{n_c} = p_{max}$$

Nous avons intérêt à limiter le nombre de modes permis (problème de dispersion). Cela est réalisé en prenant des indices n_c *et* n_g très proches, ainsi qu'une épaisseur a petite.

d) *Exercice d'application :*

Déterminer le diamètre a du cœur pour que la fibre soit monomode.

$$\begin{cases} sin\theta_p = p\frac{\lambda}{2a} \\ cos\theta = \frac{n_g}{n_c} \end{cases} \qquad sin\theta_1 > sin\theta_p \qquad \frac{\lambda}{2a} > sin\theta_p = \sqrt{1 - {n_g^2}/{n_c^2}}$$

$$a < \frac{\lambda . n_c}{2\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$$

e) *Dispersion*

Le vecteur d'onde $\vec{k}$ suivant l'axe z est relié à la pulsation ω de manière différente selon les modes. En utilisant la relation (2), on trouve :

$$k_z^p = \frac{2\pi}{\lambda}\,cos\theta_p = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(p\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 p^2}{a^2}} \qquad (3)$$

k_z^p dépend de p

Cette équation n'a de solution que si le terme sous le radical du second membre est positif. Elle montre en particulier qu'à ω donné, les modes ne se propagent pas à la même vitesse. Dans les mêmes conditions, le mode le plus haut a une vitesse de groupe supérieur à celle du mode le plus bas.

En effet, le temps t un front d'onde pour parcourir une distance z le long du guide est :

$$t = \frac{z}{c.n_c.cos\theta_p}$$

Si un signal est émis à l'entrée du guide, et se propage suivant deux modes différents $\theta_p \; et \; \theta_q$, il sera reçu au bout du guide de longueur L avec un décalage temporel :

$$\Delta t_{pq} = \frac{L}{n_c c}\left(\frac{1}{cos\theta_p} - \frac{1}{cos\theta_q}\right) \qquad (4)$$

f) *Distribution de l'amplitude*

Pour décrire la distribution de champ dans le guide plan, il nous faut traiter séparément les trois milieux qui constituent le guide (voir paragraphe 4.3 du chapitre 4).
L'amplitude totale s'écrit dans ce cas :

$$A_p(x, z, t) \propto expj\omega t. exp - jkzcos\theta_p. sin\left(\frac{\pi p x}{a}\right) \qquad (5)$$

Remarque :

Pour le mode $= 0$, il n'y a pas d'onde réfléchie dans cette approche, et donc il faut supprimer le second terme dans l'expression (5), ce qui donne :

$$A_0(x, z, t) \propto expj\omega t. exp - jkz$$

g) *Cas d'un guide rectangulaire*

Nous allons essayer de généraliser les résultats précédents au cas d'un guide d'onde rectangulaire, de largeur a selon x et de longueur b selon y , permettant à une onde incidente de se propager à l'intérieur du guide.

Comme au paragraphe précédent, les interférences ne seront constructives que si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$sin\theta_p = p\frac{\lambda}{2a} \quad et \qquad sin\beta_q = q\frac{\lambda}{2b} \qquad (6)$$

On peut alors reprendre le raisonnement précédent et calculer l'amplitude totale pour ces modes.

$$A_{pq} \propto cos\left(\frac{\pi p x}{a}\right). cos\left(\frac{\pi q y}{b}\right) \qquad (7)$$

5.3 Modélisation par l'optique ondulatoire

Nous traitons ici le guide plan d'un point de vue électromagnétique en décrivant la propagation des ondes dans un milieu dont l'indice de réfraction est invariant selon les directions $y \; et \; z$; mais varie dans la direction x. Cette approche permettra de définir de façon précise, les notions introduites jusqu'à présent.

5.3.1 Formalisme général

a) Les équations de Maxwell

Les milieux dans lesquels se propagent les ondes, ne contiennent ni charges ni courants, les équations de Maxwell s'écrivent :

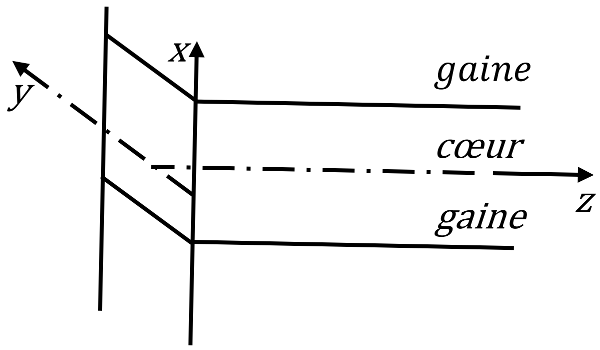
$$\left.\begin{array}{ll} div\vec{D} = 0\,, & div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{D} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \overrightarrow{rot}\,\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}\right] \quad (8)$$

Les milieux dans lesquels se propagent les ondes sont supposés être linéaires, isotropes, non conducteurs et non magnétiques. Par contre la structure constituant le guide ne peut être considérée comme homogène. Dans le cas d'une onde quasi-monochromatique, les équations constitutives du milieu s'écrivent :

$$\vec{B} = \mu_0\,\vec{H} \quad \text{et} \quad \vec{D} = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\vec{E} = \varepsilon_0\,n^2\vec{E} \quad avec \quad \mu_0\,\varepsilon_0\,c^2 = 1$$

On recherche une solution d'onde monochromatique sinusoïdale de pulsation ω, se propageant dans la direction z dans lequel la structure est invariante.

$$\Delta A - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad A \text{ peut-être un champ électrique ou magnétique}$$



$Fig.$ 5.2. $Structure\ du\ guide\ plan\ symétrique$

Nous nous plaçons dans le cas où les champs ne dépendent pas de y (invariance de la structure selon y). Dans ce cas, les quatre équations de (8) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ -\partial_z E_x - \partial_x E_z \\ -\partial_x E_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ -\partial_z B_x - \partial_x B_z \\ -\partial_x B_y \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} \partial_t D_x \\ \partial_t D_y \\ \partial_t D_z \end{pmatrix} = \frac{n^2}{c^2} \begin{pmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{pmatrix}$$

$$\partial_x E_x + \partial_z E_z = 0 \quad , \quad \partial_x B_x + \partial_z B_z = 0$$

On obtient donc deux groupes de quantités non couplées entre elles par ces équations :
E_y , B_x , B_z d'une part, qui forment le groupe transverse électrique noté TE et
B_y , E_x , E_z d'autre part, qui forment le groupe transverse magnétique noté TM.

b) Solutions paires et impaires

La solution générale des équations de Maxwell dans le guide est donc une combinaison linéaire de modes $TE\ et\ TM$.

Pour décrire la distribution de champ dans le guide plan, il nous faut traiter séparément les trois milieux qui constituent le guide. Pour cela, nous allons résoudre les équations de Maxwell dans le cœur et dans la gaine.

A l'intérieur du guide (cœur) : $-\frac{a}{2} \leq x \leq +\frac{a}{2}$

Hors du guide (gaine) : $x \leq -\frac{a}{2}\ \ et\ x \geq\ +\frac{a}{2}$

On recherche des solutions de la forme : $A(x, y, z, t) = f(x)g(z)exp - j\omega t$

$A(x, y, z, t)$ ne dépend pas de y (plan infini)

$$\Delta A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x)g(z)exp - j\omega t\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[f(x)g(z)exp - j\omega t\right]$$

$$f''(x)g(z)exp - j\omega t\ + f(x)g''(z)exp - j\omega t = -\ \omega^2 \frac{n^2}{c^2}\ f(x)g(z)exp - j\omega t$$

$$f''(x)g(z)\ + f(x)g''(z) = -\ \omega^2 \frac{n^2}{c^2}\ f(x)g(z)$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(z)}{g(z)} = -\ \omega^2\ \frac{n^2}{c^2}$$

$\frac{g''(z)}{g(z)} = -\left\{\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\right\} = -\ k_z^2$ est une constante qui ne dépend pas de z

g décrit la propagation dans la direction z

$$\begin{cases} g'' + k_z^2\ g = 0 \\ \frac{f''(x)}{f(x)} = k_z^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2} \end{cases} \tag{9}$$

$$f''(x) + \left(\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_z^2\right) f(x) = 0 \qquad (10)$$

On veut que la solution de cette équation soit sinusoïdale dans le cœur et qu'elle ne se propage pas dans la gaine.

Dans la gaine : $\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_z^2 < 0$, posons $-\kappa_x^2 = \frac{n_g^2\omega^2}{c^2} - k_z^2$

Dans le cœur : $\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_z^2 > 0$, posons $k_x^2 = \frac{n_c^2\omega^2}{c^2} - k_z^2$

La situation physique qui nous intéresse est : $\frac{n_g\omega}{c} < k_z < \frac{n_c\omega}{c}$ (11)

Remarque :

$$\vec{k}\begin{cases} k_x = \frac{n_c\omega}{c} \sin\theta \\ k_z = \frac{n_c\omega}{c} \cos\theta > \frac{n_g\omega}{c} \quad c'est-à-dire \ \cos\theta >= \frac{n_g}{n_c} \ réflexion\ totale \end{cases}$$

La solution de (11) dans le cœur s'écrit :

$$f(x) = A\cos k_x x + B\ \sin k_x x \qquad (12)$$

On peut poser:

$$\begin{cases} F_p(x) = f(x) + f(-x) & fonction\ paire \\ F_i(x) = f(x) - f(-x) & fonction\ impaire \end{cases}$$

Si on se restreint aux fonctions paires et impaires, on peut remonter à toutes les solutions par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\!\left[F_p(x) + F_i(x)\right]\!\right]$$

$f(x) = A\cos k_x x$ dans le cœur

Dans la gaine, la solution s'écrit :

$f(x) = B\exp\kappa_x x + C\exp - \kappa_x x$ dans la gaine

On résout ces équations dans la partie supérieure($x > 0$).

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=A\cos k_x x & \text{dans le cœur} \\ f(x)=C'\exp-\kappa_x\left(x-\frac{a}{2}\right) & \text{dans la gaine} \end{array}\right] \qquad (13)$$

Grace à la continuité du champ magnétique et de la composante tangentielle du champ électrique(E_y), on peut trouver les constantes A et C'.

$$f_c\left(x = \frac{a}{2}\right) = f_g\left(x = \frac{a}{2}\right)$$

$$f_c'\left(x = \frac{a}{2}\right) = f_g'\left(x = \frac{a}{2}\right) \text{ car } \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \text{ et } B_z\ est\ continu$$

$tank_x \frac{a}{2} = \frac{\kappa_x}{k_x}$ donne les modes de propagation : $tan\frac{a}{2}\sqrt{k_c^2 - k_z^2} = \frac{\sqrt{k_z^2 - k_g^2}}{\sqrt{k_c^2 - k_z^2}}$ (14)

On a coutume de simplifier ces équations en introduisant des grandeurs normalisées sans unités qui seront utilisées systématiquement pas la suite :

$u = k_x \frac{a}{2}$

$v = \kappa_x \frac{a}{2}$: coefficient d'extinction réduit

$V = k_0 a\sqrt{n_c^2 - n_g^2}$: fréquence réduite

On remarque que : $u^2 + v^2 = \left(\frac{V}{2}\right)^2$

Le système d'équations (13) admet alors des solutions si :

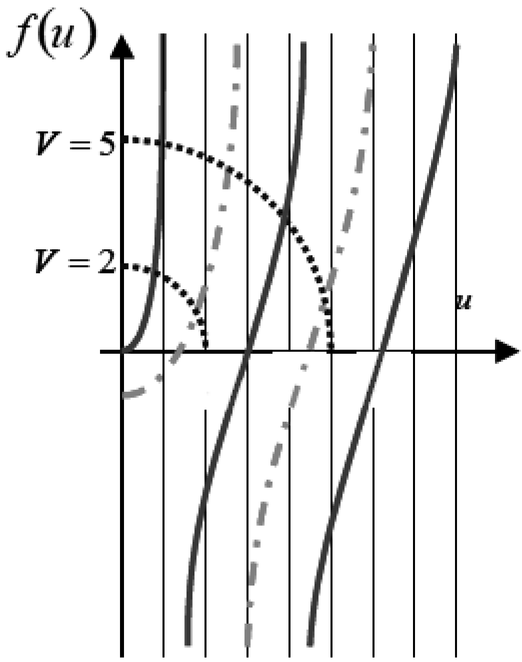
u tan u = $\sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - u^2}$

La résolution se fait graphiquement. On trace donc sur un même graphe $u \tan u$ et

$f(u) = \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - u^2}$ pour différentes valeurs de V dénommé, fréquence réduite.

V réunit donc les caractéristiques du guide (épaisseur a; indices de réfraction n_c et n_g), et la longueur d'onde dans le vide de la lumière. Le paramètre u obtenu, définit, par l'intermédiaire de k_x la forme du champ à l'intérieur du guide.

Pour les solutions impaires (anti-symétriques), on peut faire la même démarche (remplacer le cos par le sinus) et le système admet des solutions si : $-u\, cotu$ = $\sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - u^2}$



- $\sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - u^2}$: arc de cercle de rayon V (traits pointillés ----------)
- u tan u (en traits plein) dont l'intersection avec les arcs définit les modes pairs possibles
- $u\, cotu$ (en traits tiretés — · — · —),
- dont les intersections avec la première définit les modes impairs possibles

Fig. 5.3 : Résolution graphique et tracé des solutions (paires et impaires)

Ainsi pour chaque valeur de V ; on détermine le nombre de modes symétriques et anti-symétriques possibles et les valeurs correspondantes de u.
On constate que le nombre de modes est une fonction croissante de V: La courbe définit pour chaque mode une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il cesse d'exister.
On remarque que seul le mode fondamental existe pour toute valeur de V.

On peut tracer les solutions (forme du champ à l'intérieur du guide) :

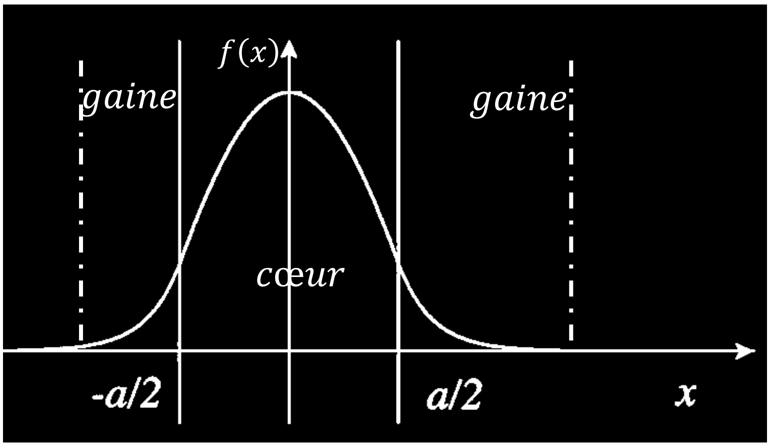


Fig.5.4 : distribution d'amplitude du guide plan symétrique à saut d'indice.

Remarque :

La gaine ne doit pas être petite car elle ne sert pas seulement à réaliser la réflexion totale mais à faire propager l'onde amortie.
En effet, on vient de voir que l'onde se propage aussi dans la gaine (elle est amortie mais pas nulle). L'onde peut s'échapper de la gaine si l'épaisseur de celle-ci est faible.

Exercice :

Trouver la largeur l de la gaine au bout de laquelle l'amplitude de l'onde est de $1/e$ de sa valeur maximale.

$$f(x) \propto exp - \kappa_x(x - \frac{a}{2}) \qquad l \propto \frac{1}{\kappa_x} = \frac{1}{\sqrt{k_z^2 - k_g^2}}$$

$l \gtrsim \frac{\lambda_c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$ l est appelé longueur typique de décroissance

l de l'ordre de quelque dizaine de longueur d'onde

5.3.2 Distribution de champ (cas TM)

De même, le problème de l'existence de modes guidés TM dans le guide symétrique à saut d'indice, conduit à résoudre les équations définissant la composante transverse du champ magnétique :

$$\begin{cases} g" + k_z^2\, g = 0 & pour\ \ |x| < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{f''(x)}{f(x)} = k_z^2 - \dfrac{n^2\omega^2}{c^2} & pour\ \ |x| > \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

La continuité de H_y et de $\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_y}{\partial x}$ sur les interfaces nous donne les conditions d'existences suivantes :

Modes TM symétriques :

$$tan\frac{a}{2}\sqrt{k_c^2 - k_z^2} = \left(\frac{n_c}{n_g}\right)^2 \frac{\sqrt{k_z^2 - k_g^2}}{\sqrt{k_c^2 - k_z^2}} \qquad \text{ou bien} \qquad u \tan u = \left(\frac{n_c}{n_g}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - u^2} \qquad (15)$$

Modes TM antisymétriques:

$$cot\frac{a}{2}\sqrt{k_c^2 - k_z^2} = -\left(\frac{n_c}{n_g}\right)^2 \frac{\sqrt{k_z^2 - k_g^2}}{\sqrt{k_c^2 - k_z^2}} \qquad \text{ou bien} \qquad -u\ cotu = \left(\frac{n_c}{n_g}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - u^2} \qquad (16)$$

et l'on peut, comme précédemment, résoudre graphiquement ces équations et trouver les constantes de propagation des modes guidés TM.

5.3.3 Indice effectif et constante de propagation normalisée

La notion d'indice effectif rend compte du fait qu'une onde qui se propagerait dans le vide avec une constante k_0; se propage dans le guide avec une constante β: L'indice effectif est alors défini par :

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} \qquad (17)$$

Il s'exprime en fonction des paramètres u et V :

$$n_{eff}^2 = n_c^2 - \left(n_c^2 - n_g^2\right)\left(2\frac{u}{V}\right)^2 \qquad (18)$$

De même, on définit la constante de propagation normalisée b :

$$b = \frac{\beta^2 - k_0^2 n_g^2}{k_0^2 n_c^2 - k_0^2 n_g^2} = 1 - \left(2\frac{u}{V}\right)^2 \qquad (19)$$

La condition de guidage s'écrit alors :

$$n_g \leq n_{eff} \leq n_c \quad \text{ou mieux encore} \quad 0 \leq b \leq 1$$

La valeur $b = 0$ correspond à la fréquence de coupure de chaque mode.
La figure ci-dessous est un exemple de variations de la constante de propagation normalisée b en fonction de la fréquence réduite V:

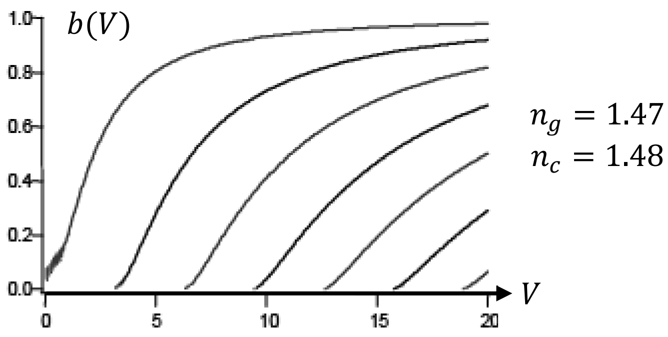


Fig.5.5 : variations de la constante de propagation réduite b en fonction de la fréquence réduite V

5.3.4 Biréfringence du guide plan à saut d'indice

Le résultat montre que les constantes de propagation sont différentes pour les modes TE et TM de même ordre. C'est ce qu'illustre la figure suivante :

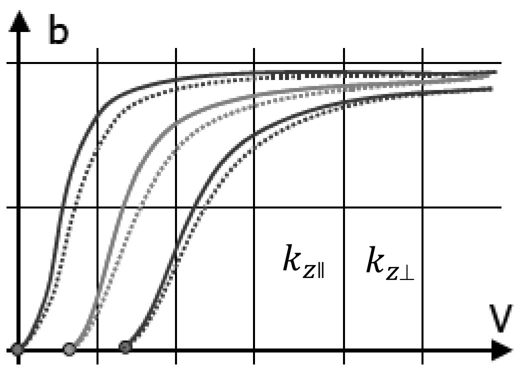


Fig.5.6 : sensibilité de la constante de propagation b à la polarisation. Modes TE (en traits pleins) et modes TM (en pointillés).

Ainsi, un guide plan monomode supporte en fait deux modes : un mode TE et un mode TM. Ils ont des constantes de propagation différentes, ce qui correspond à une biréfringence.

Exemple :
Considérons par exemple un guide d'indice $n_c = 1.5$ et d'épaisseur $= 0{,}555\mu m$, plongé dans un milieu d'indice $n_g = 1$. On cherche à y propager une onde de longueur d'onde $\lambda = 1.3\mu m$.
Dans ce cas, la fréquence réduite vaut $V \cong 3$. On trouve alors que le guide est monomode (il ne supporte que le mode fondamental) :

$mode$	b	n_{eff}
TE	0.6280	1.3360
TM	0.4491	1.2495

Nous avons donc une biréfringence $\Delta n \cong 0.088$

Le déphasage entre les modes fondamentaux TE et TM est égal à π de pour une longueur de propagation est :

$$\delta = n_{eff}.L = \frac{\lambda}{2} = 0.65\mu m \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{0.65}{0.0865} = 7.51\mu m$$

C'est donc une biréfringence extrêmement forte.

5.3.5 Distribution de champ (cas TEM)

D'après les relations (8) et pour le mode TE, on a :

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \Rightarrow -j\omega B_z = -jk_x E_y$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \Rightarrow -j\omega B_x = -jk_z E_y$$

$$\left|\frac{B_z}{B_x}\right| = \frac{k_x}{k_z} = \frac{\sqrt{k_c^2 - k_z^2}}{k_z} < \frac{\sqrt{k_c^2 - k_g^2}}{k_z} = \frac{\omega}{ck_z}\sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$ valeur très petite pour $n_c \cong n_g$

Donc B_z $est\ faible$ et par conséquent les deux champs électrique et magnétique sont transverses. On dit que l'on est dans l'approximation du guidage faible et on parle alors des modes TEM au lieu de modes TE et TM :

- Nous avons dans ce cas une onde rasante qui se propage selon l'axe z .
- C'est un cas important sur lequel nous reviendrons au sujet des fibres optiques.

CHAPITRE VI

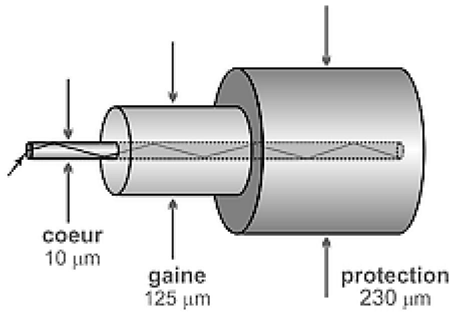
Fibres optiques

6.1. Introduction :

Une *fibre optique* est un fil en verre ou en plastique très fin qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission de données. Elle offre un débit d'information nettement supérieur à celui des câbles coaxiaux et supporte un réseau « large bande » par lequel peuvent transiter aussi bien la télévision, le téléphone, la visioconférence ou les données informatiques.

Entourée d'une gaine protectrice, la fibre optique peut être utilisée pour conduire de la lumière entre deux lieux distants de plusieurs centaines, voire milliers, de kilomètres. Le signal lumineux codé par une variation d'intensité est capable de transmettre une grande quantité d'information. En permettant les communications à très longue distance et à des débits jusqu'alors impossibles, les fibres optiques ont constitué l'un des éléments clef de la révolution des télécommunications optiques. Ses propriétés sont également exploitées dans le domaine des capteurs (température, pression, champ électromagnétiques, etc.), dans l'imagerie et dans l'éclairage.

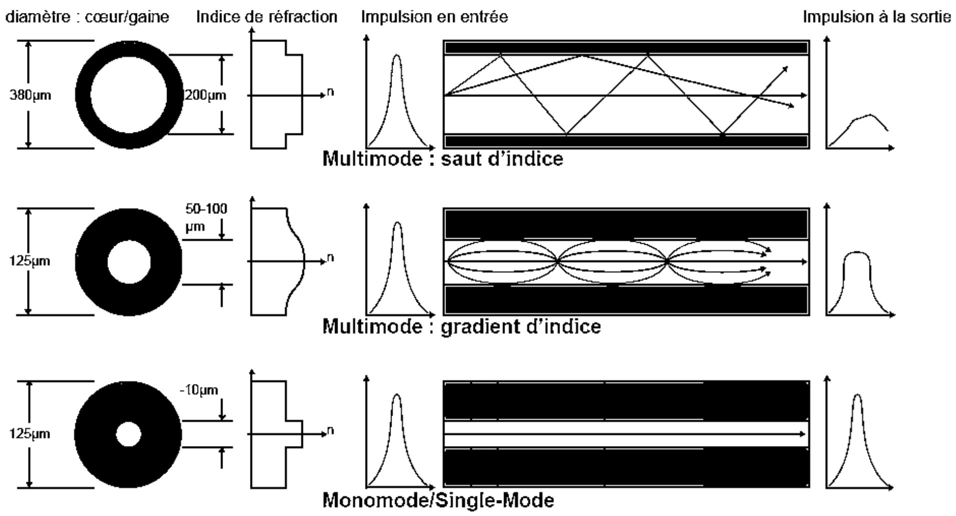
Un nouveau type de fibres optiques, fibres à cristaux photoniques, a également été mis au point ces dernières années, permettant des gains significatifs de performances dans le domaine du traitement optique de l'information par des techniques non linéaires, dans l'amplification optique.



La fibre optique est un guide d'onde qui exploite les propriétés réfractrices de la lumière. Elle est habituellement constituée d'un cœur entouré d'une gaine. Le cœur de la fibre a un indice de réfraction légèrement plus élevé (différence de quelques millièmes) que la gaine et peut donc confiner la lumière qui se trouve entièrement réfléchie de multiples fois à l'interface entre les deux matériaux. L'ensemble est généralement recouvert d'une gaine plastique de protection.

Il existe plusieurs types de fibre optique. Dans la fibre à saut d'indice, l'indice de réfraction change brutalement entre le cœur et la gaine. Dans la fibre à gradient d'indice, ce changement d'indice est beaucoup plus progressif.

Dans les fibres à cristaux photoniques, l'écart d'indice entre les différents matériaux (en général la silice et l'air) est beaucoup plus important. Dans ces conditions, les propriétés physiques du guidage diffèrent sensiblement des fibres à saut d'indice et à gradient d'indice.



$Fig. 6.1$: $Les\ trois\ familles\ de\ fibres\ optiques$

L'approximation du guidage faible introduite dans le cas précédent permet une approche simple des fibres optiques. Elle reste rigoureuse tant qu'un nombre limité de modes se propage dans la fibre.

6.2. Equation de propagation

On se place dans le cas d'une onde scalaire $A(r, \theta, z, t)$ qui obéit à l'équation de propagation de Helmholtz :

$$\Delta A - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Pour tenir compte de la symétrie particulière du milieu, nous exprimons cette équation en coordonnées cylindriques :

$$\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

en remarquant que l'invariance de la fibre par rotation impose à l'indice de réfraction de n'être fonction que de r.
Nous cherchons les solutions de la forme suivante :

$A(r, \theta, z, t) = f(r)g(\theta)h(z)\, expj\omega t$

En résolvant l'équation :

$$\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rf'(r)g(\theta)h(z)] + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)h(z) + f(r)g(\theta)h''(z)$$

$$-\omega^2\frac{n^2}{c^2}f(r)g(\theta)h(z) = \frac{1}{r}[f'(r)g(\theta)h(z)] + f''(r)g(\theta)h(z) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)h(z)$$

$$+ f(r)g(\theta)h''(z)$$

$$-\frac{n^2\omega^2}{c^2} = \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} + \frac{h''(z)}{h(z)}$$

$$\frac{h''(z)}{h(z)} = -\frac{n^2\omega^2}{c^2} - \frac{f'(r)}{f(r)} - \frac{f''(r)}{f(r)} - \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -k_z^2 \qquad (2)$$

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = r^2\left[k_z^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} - \frac{f''(r)}{f(r)}\right] \qquad (3)$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toutes valeurs de r et de θ. Le premier membre est indépendant de r, le second est indépendant de θ. On a donc nécessairement

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \text{constante}$$

$g(\theta)$ étant périodique de période 2π ou sous multiple de 2π ; on a nécessairement

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -p^2 \text{ avec } p \text{ entier positif} \qquad (4)$$

$g(\theta) = Acosp\theta + Bsinp\theta \;\; p\epsilon N$

La fonction $f(r)$ est ensuite obtenue, pour chaque valeur p ; en résolvant l'équation (3). Cela nécessite cependant la connaissance du profil d'indice $n\,(r)$ de la fibre utilisée.

6.3. Fibre optique à saut d'indice :

On décrit les modes du champ guidé, dans le cas de la fibre à saut d'indice. Elle est définie par un cœur de rayon a et d'indice n_c, entouré d'une gaine infiniment étendue d'indice n_g avec

$$\frac{n_c - n_g}{n_c} \ll 1 .$$

$$r^2\left[k_z^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} - \frac{f''(r)}{f(r)}\right] = -p^2 \qquad (5)$$

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{n^2\omega^2}{c^2} - \frac{p^2}{r^2} - k_z^2 = 0$$

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \left[\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{p^2}{r^2}\right] f(r) = 0 \qquad (6)$$

Posons $\alpha^2 = \pm\left[\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_z^2\right]$ $\quad \alpha\ dépend\ de\ n_c\ et\ n_g$

Nous reprendrons les notations déjà utilisées dans le cas du guide plan :

- la fréquence normalisée : $V = k_0 a\sqrt{n_c^2 - n_g^2}$
- les constantes de propagation transverses
  - dans le cœur $k_x^2 = \frac{n_c^2\omega^2}{c^2} - k_z^2$
  - dans la gaine $\kappa_x^2 = k_z^2 - \frac{n_g^2\omega^2}{c^2}$
  - et leurs valeurs normalisées : $u = k_x a$ et $v = \kappa_x a$

L'équation (6) s'écrit alors dans les deux milieux :

$$0 \le r \le a \qquad r^2\frac{f''(r)}{f(r)} + r\frac{f'(r)}{f(r)} + \left[u^2\frac{r^2}{a^2} - p^2\right] = 0$$

$$r \ge a \qquad r^2\frac{f''(r)}{f(r)} + r\frac{f'(r)}{f(r)} - \left[v^2\frac{r^2}{a^2} + p^2\right] = 0$$

Les solutions de ces équations différentielles sont des fonctions de Bessel.

- dans le cœur :

Les solutions (paires) sont de la forme :

$$A(r,\theta) = AJ_p(u\frac{r}{a})cosp\theta \qquad (7)$$

- dans la gaine :

Les solutions (paires) sont de la forme :

$$A(r,\theta) = AK_p(v\frac{r}{a})cosp\theta \qquad (8)$$

Solutions globales :

Les solutions globales sont obtenues en écrivant la continuité de $A(r,\theta)$ en $r = a$: On obtient :

$$A_p(r,\theta) = \begin{cases} AJ_p\left(u\frac{r}{a}\right)\begin{cases}cosp\theta\\ sinp\theta\end{cases} & \text{cœur}(r < a) \qquad oscillations \\ A\frac{J_p(u)}{K_p(u)}K_p\left(v\frac{r}{a}\right)\begin{cases}cosp\theta\\ sinp\theta\end{cases} & gaine\ \ (r > a) \qquad écroissance \end{cases} \qquad (9)$$

6.3.1. Modes guidés LP

a) *Constantes de propagation longitudinales*

Jusque-là, une partie de la condition de continuité (continuité de la dérivée normale de θ) n'a pas été exploitée. Elle introduit une condition supplémentaire :

$u\frac{J_p'(u)}{J_p(u)} = v\,\frac{K_p'(v)}{K_p(v)}$ et utilisant les identités suivantes :

$\pm J_p'(u) = pJ_p(u) - uJ_{p\pm 1}(u)$ et $\pm\, uK_p'(u) = pJ_p(u) \mp uK_{p\pm 1}(u)$

Cette relation est essentielle car elle relie en fait la constante de propagation longitudinale à la fréquence normalisée V: En effet, si l'on introduit la constante de propagation longitudinale normalisée b déjà rencontrée (équation 19 du chap. 5), les paramètres u et v s'écrivent :

$v = \frac{V}{2}\sqrt{b}$ et $u = \frac{V}{2}\sqrt{1-b}$ avec $b = \dfrac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_g^2}{n_c^2 - n_g^2}$

La condition supplémentaire s'écrit :

pour $p \geq 1$ $$V\sqrt{1-b}\,\frac{J_{p-1}\left(\frac{V}{2}\sqrt{1-b}\right)}{J_p\left(\frac{V}{2}\sqrt{1-b}\right)} = V\sqrt{b}\,\frac{K_{p-1}\left(\frac{V}{2}\sqrt{b}\right)}{K_p\left(\frac{V}{2}\sqrt{b}\right)} \qquad (10)$$

pour $p = 0$ $$V\sqrt{1-b}\,\frac{J_1\left(\frac{V}{2}\sqrt{1-b}\right)}{J_0\left(\frac{V}{2}\sqrt{1-b}\right)} = V\sqrt{b}\,\frac{K_1\left(\frac{V}{2}\sqrt{b}\right)}{K_0\left(\frac{V}{2}\sqrt{b}\right)} \qquad (11)$$

Il s'agit donc, pour chaque valeur de p; d'une relation transcendantale liant la constante de propagation (normalisée) à la fréquence (normalisée). C'est une relation de dispersion. Elle définit le nombre de modes guidés :
pour chaque valeur de p; il existe q solutions en b et le nombre q dépend du paramètre V.

b) *Définition des modes LP*

On désigne les modes ainsi définis sous le nom de modes LP_{pq} (pour linéairement polarisés) en indiquant en indices :

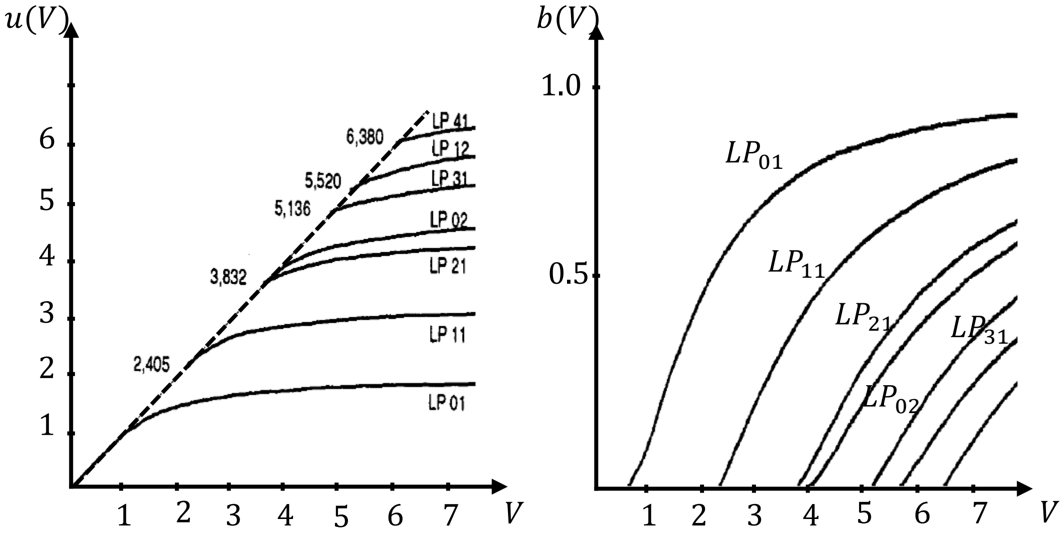
- l'indice p de la fonction de Bessel ; il caractérise la périodicité de la fonction $g(\theta)$
- le nombre q qui définit le nombre de valeurs de b possible.

6.3.2. Description standard

On remarque que les équations obtenues n'utilisent que des grandeurs normalisées. On peut donc les résoudre une fois pour toutes et obtenir des résultats applicables à toutes les fibres à saut d'indice.

Nombre de modes et constante de propagation

La figure suivante est un tracé des solutions $u(V)$ et de $b(V)$ en fonction de V:



$Fig. 6.2$: $variations\ de\ u\ (V)\ et\ b\ (V)\ pour\ les\ principaux\ modes\ LP_{pq}$

Les variations de $u\ (V)$ montrent que pour $V\ <\ 2{,}405$; le mode LP_{01} se propage seul. La fibre est alors dite monomode. Le mode LP_{01} existe toujours et n'a donc pas de fréquence de coupure. La valeur $V =\ 2{,}405$ est la fréquence de coupure normalisée du mode LP_{11}:
Le nombre de modes dans la fibre croit avec V.
Les variations de $b(V)$ montrent que pour chaque mode, $b(V)$ croit de 0 à 1 lorsque V augmente depuis la fréquence de coupure.
Chacun des modes a une constante de propagation unique c'est à dire un indice effectif caractéristique :

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} = \sqrt{n_g^2 + b(n_c^2 - n_g^2)}$$

Lorsque V croit, cet indice effectif croit de l'indice de la gaine n_g , celui du cœur n_c. Aux faibles valeurs de V; le mode s'étend dans la gaine, alors qu'aux fortes valeurs, il est confiné dans le cœur.

6.3.3. Structure de modes :

Les modes LP_{pq} ainsi déterminés ont une amplitude décrite transversalement par la fonction $A_p(r, \theta)$. Ils sont donc caractérisés :

- au niveau du cœur de la fibre, par des oscillations en $r\ et\ \theta$. Le nombre d'extrema de l'oscillation en r est égal au second indice de la notation

- au niveau de la gaine, par une décroissance pseudo-exponentielle (le premier indice détermine la périodicité de la variation angulaire de cette distribution). Ces caractéristiques sont illustrés par la figure ci-dessous.

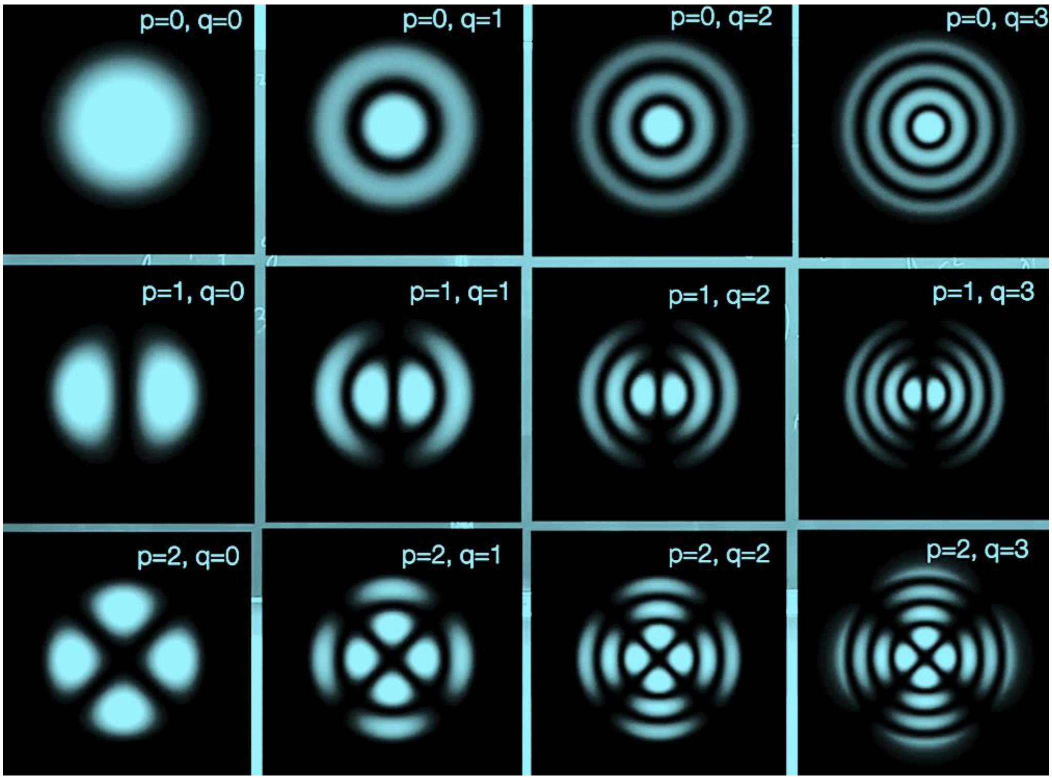


Fig 6.3. $images\ des\ distributions\ d'intensité\ de\ quelques\ modes\ LP$

6.4. Fibres à gradient d'indice

Il existe des fibres dont la structure est plus complexe, par exemple, avec un profil continu d'indice $n(x)$

On se place encore dans le cas d'une onde scalaire $A(r, \theta, z, t)$ qui obéit à l'équation de propagation (1) :

$$\Delta A - \frac{n^2(x)}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \qquad (12)$$

Les solutions dépendent bien sûr du choix du profil $n(x)$, lequel choix offre une liberté importante pour contrôler les propriétés finales de la fibre. Le gradient de l'indice permet de limiter la dispersion.

Nous considérerons ici un guide dont l'indice de réfraction $n(x)$ est une fonction parabolique pour $0 \leq r \leq a$ et une constante pour $r \geq a$

$$n^2(r) = n^2\left[1 - \Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

On supposera ici que le diamètre de la fibre $2a$ est grand et que les modes restent confinés dans la partie parabolique.
En résolvant l'équation (1), nous obtenons :

$$-\frac{n^2\omega^2}{c^2}\left[1-\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]=\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{f''(r)}{f(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}+\frac{h''(z)}{h(z)}$$

$$\frac{f''(r)}{f(r)}+\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{n^2\omega^2}{c^2}\left[1-\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]-\frac{p^2}{r^2}-k_z^2=0$$

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)+\left\{\frac{n^2\omega^2}{c^2}\left[1-\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]-\frac{p^2}{r^2}-k_z^2\right\}f(r)=0$$

La résolution de cette équation fait appel à l'équation de Schrödinger d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont les fonctions de Gauss-Hermite.

CHAPITRE VII

Couplage des modes

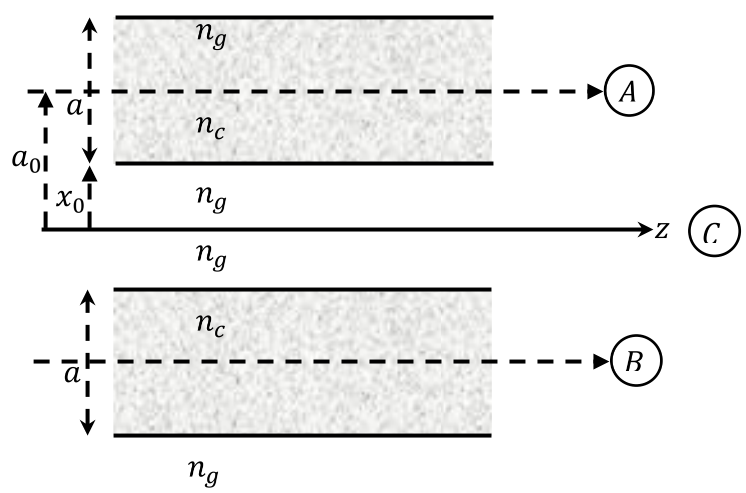
7.1. Introduction :

Pour plusieurs applications de l'optique guidée, il faut pouvoir transférer la puissance transportée par un guide dans un autre guide d'ondes. Ce couplage d'énergie entre deux guides diélectriques se fait dans la partie évanescente des deux modes lorsque les guides sont près l'un de l'autre.

Nous allons voir dans ce chapitre comment deux modes guidés peuvent échanger de l'énergie au cours de leur propagation. Il pourra s'agir de modes appartenant à deux guides différents ou à un même guide. Dans le premier cas, on décrira la perturbation qu'apporte le second guide à la propagation des ondes dans le premier; dans le second cas, c'est une perturbation locale des caractéristiques du guide qui induit ce couplage entre modes. On partira donc des modes supportés par les guides non perturbés et l'on introduira la perturbation. Cette méthode est aussi utilisée dans l'étude de la diffraction par les milieux épais.

7.2. Guides plans couplé : Mode TE pair

Afin de bien comprendre ce mécanisme de couplage, nous présenterons ici la solution exacte de deux guides plans symétriques couplés.



7.2.1. Solution exacte pour les guides plans symétriques couplés

La figure ci-dessous montre deux guides plans d'indice n_1 et n_2 séparés par une distance $2x_0$. La solution électromagnétique des modes de ce guide s'effectue selon la même procédure que celle du guide plan. On cherche pour chacune des régions des solutions des équations de Maxwell qui contiendront l'énergie dans les régions guidées A et B. La géométrie de la structure nous indique que les modes pourront encore se décomposer en deux familles soit les modes TE et TM. Ces modes ont tous la même constante de propagation β dans les cinq régions de la structure, on écrit donc :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} exp - j\beta z$$

$$\vec{H} = \overrightarrow{H_0} exp - j\beta z$$

On écrira ici explicitement seulement les composantes tangentielles des champs soit E_{0y}et H_{0z}sur lesquelles s'appliquent les conditions aux limites afin de simplifier l'écriture de l'ensemble des modes. Dans la région en haut du guide A i.e. $x > (a_0 + a)$ et en bas du guide B i.e. $x < -(a_0 + a)$on exigera des solutions de la forme $exp - wx$ afin de contenir la puissance dans la structure. Par la suite, on demandera la continuité des champs E_y et H_z aux interfaces $x < \pm|(a_0 + a)|$. On peut ici sauter ce détail de l'analyse et écrire les champs des guides A et B sous une forme qui assure cette continuité.

Il nous faut maintenant écrire la solution dans la région de couplage C et s'assurer par la suite des conditions aux limites AC et BC. Les champs dans la région de couplage devra être de type évanescent $exp - wx$ afin de s'assurer de guider l'énergie dans le guide A.
D'autre part, le guide B exigera dans la région C une onde de type $expwx$ afin de pouvoir contenir sa puissance. Afin de satisfaire les deux guides, il faut une solution de la forme $(E_1 exp - wx + E_2 expwx)$. Il est plus facile pour ce type de problème d'utiliser une forme $(E_1 sinhwx + E_2 coshwx)$ puisqu'on peut alors séparer le couplage en couplage ANTISYMÉTRIQUE $(E_2 = 0)$ et en couplage SYMÉTRIQUE $(E_1 = 0)$.
Il nous reste enfin à exiger la continuité des champs Ey et Hz à l'interface AC et BC. Pour le couplage antisymétrique on trouve :
à $x = x_0$

$$E_1 sinh(wx_0) = E_A cos(ua)$$

$$E_1 wcosh(wx_0) = E_A u.sin(ua) \qquad \text{avec} \qquad u^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2$$

et à $x = -x_0$

$$E_1 sinh(wx_0) = -E_B cos(ua)$$

$$E_1 wcosh(wx_0) = -E_B u.xin(ua)$$

Par inspection on conclut qu'il faut avoir : $E_A = -E_B$

Finalement, nous obtenons l'équation caractéristique suivante :

$$tan(ua) = \frac{w}{u} coth(wx_0)$$

Ces équations nous indiquent que le couplage antisymétrique fait en sorte que le champ du guide B est hors de phase avec le champ du guide A. Notons aussi que lorsque la distance entre les deux guides x_0 devient très grande, l'équation caractéristique devient bien la même que celle du mode d'un guide simple TE-Pair puisque $coth(wx_0) \to 1$

De même pour le couplage symétrique les équations de continuité nous donnent à $x = x_0$:

$$E_2 cosh(wx_0) = E_A cos(ua)$$

$$E_2 w sinh(wx_0) = E_A u. sin(ua) \qquad \text{avec toujours} \qquad u^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2$$

et à $x = -x_0$:

$$E_2 cosh(wx_0) = E_B cos(ua)$$

$$E_2 w sinh(wx_0) = E_B u. sin(ua)$$

Par inspection on conclut qu'il faut avoir : $E_A = E_B$

Finalement, nous obtenons l'équation caractéristique suivante :

$$tan(ua) = \frac{w}{u} tanh(wx_0)$$

Encore ici, on note que lorsque x_0 devient très grande, $tanh(wx_0) \to 1$ et retrouve l'équation caractéristique du mode TE-Pair.

L'équation caractéristique des modes antisymétriques est différente de celle des modes symétriques lorsque les deux guides sont séparés par une distance finie x_0. La solution de ces équations caractéristiques pour un système donné, nous amènera deux constantes de propagation β différentes soit pour le couplage antisymétrique et β_2 pour le couplage symétrique. À ces deux constantes correspondra respectivement les constantes transverses u_1 et u_2. Puisqu'il n'y a pas de fréquence de coupure pour ce mode couplé, il s'ensuit que ces deux modes β_1 et β_2 se propageront dans chacun des guides en même temps. On trouve alors que le champ E_y dans chacun des guides s'écrira :

$$\begin{cases} E_y^{(A)} = E_{A_1} cos(u_1(x - a_0)) e^{-j\beta_1} + E_{A_2} cos(u_2(x - a_0)) e^{-j\beta_2} \\ E_y^{(B)} = -E_{A_1} cos(u_1(x + a_0)) e^{-j\beta_1} + E_{A_2} cos(u_2(x + a_0)) e^{-j\beta_2} \end{cases}$$

Pour le mode antisymétrique (β_1) on a posé que $E_{B_1} = -E_{A_1}$ et pour le mode symétrique on a posé que $E_{B_1} = -E_{A_1}$. Ceci complète la solution exacte des deux guides plans séparés par la distance de couplage x_0.

Une conséquence directe de cette solution est un échange de puissance entre le guide A et B. En effet, si on calcule la puissance transportée dans le guide A et B on trouve :

$$\begin{cases} P_A = \dfrac{P_0}{2}[1 + cos(\Delta\beta.z - \Delta\varphi)] \\ P_B = \dfrac{P_0}{2}[1 - cos(\Delta\beta.z - \Delta\varphi)] \end{cases}$$

où $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ et $\Delta\varphi$ est la différence entre la phase de l'amplitude du champ symétrique E_{A_2} et celle du champ antisymétrique E_{A_1}. P_0 est la puissance totale dans le guide A et B. On peut donc définir une longueur de couplage z tel que :

$$\Delta\beta.z_0 - \Delta\varphi = \pi$$

7.2.2. Solution de faible couplage

Lorsque la distance x_0 qui sépare les deux guides augmente le couplage devient alors faible et une solution analytique des équations caractéristiques devient possible. Cette solution étant très importante en pratique nous en présenterons le développement ici.

Si (wx_0) est très grand on peut écrire alors que :

$$\begin{cases} coth(w_1x_0) \cong 1 + 2e^{-2w_1x_0} \\ \qquad\qquad et \\ tan(w_2x_0) \cong 1 - 2e^{-2w_2x_0} \end{cases}$$

On suppose maintenant que :

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta + \dfrac{1}{2}\Delta\beta_1 \begin{pmatrix} u_1 = u + \Delta u_1 \\ w_1 = w + \Delta w_1 \end{pmatrix} \\ \\ \beta_2 = \beta + \dfrac{1}{2}\Delta\beta_2 \begin{pmatrix} u_2 = u + \Delta u_2 \\ w_2 = w + \Delta w_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

C'est-à-dire que l'on suppose que la constante de propagation du mode antisymétrique β_1 et du mode symétrique β_2 sont très près de la constante du guide isolé β. Afin de trouver une solution approximative pour les équations caractéristiques, on montre d'abord qu'au premier ordre :

Travaux Dirigés
et
Fiches thématiques

POURQUOI FAIRE UNE FICHE THÉMATIQUE ?

Après avoir travaillé le cours et les Travaux Dirigés, on peut reformuler personnellement sa compréhension, mais si l'on doit rendre compte de sa relecture à plus long terme, c'est une autre question : deux semaines après, c'est difficile, à la veille d'examen, c'est impossible (*les recherches récentes montrent que le manque de sommeil causé par le fait de réviser peut amener l'étudiant à avoir une mauvaise performance ou le mener à l'encontre de l'objectif visé*) !

Or, les connaissances issues de ce travail sont utiles dans la mesure où elles peuvent être exploitées pour un bénéfice personnel : préparer son examen, nourrir sa réflexion, participer à une discussion scientifique, produire un travail professionnel, etc…

Par conséquent, il faut utiliser des outils qui permettent de pallier la disparition de l'information et de relancer la mémoire. Selon le type de collecte de données requis par la tâche à effectuer, on peut choisir :

- *les éléments du contenu :*
    - *soit ce qui est l'essentiel du cours et TD,*
    - *soit des données pertinentes qu'on s'est fixé ;*
- *la façon de les conserver (un résumé, une fiche de synthèse ou une fiche thématique).*
  En ce qui concerne la fiche thématique, son avantage est de réunir sur une même feuille ou sur quelques cartons des informations reliées à un même thème et tirées de plusieurs sources (notes prises du cours magistral, livres, TD).

Le défi, pour tout étudiant, est de retenir les connaissances sans avoir le fardeau de tout relire. C'est pourquoi il importe de prendre des notes, de se faire des fiches qui gardent vives les informations-clés, celles qui déclenchent la mémoire.

Les informations proposées dans ces fiches thématiques ne sont en aucun cas des résumés du cours mais peuvent être consultées après avoir travaillé les Travaux Dirigés qui concernent le thème étudié.

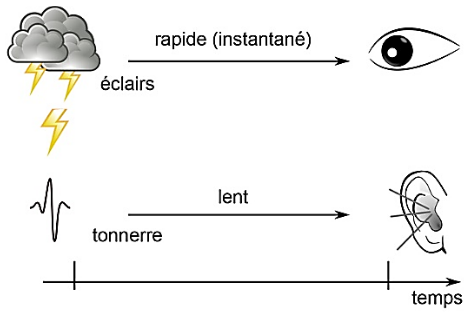
Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Filière : SMP 6
TD : Propagations Guidées
Année Universitaire : 2017/2018

Série 1

Exercice1 : Propagation d'une onde acoustique

Une onde acoustique, de fréquence $\nu = \mathbf{383Hz}$, est représentée en un point $\boldsymbol{M}$ par l'expression complexe : $\boldsymbol{\psi(\vec{r},t) = A.exp[j\,(\omega t - 3x + 4y - 5z)]}$



1. Quelle est la nature de sa surface d'onde ?
2. Quel est le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?
3. Montrer que $\boldsymbol{\psi(\vec{r},t)}$ satisfasse l'équation de propagation
4. Déterminer les cosinus directeurs de la direction de propagation
5. Donner l'expression de cette même onde se propageant dans une direction normale à l'axe $(\boldsymbol{Ox})$ et faisant l'angle $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ avec l'axe $(\boldsymbol{Oz})$.

Exercice2 : Propagation libre

On considère les champs électriques se propageant à la vitesse v:

$$\vec{E}_1(x,y,z,t) = \cos(\omega t - ky)\,\vec{k} \quad et \quad \vec{E}_1(x,y,z,t) = \cos(\omega t + kx)\,\vec{k}$$

1. Expliciter les vecteurs d'onde $\vec{k}_1\ et\ \vec{k}_2$ (norme et direction).
2. Exprimer le champ résultant $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.
   a. Montrer qu'il se propage.
   b. Déterminer son vecteur d'onde $\vec{k'}$ (norme et direction).
   c. Cette onde se propage-t-elle par ondes planes ?
3. Déterminer le champ $\vec{B}$ associé au champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

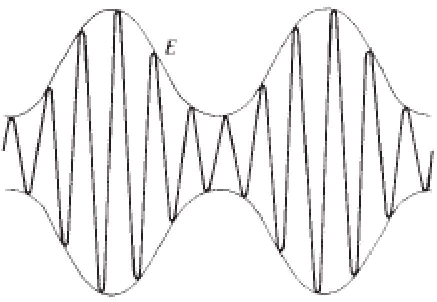
Pourquoi ne peut-on utiliser directement la relation vectorielle : $\vec{B} = \left(\frac{1}{v}\right)\vec{u} \wedge \vec{E}$ entre les champs de vecteurs $\vec{E}\ et\ \vec{B}$?

Comment aurait-on pu calculer directement $\vec{B}$ à partir de $\vec{E}$?

Exercice3 : Superposition des ondes

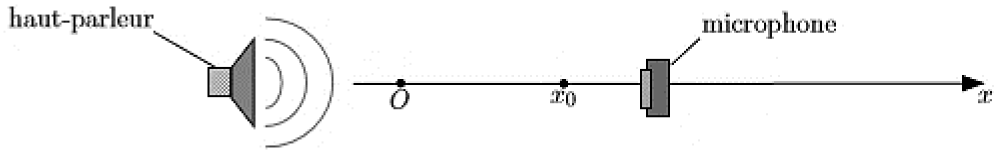
La figure ci-contre montre une porteuse de fréquence ω_c modulée en amplitude par une onde sinusoïdale de fréquence ω_m c'est-à-dire $E = E_0(1 + a.cos\omega_m).cos\omega_c t$

Montrer que cela équivaut à la superposition de trois ondes de fréquences $\omega_c, \omega_c - \omega_m\ et\ \omega_c + \omega_m$. Quand un grand nombre de fréquences de modulation sont présentes, on écrit E comme une série de Fourier et l'on somme sur toutes les valeurs de ω_m.



Les termes $\omega_c + \omega_m$ constituent la *bande latérale supérieure*, et tous les termes $\omega_c - \omega_m$ forment la *bande latérale Inférieure*. Quelle largeur de bande sera nécessaire pour transmettre l'intégralité de la gamme audible ?

Exercice 4 : **Mesures acoustiques dans l'air (effet Doppler)**



1) Le radar alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence $\nu = (1000 \pm 10)\ Hz$ crée dans l'air une onde plane progressive le long de l'axe Ox. La surpression au point x et à l'instant t est de la forme :
$$p(x,t) = p_0\ sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$
Expliquer le sens de l'expression onde plane progressive.
2) Un microphone placé au point x sur l'axe génère une tension $u(t) = u_0\ sin(\omega t - \varphi)$ proportionnelle à la surpression p au point x. Un dispositif mesure le déphasage φ. Des mesures pour diverses positions du microphone montrent que le déphasage φ dépend de x suivant la loi $\varphi = ax + b$ où
$a = (18,4 \pm 0,2)\ rad\ m^{-1}$. En déduire la valeur numérique de la vitesse du son $c \pm \Delta c$.
3) On déplace le microphone le long de Ox à la vitesse (algébrique) constante v. A l'instant $t = 0$, le microphone se trouve en x_0 .
3.a) Quelle est la position x du microphone à l'instant t ?
3.b) Montrer que dans cette expérience le microphone génère une tension
$u_d(t) = u_0\ sin(\omega' t - \varphi')$
de fréquence ν' différente de ν et exprimer ν' en fonction de ν, v et c.
3.c) On mesure $\nu' - \nu = (1,20 \pm 0,01)$Hz
Exprimer la vitesse v du microphone en fonction des grandeurs mesurées. Calculer numériquement $v \pm \Delta v$. Préciser sur un dessin le sens de déplacement du microphone.
4) En réalité, l'onde générée par un haut-parleur n'est pas une onde plane. Décrire l'onde réellement créée; son amplitude est-elle constante?

Exercice 5 : **Communication avec un sous-marin**

I. Etude géométrique

Cet exercice examine quelques aspects de la propagation d'ondes électromagnétiques d'un émetteur terrestre vers un sous-marin en plongée dans un océan lointain. On envisage d'utiliser les fréquences:

$\nu_1 = 40\ Hz$ bande ELF (extremely low frequency);

$\nu_2 = 4 kHz$ bande VLF (very low frequency);

$\nu_3 = 400\ kHz$ bande MF (medium frequency).

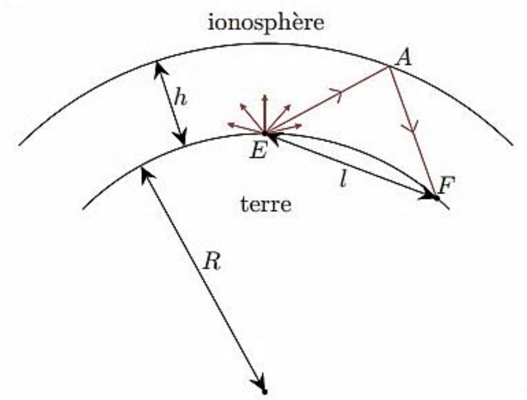
La propagation de l'onde a d'abord lieu dans le guide d'onde formé entre la surface de la terre ou des océans et l'ionosphère. On fera l'hypothèse simplificatrice que les parois du guide sont parfaitement conductrices. Cette onde, nommée dans ce problème onde G (guidée), est étudiée dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique (partie I) puis de l'électromagnétisme (partie II).

On étudie la propagation de l'onde G entre la terre et l'ionosphère dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique. On fait les hypothèses:

–la terre est une boule parfaitement conductrice de rayon $R = 6400\ km$;

– l'ionosphère est un milieu parfaitement conducteur situé au-dessus de l'altitude $h = 75\ km$;

–les rayons de l'onde sont rectilignes dans la basse atmosphère (assimilée au vide) entre la terre et l'ionosphère et se réfléchissent suivant les lois de Snell-Descartes sur les surfaces de la terre et de l'ionosphère.



L'émetteur radio E, situé à l'altitude 0, rayonne l'onde G dans toutes les directions. Le récepteur F est également situé à l'altitude 0.

1) On envisage le type de propagation où le récepteur reçoit l'onde émise après une seule réflexion en A sur l'ionosphère.

Montrer que ce type de propagation n'a lieu que si la distance l de l'émetteur au récepteur est inférieure à une distance l_c.

Déterminer l_c en fonction de R et h (on donnera une expression simple compte tenu du fait que $h \ll R$).

Calculer la valeur numérique de l_c..

2) Faire un schéma qui montre que l'onde G peut atteindre un point quelconque de la surface terrestre en suivant un chemin qui comporte plusieurs réflexions sur l'ionosphère et la terre.

II. Etude électromagnétique (Propagation guidée)

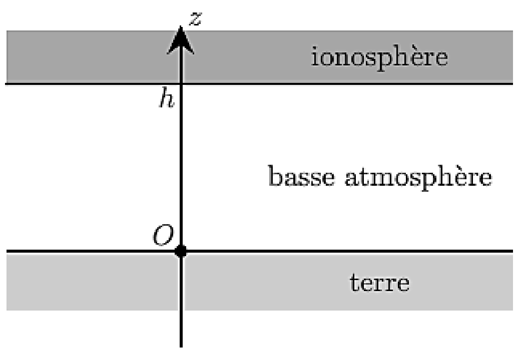
La propagation de l'onde G à grande distance $l \gg h$ est étudiée dans un modèle de Terre plate :

– le demi-espace $z \leq 0$ est un conducteur parfait qui représente la terre ;

– le demi-espace $z \geq h = 75\ km$ est un conducteur parfait qui représente l'ionosphère ;

– la région $0 \leq z \leq h$ entre ces conducteurs est vide et représente la basse atmosphère.

On se propose de montrer que l'onde P obtenue précédemment peut, par restriction à la région $0 \leq z \leq h$, décrire une onde guidée entre les deux conducteurs.



a) Justifier que les conditions aux limites sont:

– $\vec{E}(x, y, z, t)$ est parallèle à $\vec{u}_z$ $\forall x, y, t$ pour $z = 0, h$;

– $\vec{B}(x, y, z, t)$ est perpendiculaire à $\vec{u}_z$ $\forall x, y, t$ pour $z = 0, h$.

b) Montrer que les conditions aux limites sont vérifiées pour les valeurs $\theta = \theta_n$ données par $\cos\theta_n = nU$ avec $n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$

où U est une constante que l'on exprimera en fonction de λ et h.

c) Pour chacune des fréquences $\nu_1 = 40\ Hz$, $\nu_2 = 4\ kHz$ et $\nu_3 = 400\ kHz$, déterminer le nombre N dans l'équation précédente et les valeurs numériques, en degrés, des angles θ_0 et θ_1 (s'ils existent). On rappelle que $0 < \theta \leq 90^0$

d) Pour quelles fréquences le guide d'onde est-il monomode ? Donner la réponse de façon littérale, puis numérique.

Exercice 6 : **Ondes d'une membrane**

On étudie les ondes transverses d'une membrane de tambour. Au repos la membrane est tendue dans le plan Oxy d'un repère cartésien *Oxyz*. En présence d'une onde le point *M* de coordonnées *(x, y, 0)* de la membrane au repos se déplace perpendiculairement au plan *Oxy* ; ses coordonnées à l'instant t sont alors *(x, y, s(x, y, t))*.
La fonction *s(x, y, t)* satisfait à l'équation d'onde à deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0 \quad \text{où } u \text{ est une constante.}$$

1) Déterminer la dimension de *u*. Expliquer le mot transverse dans onde transverse.
2) On considère la fonction $s_1(x, y, t) = A\sin(k_x + k_x - \omega t)$ où A, k_x , k_y *et* ω sont des constantes réelles (avec $\omega > 0$ *et* $A > 0$).
Ecrire la représentation complexe $\widehat{s_1}(x, y, t)$ de $s_1(x, y, t)$ 3) et trouver les solutions de l'équation d'Alembert Décrire les caractéristiques de l'onde (est-elle progressive? stationnaire? plane? harmonique? Quelle est sa direction, son sens et sa vitesse de propagation ?).

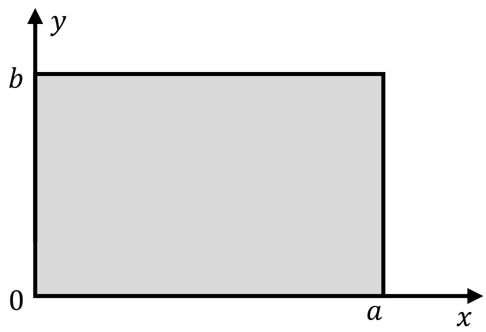
4) La membrane de tambour est tendue sur un cadre rectangulaire de dimension $a \times b$. Au repos, la membrane a la forme du rectangle du plan *Oxy :*

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b.$$

Les bords de la membrane sont maintenus fixés, de sorte qu'une onde *s(x, y, t)* de la membrane doit satisfaire aux conditions aux limites :

$$s(0, y, t)= 0 \qquad s(x, 0, t) = 0$$
$$s(a, y, t)= 0 \qquad s(x, b, t) = 0$$

pour tout $x \in [0, a]$, tout $y \in [0, b]$ et à tout instant *t*.



Forme de la membrane

On considère une onde de la forme :

$$s(x, y, t)=A\sin(k_x+\varphi_x).\sin(k_y+\varphi_y)\sin(\omega t+\psi)$$

où $A > 0, k_x > 0, k_y > 0, \omega > 0, \varphi_x$, φ_y *et* ψ sont des constantes réelles.
Montrer que *s(x, y, t)* est une solution de l'équation d'onde de propagation à condition *que* $k_x > 0, k_y$ *et* ω vérifient la relation $\omega = u\sqrt{k_x^2+k_y^2}$

5) Montrer que l'on doit avoir $\sin(k_x a) = 0$ et $\sin(k_y b) = 0$. En déduire que k_x *et* k_y ne peuvent prendre que certaines valeurs et déterminer toutes ces valeurs.
6) Quelles sont alors les fréquences des ondes correspondantes ? Déterminer, en fonction de *u* , *a* et *b* la fréquence ν_0 qui est la plus petite de ces fréquences.
7) On donne $a = 20cm, b = 15cm$ *et* $u = 60\ m^{-1}$. Déterminer numériquement ν_0 ainsi que les quatre fréquences les plus basses suivantes ν_1, ν_2, ν_3 *et* ν_4 ($\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4$) des ondes stationnaires de la membrane.
8) Quels sont les nœuds de l'onde stationnaire de fréquence ν_4? Les représenter sur un schéma.

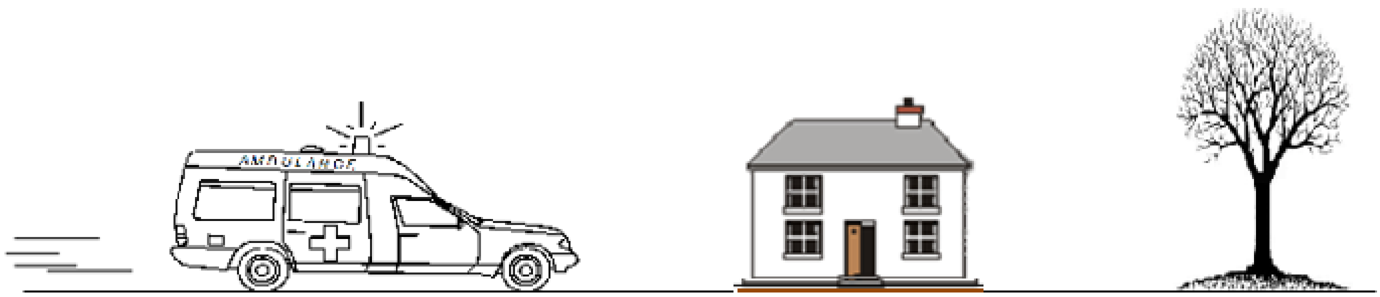
Fiche thématique n°1 : effet Doppler et Radars

Quel rapport entre un contrôle routier de vitesse, un sauvetage en mer, la gestion d'un aéroport, un examen cardiologique ou une échographie, un bulletin météo et la théorie de l'expansion de l'univers ?

Réponse : Un effet qui s'applique à tous types d'ondes (sonores et électromagnétiques principalement) et qui est à la base de nombreuses réalisations : L'effet Doppler

1 – L'Effet Doppler

Qui n'a pas vécu l'expérience classique où, placé en observateur en bord de route, on perçoit un son de fréquence supérieure à la fréquence du son émis par la sirène d'une ambulance, lorsque celle-ci s'approche, fréquence qui s'abaisse brusquement au moment du croisement, prenant alors une valeur inférieure, alors que l'ambulance s'éloigne. Ces constations sont très nettement accentuées lorsqu'il s'agit par exemple de 2 trains se croisant à grande vitesse, l'un utilisant un avertisseur.



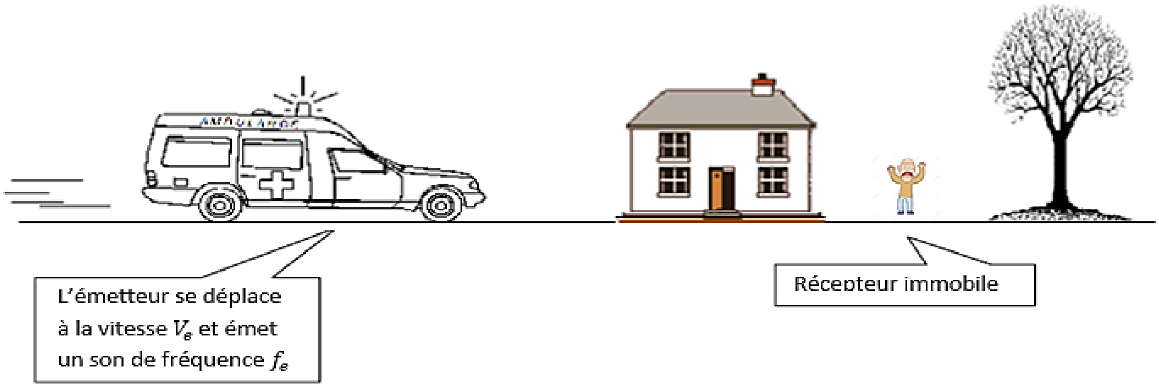
*Si une onde acoustique est émise à une certaine fréquence, lorsque la distance entre l'émetteur et le récepteur varie en fonction du temps, la fréquence de l'onde semble varier. Ce phénomène physique est connu sous le nom d'*effet Doppler.

Christian Doppler

C'est en 1842 que Doppler publie son article sur le comportement des ondes. Indépendamment, mais ultérieurement, Fizeau découvre aussi ce phénomène et l'applique aussi à la lumière. C'est pourquoi on parle d'effet Doppler-Fizeau lorsqu'on parle d'ondes lumineuses.

Hippolyte Fizeau

2 – Émetteur mobile – Récepteur immobile



Appelons c la vitesse du son (en m/s). Pendant une période, temps T_e ($T_e = \frac{1}{f_e}$), le premier front d'onde a parcouru la distance d_f telle que $d_f = c.T_e$

Pendant ce temps-là l'émetteur c'est déplacée de la distance de telle que $d_e = V_e\,.T_e$

Pour notre oreille l'intervalle de temps entre deux fronts d'onde est inférieur à l'intervalle réel lors de l'émission, le deuxième front d'onde ayant moins de distance à parcourir.

Le deuxième front d'onde est espace du premier de :

$$d = d_f - d_e = c.T_e - V_e\,.T_e = (c - V_e)\,.T_e$$

Il en est de même pour les fronts d'onde suivants.

Chaque front d'onde ayant une vitesse c, il mettra pour parcourir cette distance et atteindre à son tour l'émetteur un temps T :

$$T = \frac{(c-V_e)\,.T_e}{c} \quad \text{soit} \quad T = \frac{(c-V_e)}{c}\,T_e$$

Le son perçu par le récepteur a donc une fréquence apparente d'expression :

$$f = \frac{c}{c - V_e} f_e$$

$\frac{c}{c-V_e c} > 1$ donc $f > f_e$. L'observateur perçoit un son plus aigu.

Lorsque le camion s'éloigne, Le son perçu par le récepteur a donc une fréquence apparente d'expression : $f = \frac{c}{c+V_e c} f_e$ et l'observateur perçoit un son plus grave.

Et lorsque l'émetteur et récepteur se déplacent simultanément

- Emetteur et récepteur se déplacent dans le même sens.

Avant le dépassement : $f = \frac{c-V_r}{c-V_e} f_e$

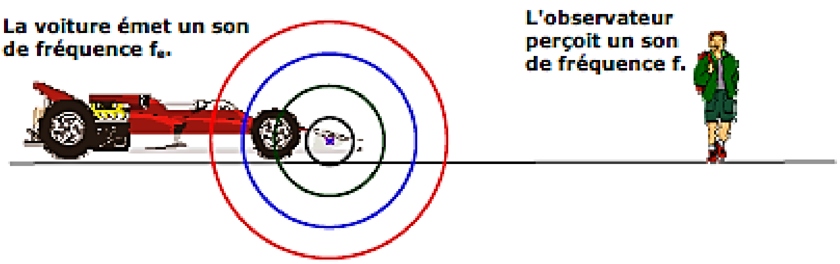
Après le dépassement : $f = \frac{c+V_r}{c+V_e} f_e$

- Emetteur et récepteur se déplacent en sens inverse.

Avant le dépassement : $f = \frac{c+V_r}{c-V_e} f_e$

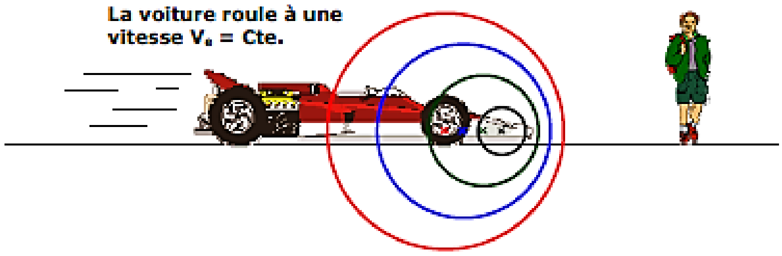
Après le dépassement : $f = \frac{c-V_r}{c+V_e} f_e$

3 – En résumé



La voiture est à l'arrêt.

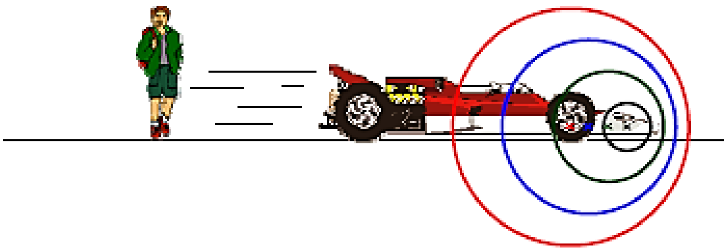
$$f = f_e$$



La voiture approche de l'observateur immobile.

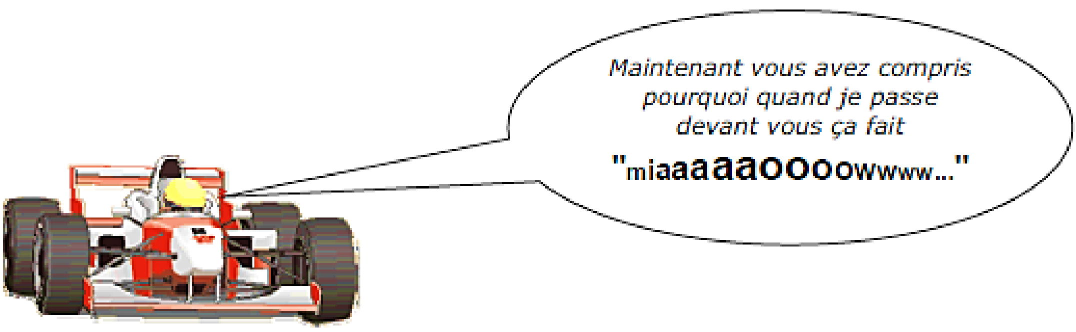
➲ Les fronts d'onde sont "resserrés".
➲ $f > f_e$
➲ Le son est perçu plus aigu.
➲ $\boxed{f = \dfrac{c}{c - V_e} \cdot f_e}$

c : vitesse du son



La voiture s'éloigne de l'observateur immobile.

➲ Les fronts d'onde sont "plus écartés".
➲ $f < f_e$
➲ Le son est perçu plus grave.
➲ $\boxed{f = \dfrac{c}{c + V_e} \cdot f_e}$



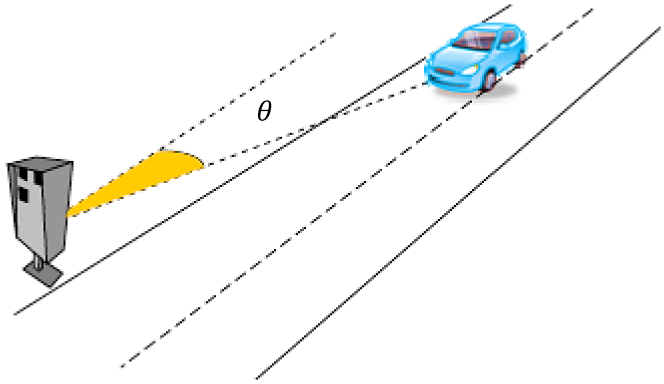
4 – Le Radar

La première partie de cette étude a utilisé comme support les ondes acoustiques, mais l'effet Doppler est aussi applicable aux ondes électromagnétiques. L'effet Doppler est ainsi mis a profit pour mesurer les vitesses radiales de multiples objets, a toutes les échelles dans l'Univers. Le mot radar est un acronyme dont les lettres signifient : **R**adio **D**etection **A**nd **R**anging qui peut se traduire par " *Système de détection et de télémétrie par ondes radio* ". L'antenne diffuse vers une cible potentielle l'onde électromagnétique produite par un émetteur. Réfléchie par la cible, captée par l'antenne (qui joue donc un double rôle), cette onde est transmise au récepteur. Le changement de fréquence du signal par effet Doppler, permet de mesurer vitesse et position de la cible.

5 – Applications :

5.1. mesure de la vitesse d'un véhicule

Pour que les mesures réalisées par les radars (fixes ou mobiles) soient exactes, ceux-ci doivent être réglés à $\theta = 25°$ par rapport à l'axe du déplacement



Dans ce cas, la vitesse de l'émetteur $V_e = 0$ (ici le radar est immobile)

On obtient donc $f = \frac{c-V}{c} f_e$ Ce qui, après transformation donne : $V = \frac{c(f_e - f)}{f}$

Mais, attention, cette formule doit être corrigée :

D'une part, l'onde réceptionnée a parcouru un "aller-retour", il est donc nécessaire d'introduire le coefficient $\frac{1}{2}$ et d'autre part, la vitesse V ainsi calculée est la vitesse radiale. La vitesse réelle $V_{réelle}$ est donc telle que : $V = V_{réelle}.cos\theta$

On aboutit donc à : $V_{réelle} = \frac{c|f_e - f|}{2.f.cos\theta}$

5.2. L'échographie Doppler.

La différence des fréquences d'émission et de réception des ultrasons renvoyés par les éléments du sang permet de calculer la vitesse et la direction des globules rouges.

5.3. Le sonar

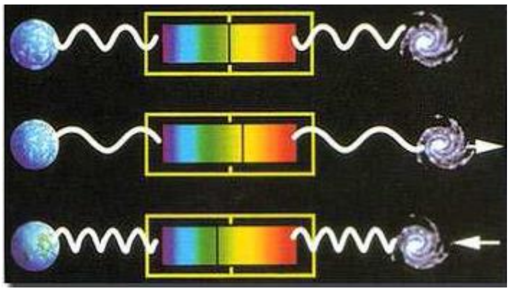
L'homme essaie tant bien que mal de copier le sonar biologique parfait qui équipe les cétacés. Le dauphin est capable d'émettre ou de réceptionner des sons ou ultrasons pour "parler" ou repérer et situer d'éventuelles cibles. La chauve-souris dispose d'un système d'écholocation identique dans le principe à celui du dauphin, à la différence près que celui-ci fonctionne dans l'air et non en mer.
Acronyme de **So**und **n**avigation **a**nd **r**anging, le sonar est utilisé par les marines de guerre, pour la pêche, pour la navigation maritime et fluviale. Les sonars peuvent être actifs (émission d'un son et écoute de son écho) ou passifs (écoute des bruits).

5.4. La localisation Doppler

Le décalage de fréquence entre la fréquence émise par la balise et la fréquence reçue par le satellite permet de localiser l'émetteur. Quand le satellite est à la verticale de la balise, la fréquence du signal reçu est égale à la fréquence du signal émis. C'est le point TCA (Time of Closest Approach)
En fonction du nombre de "messages" reçus, la précision de la localisation change. Elle peut varier de moins de 150 mètres a environ 15 kilomètres !

5.5. L'astronomie

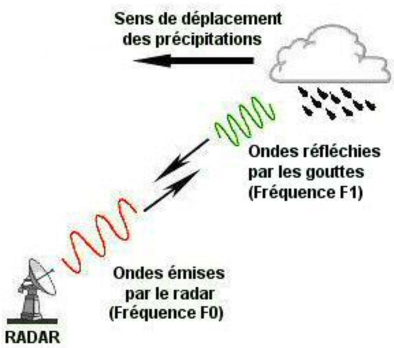
L'effet Doppler permet de déterminer directement la vitesse d'approche ou d'éloignement des objets célestes (étoiles, galaxies, nuages de gaz, etc.). Une source en mouvement (une étoile par exemple) émet des ondes qui se modifient (ce décalage apparait dans les raies du spectre). Plus la source va vite par rapport à l'observateur, plus ce décalage sera important. Pour des objets très rapides comme les galaxies ou les quasars, les décalages sont particulièrement importants.



Pour simplifier la compréhension, disons que quand la source s'approche de l'observateur, les raies sont décalées vers le bleu ; quand la source s'en éloigne, elles sont décalées vers le rouge.
C'est ce décalage quasiment systématique de la lumière des galaxies vers le rouge qui a démontré que l'univers était en expansion (Loi de Hubble).

5.6. La météorologie

Le principe d'un radar météorologique est d'émettre un faisceau d'ondes électromagnétiques dans l'atmosphère. Ces ondes sont réfléchies par tous les obstacles qu'elles rencontrent (pluie, neige, grêle, montagnes ...)
Le radar capte ces ondes réfléchies et évalue leur densité et la distance à laquelle elles se trouvent. Plus une perturbation atmosphérique est intense, plus l'espace entre les gouttelettes d'eau est réduit et plus la quantité d'ondes réfléchies est importante.
Le radar météorologique Doppler permet de plus, d'avoir une information sur la vitesse radiale de ces précipitations.



5.7. L'aviation

Le radar émet des suites d'impulsions d'ondes électromagnétiques représentant des messages d'interrogation. Les transpondeurs à bord des avions détectent ces interrogations, les décodent, et émettent à leur tour des suites d'impulsions d'ondes électromagnétiques représentant les réponses à chaque interrogation reçue. Les réponses des avions permettent de définir leur position.

5.8. Le GPS

Le GPS (Global Positioning System ou Géo Positionnement par Satellite) est un système de positionnement par satellites, capable de donner n' importe où sur le globe une position entre une centaine de

mètres et quelques centimètres, de jour comme de nuit.

La partie visible est un petit boîtier électronique (votre récepteur GPS), qui quel que soit l'heure et le lieu, indique : l'endroit exact, l'altitude, la vitesse, l'heure, et ce avec rapidité et précision.

Le principe du positionnement GPS est très proche du principe de triangulation. Le GPS mesure la distance entre l'utilisateur et un certain nombre de satellites de positions connues grâce au temps qu'a mis chaque signal à parvenir jusqu'à lui. On définit ainsi des sphères centrées sur des satellites et dont l'intersection donne la position.

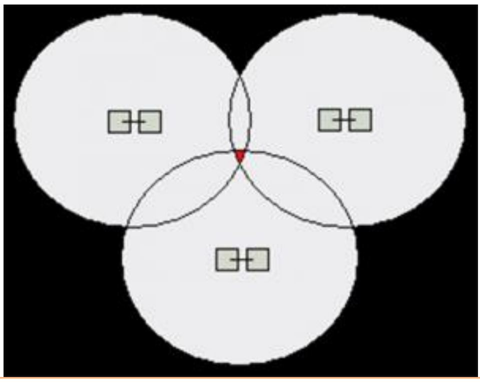
Remarque : Le principe de triangulation

La triangulation est une méthode qui permet de connaitre la position d'un point (dont la position est inconnue) à partir de points de référence (dont la position est connue).

La triangulation s'applique aux missiles pour déterminer la position dans l'espace d'une cible pour le missile en se basant sur des points qu'on connait déjà. Elle permet aussi de trouver une distance simplement en calculant la longueur entre 2 points d'un triangle puis en mesurant les 2 angles de ces points.

Fonctionnement :

3 GPS (Carrés gris) balayent un périmètre propre à chacun à la recherche de la cible (Triangle rouge). Par exemple on sait que la Cible est à 10 km du premier satellite, A 30 km du second et à 45 km du dernier. L'endroit où les 3 signaux se coupent forme une fleur et au milieu de cette fleur on localise la cible plus ou moins précisément en fonction du diamètre du signal et du type de satellite. On peut également utiliser plus de GPS pour plus de précision.



Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Filière : SMP 6
TD : Propagations Guidées
Année Universitaire : 2017/2018

Série 2

Exercice 1 : Variation de l'état de polarisation

Un faisceau lumineux parallèle de pulsation ω et de longueur d'onde λ se propageant selon Oz est décrit par :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y = E_0\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

L'amplitude E_0 est une grandeur essentiellement positive.
1. Montrer qu'il s'agit d'une vibration circulaire dont on précisera les axes et le sens de parcours.
2. On place une lame demi-onde dans le plan $z = 0$, la direction de l'axe rapide fait un angle de $0°$ avec Ox. Déterminer le champ $\vec{E}$ à la sortie de la lame demi-onde. Quel est le nouvel état de polarisation ?
3. On remplace la lame demi-onde par une lame quart- d'onde. Quel est le nouvel état de polarisation ?

Exercice 2 : Décomposition d'une onde polarisée elliptiquement

1. Écrire le champ électrique associé à une onde plane monochromatique à polarisation elliptique.

2. Écrire cette onde comme la superposition de deux ondes à polarisation circulaire. Représenter les polarisations correspondantes.

Exercice 3 : Lumière transmise par une lame entre polariseurs croisés

Un faisceau de lumière blanche traverse un ensemble de deux polariseurs croisés P et A. Entre P et A, on place une lame biréfringente, les faces étant perpendiculaires au faisceau incident et l'axe optique Ox étant disposé par rapport à P comme indiqué ci-contre. L'épaisseur de la lame est $e = 0{,}25\ mm$; les indices ordinaire n_o et extraordinaire n_e sont tels que n_o - $n_e = -0{,}173$. On considère l'intervalle de longueurs d'onde comprises entre $0{,}550$ et $0{,}581\ mm$ et on admet que $\Delta n = n_o$ - n_e est indépendant de λ dans cet intervalle.

1. Quelles sont les longueurs d'onde pour lesquelles aucune lumière n'émerge de A ?
2. Quelles sont les longueurs d'onde pour lesquelles la lumière sortant de A a même intensité que celle issue de P ?
3. Quelles sont les longueurs d'onde pour lesquelles la position de A n'influe pas sur l'intensité émergente, c'est-à-dire qu'une rotation quelconque de A ne modifie pas cette intensité issue de A ?

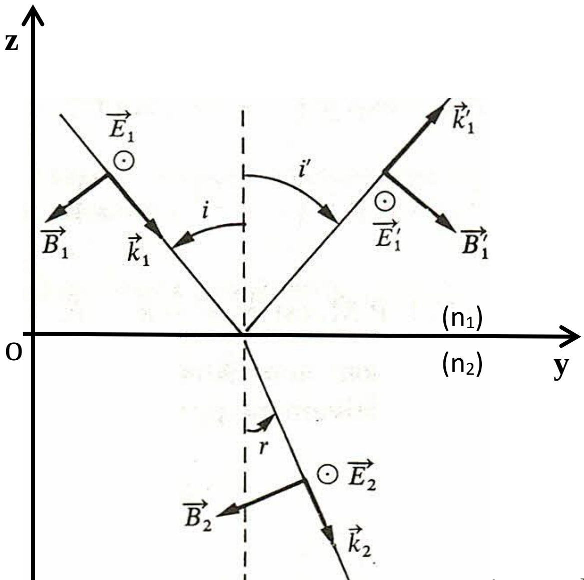
Exercice 4 : **Réflexion d'une onde de champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence.**

Deux milieux diélectriques parfaits, isotropes, homogènes et non magnétiques, de permittivités ε_1 et ε_2 , sont séparés par une surface plane S non parcourue par des courants.

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement (O.P.P.M.R) tombe sur S sous l'incidence i. L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, tel que S coïncide avec le plan xOy *et* tel que le vecteur d'onde appartienne au plan yOz (plan d'incidence) .

Le champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence et peut s'écrire : $\overrightarrow{E_1}= E_{10} exp j\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\right)\vec{\imath}$. On note $\vec{B}$, le champ magnétique de l'onde.

On admet l'existence d'une onde plane réfléchie et d'une onde plane transmise de même pulsation et de même polarisation que l'onde incidente et dont les vecteurs d'onde respectifs $\overrightarrow{k_1'}$ et $\overrightarrow{k_2}$ sont situés dans le plan d'incidence . On note respectivement $\overrightarrow{E_1'}$ et $\overrightarrow{B_1'}$, et $\overrightarrow{E_2}$ *et* $\overrightarrow{B_2}$ les champs électriques et magnétiques des ondes réfléchie et transmise, et i' et r les angles de réflexion et de réfraction



1. Donner les expressions des champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise, en introduisant les indices de réfraction des milieux. Quelles formes prennent-elles pour $z = 0$. On supposera $n_1 < n_2$.

2. Écrire les équations de continuité vérifiées par le champ électromagnétique. En déduire les relations entre les angles i, i' et r.

Exprimer les amplitudes des champs électriques réfléchi et transmis en fonction de E_{10} , i et r.

3. Calculer en $z = 0$ les vecteurs de Poynting associés aux diverses ondes. Définir et calculer le pouvoir réflecteur $R_\perp$ et le pouvoir de transmission $T_\perp$.

Étudier sommairement les variations de $R_\perp$ et de $T_\perp$. en fonction de i,

Exercice2 : **Réflexion oblique d'une onde de champ électrique parallèle au plan d'incidence.**

Deux milieux diélectriques parfaits, isotropes, homogènes et non magnétiques, de permittivités $\varepsilon_1$et ε_2 , sont séparés par une surface plane S non parcourue par des courants.

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement (O.P.P.M.R) tombe sur S sous l'incidence $i.$ L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}),$ tel que S coïncide avec le plan xOy *et* tel que le vecteur d'onde appartienne au plan yOz (plan d'incidence) .

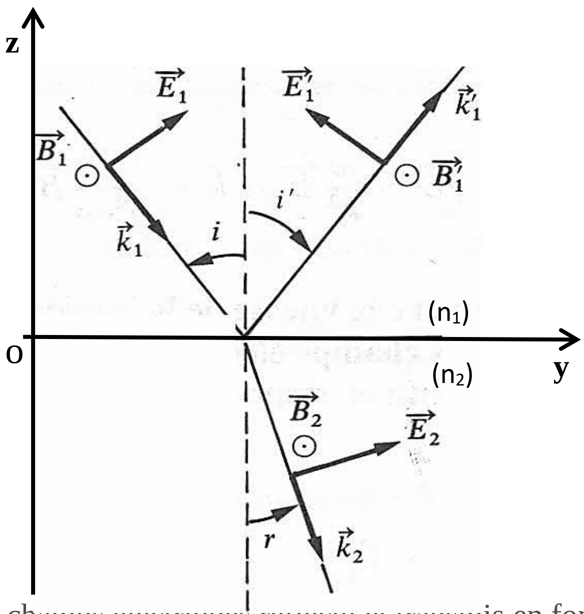
Le champ magnétique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence et peut s'écrire : $\overrightarrow{B_1}= B_{10} expj\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\right)\vec{\imath}$. On note $\vec{E}$, le champ électrique de l'onde.

On admet l'existence d'une onde plane réfléchie et d'une onde plane transmise de même pulsation et de même polarisation que l'onde incidente et dont les vecteurs d'onde respectifs $\overrightarrow{k_1'}$ et $\overrightarrow{k_2}$ sont situés dans le plan d'incidence. On note respectivement $\overrightarrow{E_1'}$ et $\overrightarrow{B_1'}$, et $\overrightarrow{E_2}$ *et* $\overrightarrow{B_2}$ les champs électriques et magnétiques des ondes réfléchie et transmise, et i' et r les angles de réflexion et de réfraction

1. Donner les expressions des champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise, en introduisant les indices de réfraction des milieux. Quelles formes prennent-elles pour $z = 0$. On supposera $n_1 < n_2$.

2. Écrire les équations de continuité vérifiées par le champ électromagnétique en $z = 0$.. En déduire les relations entre les angles i, i' *et* r.

.



Exprimer les amplitudes des champs électriques réfléchi et transmis en fonction de B_{10} , i *et* r.

3. Calculer en $z = 0$ les vecteurs de Poynting associés aux diverses ondes. Définir et calculer le pouvoir réflecteur $R_{\parallel}$ et le pouvoir de transmission $T_{\parallel}$.

Étudier sommairement les variations de $R_{\parallel}$ et de $T_{\parallel}$. en fonction de i,

Fichier thématique n°2 : Polarisation

Quel rapport entre un afficheur à cristaux liquides, un système de vision en 3D, des cristaux anisotropes, des molécules chirales, un filtre de lumière, la Brosse de Haidinger, le Pouvoir rotatoire d'une solution , la Photoélasticimétrie?

Réponse : Un effet qui s'applique aux ondes électromagnétiques principalement et qui est à la base de nombreuses réalisations : La Polarisation

1- Polarisation

La lumière est une onde, c'est-à-dire qu'elle est décrite par des signaux qui oscillent dans l'espace et le temps. Ces signaux sont les champs électrique et magnétique, d'où le nom d'onde électromagnétique.

La polarisation de la lumière résulte de cette théorie. Il en découle de nombreuses applications comme les verres polarisés qui servent à filtrer la lumière, et visualiser certains films en 3D, etc. Certains insectes et animaux utilisent la polarisation lumineuse pour s'orienter. La lumière polarisée semble également participer à la genèse d'un phénomène visuel entoptique appelé « Brosse de Haidinger ». Un phénomène entoptique est induit par l'œil lui-même (comme les mouches volantes, qui sont liées à des corps flottants du vitré). Il nous apprend que l'œil humain est également sensible à la polarisation de la lumière, même si cette capacité ne fait pas l'objet d'une utilisation quelconque…

Cette fiche présente les principales caractéristiques qui permettent d'appréhender le phénomène de polarisation de la lumière ; le formalisme mathématique est réduit au maximum, au profit d'une représentation schématique permettant une compréhension intuitive et graphique

2- La découverte et l'étude de la polarisation

Bartholin publie en 1669 ses observations des propriétés optiques du Spath d'Islande. Il avait remarqué qu'un rayon réfracté par un tel cristal produisait deux rayons, un rayon « ordinaire » et un rayon « extraordinaire ». Les deux rayons ayant des propriétés différentes : c'est la découverte de la biréfringence. Huygens étudiera aussi la double réfringence des cristaux de spath, et observera que l'intensité de la lumière transmise par deux cristaux dépend de l'orientation de ces derniers. Il y a donc une asymétrie autour de la direction de propagation : ce sont les bases de la polarisation.

Rasmus Bartholin

Bartholin publie en 1669 ses observations des propriétés optiques du Spath d'Islande. Il avait remarqué qu'un rayon réfracté par un tel cristal produisait deux rayons, un rayon « ordinaire » et un rayon « extraordinaire ». Les deux rayons ayant des propriétés différentes : c'est la découverte de la biréfringence.

Huygens étudiera aussi la double réfringence des cristaux de spath, et observera que l'intensité de la lumière transmise par deux cristaux dépend de l'orientation de ces derniers. Il y a donc une asymétrie autour de la direction de propagation : ce sont les bases de la polarisation.

Christian Huygens

Augustin Fresnel

Brewster établit en 1815 les lois de la polarisation par réflexion, avec notamment l'angle qui porte son nom : l'angle de Brewster.

Fresnel observera que les faisceaux ordinaires et extraordinaires produits par biréfringence ne peuvent pas produire d'interférences, ce qui lui permettra d'établir que la lumière est une onde transverse, et non longitudinale.

David Brewster

La synthèse de ces divers travaux sur la lumière et la polarisation viendra avec Maxwell qui achèvera de construire la théorie électromagnétique avec les fameuses 4 équations de Maxwell.

5.1. Polarisation linéaire

Une onde polarisée linéairement ressemble à la figure 1.1.

- Le schéma représente la forme de l'onde à un instant donné. Quand le temps augmente, les ondulations se déplacent vers la droite, dans la direction de propagation (horizontale sur le schéma), comme des vagues sur l'eau.

- Les flèches indiquent les champs électrique et magnétique en chaque point le long du rayon horizontal. Ceux-ci sont perpendiculaires entre eux.

- La caractéristique d'un faisceau polarisé linéairement (on omet souvent le terme "linéairement") est que le champ électrique conserve la même direction le long du faisceau (direction verticale dans l'exemple ci-dessous).

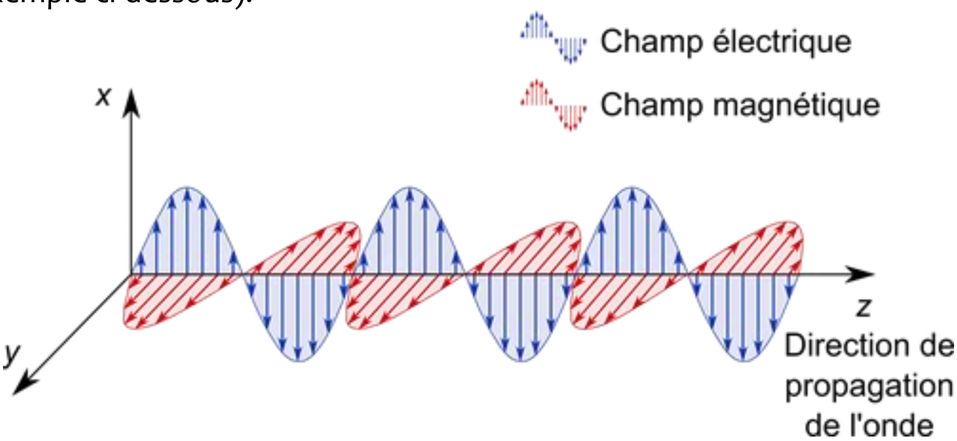


Figure 1.1. *Onde polarisée linéairement. L'onde est décrite par des champs électrique et magnétique qui oscillent*

5.2. Polarisation circulaire

La polarisation circulaire est un peu plus complexe que la polarisation linéaire. Dans ce cas, le champ électrique change d'orientation le long du faisceau et décrit une spirale. Il en va de même pour le champ magnétique, qui est toujours orthogonal au champ électrique (non représenté sur le schéma) :

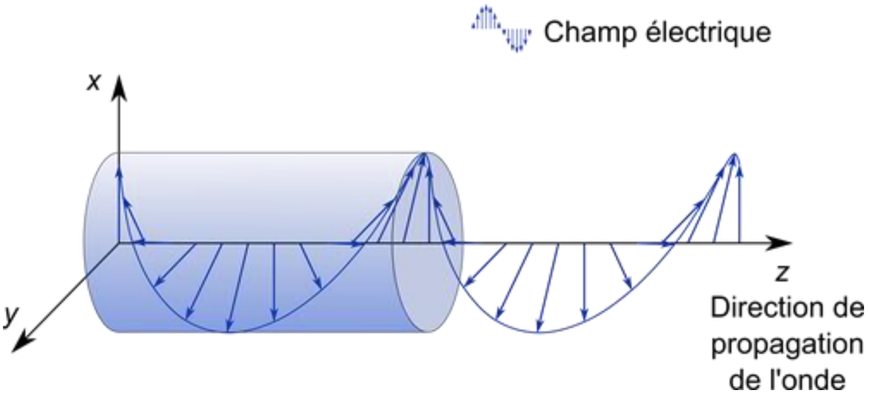


Figure 1.2. *Le champ électrique tourne le long d'un cylindre lorsque l'onde se propage dans la direction z. Le champ magnétique, non représenté, est perpendiculaire au champ magnétique et décrit donc lui aussi une spirale.*

En plus des polarisations linéaire et circulaire, il existe également la polarisation elliptique. Dans ce cas, le champ électrique décrit une spirale elliptique au lieu d'une spirale circulaire le long du faisceau.

5.3. Filtre polariseur

Un filtre polariseur (de polarisation linéaire) permet de ne laisser passer que la composante du champ électrique dans une direction donnée. Le faisceau de sortie est alors polarisé linéairement :

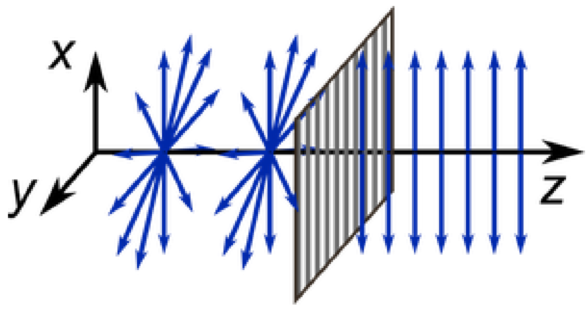
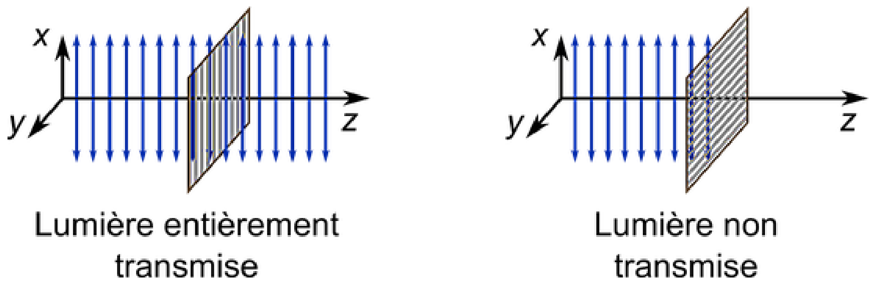


Figure 1.3. *Effet d'un filtre polariseur sur une lumière non polarisée*

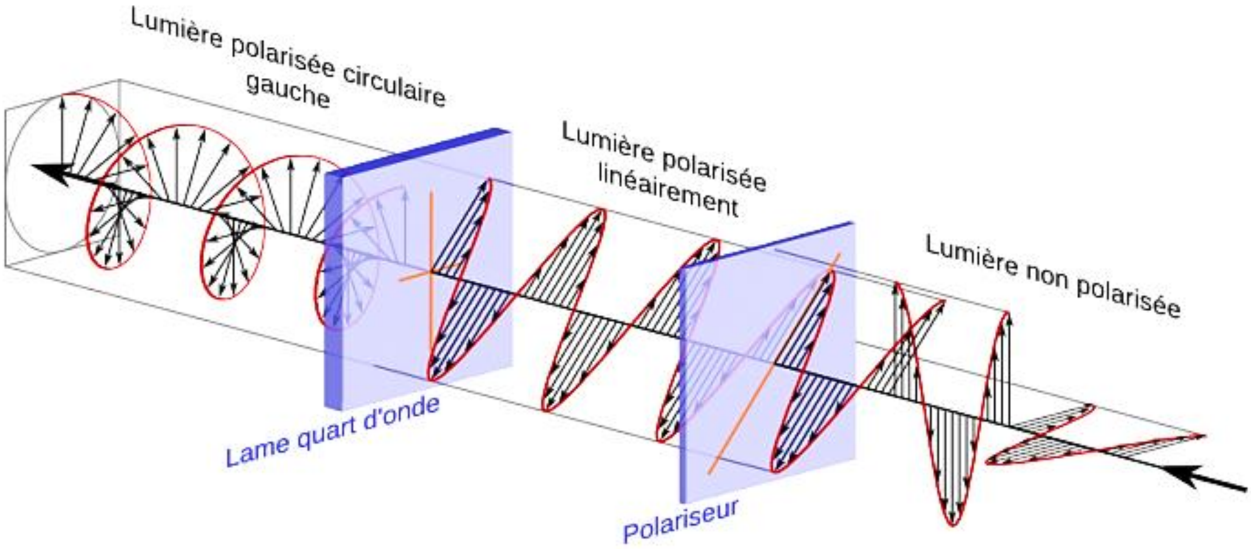
Il existe également des filtres qui transforment une lumière non polarisée en lumière polarisée circulairement.
Une question intéressante est de regarder ce qui se passe quand on envoie une lumière polarisée linéairement sur un polariseur linéaire. En fonction de l'orientation du polariseur, le filtre peut laisser passer toute la lumière, absorber toute la lumière, ou en laisser passer une partie, comme indiqué sur ce schéma :



5.4. Lames à retard

D'autres dispositifs optiques permettent de modifier la polarisation de la lumière. Les lames à retard sont utilisées à cet effet. Nous avons vu dans le cours qu'un faisceau polarisé peut être considéré comme étant la somme de deux composantes de polarisation orthogonales. Lors de la traversée d'une lame à retard, les propriétés de biréfringence de la lame vont faire qu'une des deux composantes est retardée par rapport à l'autre, ce qui va changer la polarisation en sortie. On dira que la lame a deux axes, un axe lent et un axe rapide.

Dans le cas d'une lame demi-onde, le déphasage entre les deux composantes est π (ou d'une demi-longueur d'onde, d'où son nom). De fait, si l'onde polarisée linéairement selon une direction faisant un angle θ avec l'axe rapide de la lame, elle ressortira avec une direction tournée d'un angle 2θ. L'utilisation principale qui en est faite est de changer la direction de polarisation linéaire. Une onde polarisée avec un angle $\theta = 45°$ par rapport à l'axe rapide aura en sortie un angle $\theta = 90°$ avec l'axe rapide : les directions incidentes et émergentes sont donc croisées !



Dans le cas d'une *lame quart d'onde*, la lame permet de transformer une polarisation linéaire en une polarisation elliptique ou circulaire, et inversement

Attention ! Le fonctionnement des lames à retard dépend de la longueur d'onde !

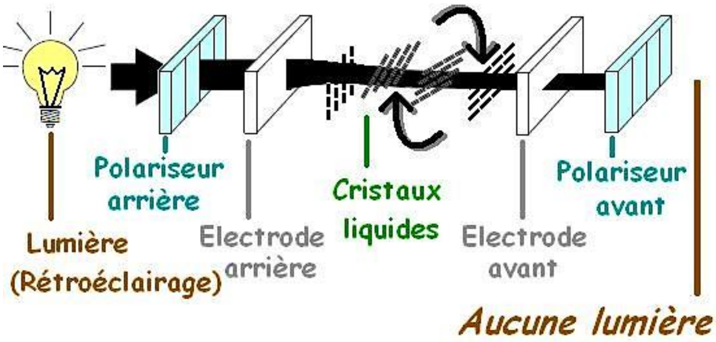
3-Applications :

Comment fonctionnent les LCD ?

Le principe consiste à contrôler la polarisation de la lumière, au moyen d'un champ électrique appliqué aux cristaux.
L'orientation des cristaux liquides est la base du principe de fonctionnement d'un écran LCD. Chaque pixel peut être "allumé" ou "éteint" par la présence d'une tension entre les électrodes avant et arrière.

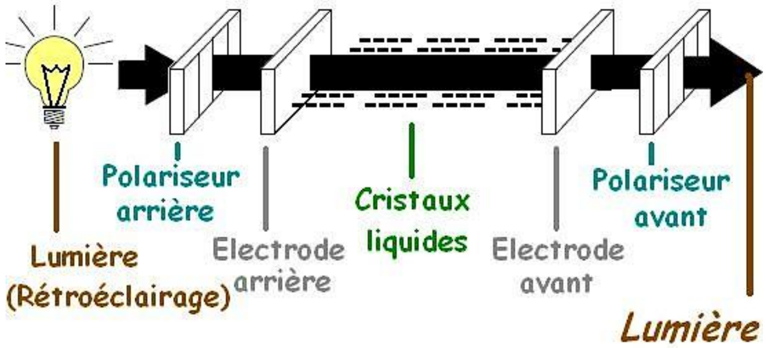
Pixel allumé ou éteint : question de tension

Lorsqu'aucune tension n'est appliquée entre les électrodes correspondant au pixel de l'écran, les cristaux liquides font tourner le plan de polarisation progressivement d'une électrode à l'autre. La lumière polarisée verticalement arrive polarisée horizontalement sur le polariseur horizontal.
Elle peut donc passer :



Pixel au repos : absence de tension

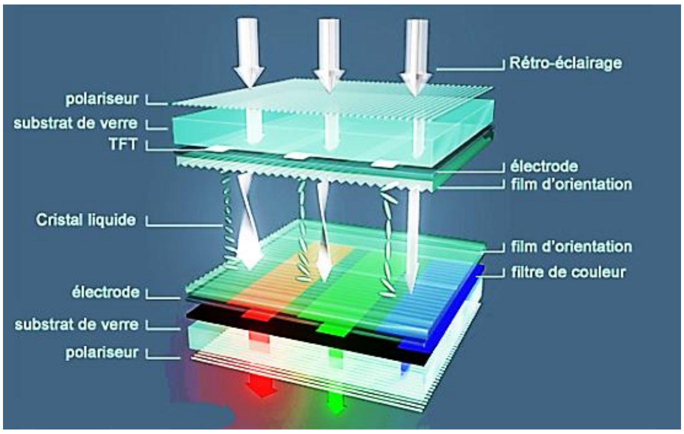
En revanche, lorsqu'une tension suffisante est appliquée entre les électrodes, les cristaux liquides s'orientent perpendiculairement aux électrodes (selon les lignes de champ électrique), comme un aimant dans un champ magnétique extérieur. Les cristaux liquident ne font alors plus tourner le plan de polarisation de la lumière. La lumière reste polarisée verticalement, rencontre le polariseur horizontal et ne le traverse pas. Le pixel est noir (opaque).



Pixel sous tension : tension appliquée

Si on joue sur la tension entre les électrodes, on arrive à un état intermédiaire qui offre des nuances de gris. Donc, Le principe de fonctionnement d'un écran LCD repose sur la rotation (ou l'absence de rotation) du plan de polarisation de la lumière entre deux polariseurs.

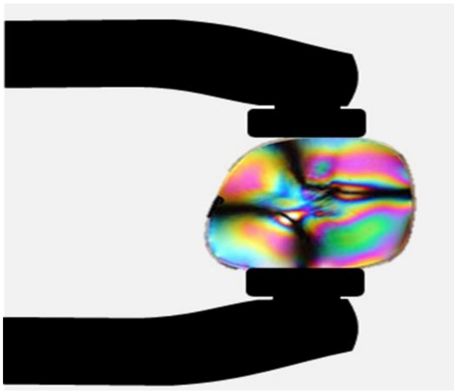
Une image couleur donnée par la télévision, le téléphone portable ou l'ordinateur peut être approximée par un tableau de pixels qui mélange trois couleurs pour former les autres pixels RVB.
Les pixels utilisent ainsi des propriétés d'additivité des couleurs. Lorsque ces pixels sont très resserrés (bonne résolution) on voit alors une image continue, sans voir la sorte de quadrillage. Cette vision continue est due à l'œil qui n'est pas capable de voir des détails très petits.



3.1 Photoélasticimétrie bidimensionnelle

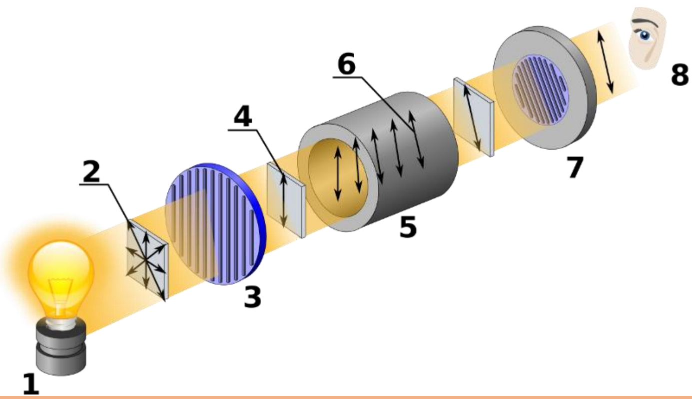
Les dernières avancées technologiques dans le domaine de l'imagerie et dans le développement des moyens informatiques offrent de nouveaux horizons pour la mesure en mécanique. Depuis de nombreuses années déjà, les méthodes optiques, qu'elles soient internes ou externes, locales ou globales, permettent d'analyser le comportement des matériaux et des structures avec de nombreux avantages du fait qu'elles sont sans contact, non perturbatrices, non invasives,… Parmi ces techniques qui sont couramment utilisées en mécanique expérimentale, on distingue les techniques de Photoélasticimétrie bidimensionnelles. L'étude tridimensionnelle d'une pièce mécanique peut être abordée par une modélisation numérique par la méthode des éléments finis. Les simulations permettent de prévoir le comportement des matériaux et des structures afin de prévenir les éventuels risques d'endommagement ou de rupture.

La photoélasticimétrie est une méthode expérimentale qui permet l'analyse des contraintes sur toute une région basée principalement sur la biréfringence acquise par les matériaux soumis à des contraintes.



3.2 Pouvoir rotatoire

Le pouvoir rotatoire, également appelé activité optique ou parfois biréfringence circulaire, est la propriété qu'ont certains milieux de faire tourner le plan de polarisation de la lumière polarisée d'un faisceau lumineux les traversant.
Ce pouvoir rotatoire est une propriété typique de composés chimiques possédant une structure asymétrique (cf. chiralité).
Parmi ces composés dits optiquement actifs, les substances dextrogyres (ex. : saccharose) font dévier le plan de polarisation vers la droite tandis que les substances lévogyres (ex. : fructose)le font dévier vers la gauche.
L'activité optique s'étudie avec des analyseurs de polarisation. La mesure du pouvoir rotatoire est à la base d'une méthode d'analyse physico-chimique, la polarimétrie.



1 : Lampe
2 : filtre
3 : polariseur fixe
4 : lumière polarisée rectilignement
5 et 6 : Cellule porte-échantillon de longueur l
7 : Analyseur tournant
8 : Œil d'observateur

3.3 La brosse de Haidinger

Description

La brosse de Haidinger (ou croix de Haidinger) est une image que l'on peut voir lorsqu'on observe une lumière polarisée. Elle est créée par l'œil lui-même et on ne peut donc pas la prendre en photo. Elle a l'aspect suivant :

Voici quelques-unes de ses caractéristiques :

- Elle se trouve au centre du champ de vision et a environ la taille de deux fois la largeur d'un pouce tenu à bras tendu.
- Elle a une forme de croix avec deux branches jaune clair et deux branches bleu clair orthogonales dont les bouts sont plus larges que le centre.
- L'axe bleu indique la direction de la polarisation de l'onde (direction du champ électrique).

3.4 Système de vision en 3D

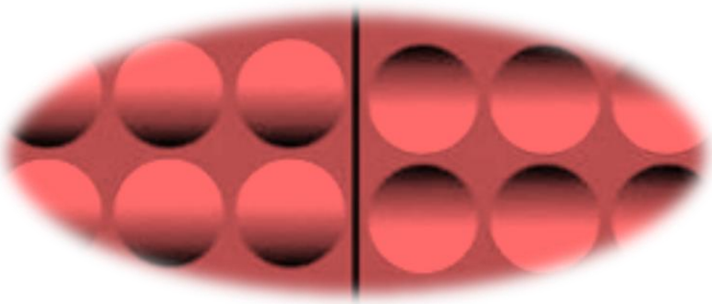
L'homme vit depuis toujours dans un espace à trois dimension et son cerveau appréhende la troisième dimension à travers la notion de relief alors que ses deux yeux ne lui communiquent que des images planes à deux dimensions.
La vision en relief résulte de la superposition de deux images similaires légèrement décalées du fait de la distance qui sépare les deux yeux (65 mm) d'un être humain. C'est le cerveau qui assure la fonction de **vision binoculaire**. Il crée une image définitive et unique à partir de deux images rétiniennes, ce qui permet la perception du relief et de la profondeur.

La vision en relief est donc l'adaptation pour le plaisir du septième art d'un mécanisme inné et utilisé chaque jour. Cette adaptation est composée de plusieurs méthodes, la plus ancienne est la stéréoscopie par l'anaglyphe, plus récemment la stéréoscopie par polarisation de la lumière puis toute les nouvelles technologies peu développées encore.

D'abord, la stéréoscopie Anaglyphe, la première méthode de restitution 3D élaborée en 1853 et adaptée au cinéma par les frères Lumières. Elle consiste à voir le relief grâce à la complémentarité des couleurs. Elle est composée des deux images légèrement décalées pour recréer la stéréoscopie et ainsi berner le cerveau. Les deux images sont filtrées. Une en cyan (pour l'œil droit généralement) et une en rouge (pour l'œil gauche donc) et elles sont ensuite superposées. Il suffit au spectateur de regarder l'image avec une paire de lunettes avec filtre rouge et cyan.
Cette méthode est bon marché et facile à reproduire mais pas totalement fidèle au support initial ce qui entraine le développement de la « Polarisation ».

La polarisation est un autre moyen de perception en relief qui utilise aussi la stéréoscopie. Un filtre polarisant consiste à laisser passer une onde lumineuse de la lumière suivant son degré de rotation.
Projeter les deux images stéréoscopiques grâce à deux vidéoprojecteurs qui comportent devant leurs lentilles un filtre polarisant différent qui polarise chacune des images. Le spectateur avec la paire de lunette polarisée d'un côté vertical et de l'autre horizontal n'aura plus qu'une seule image visible pour chaque œil et donc le cerveau n'a plus qu'à reformer le relief fictif par stéréoscopie.

En conclusion, la ***polarisation*** a encore des secrets à découvrir. Les utilisateurs de haute technologie demandent de plus en plus de produit lié à ces principes.

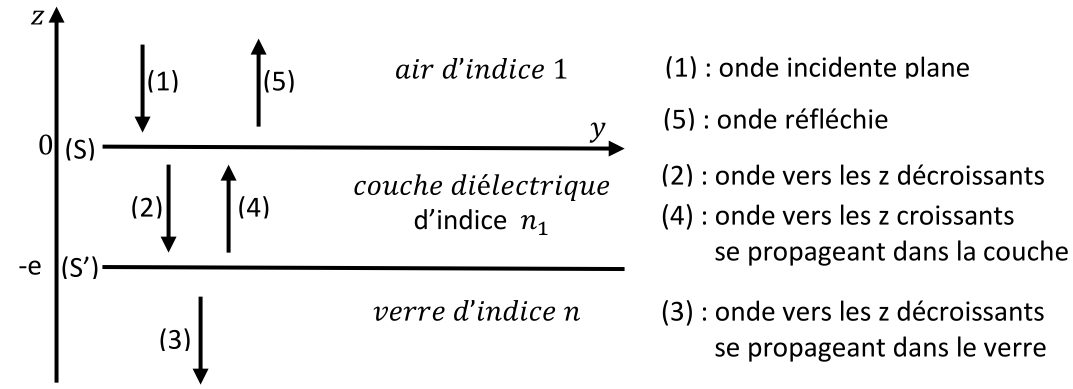


Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Série 3

Exercice1 : Couche antireflet

Dans le dispositif optique représenté ci-dessous, on notera :



Le champ électrique $\vec{E}_1$ de l'onde (1) sera représenté en notation complexe :

$\vec{E}_1 = E_{10} exp j(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})\vec{\imath}$ k_1 désignera la norme du vecteur d'onde $\vec{k}_1$.

1. Donner les expressions des champs électriques et magnétiques des ondes incidentes, réfléchies et transmises, en introduisant les indices de réfraction des milieux.
2. Écrire les équations de continuité vérifiées par les champs électromagnétiques aux surfaces :

   [$z = 0\ et\ z = -e$].

   En déduire 4 relations, reliant : E_{01} , E_{02} , E_{03} , E_{04} et E_{05} .

3. On pose : $E_2 = E_{02} exp - j\omega n_1 \frac{e}{c}$ et $E_4 = E_{04} exp + j\omega n_1 \frac{e}{c}$
   1. Considérant les relations de passage en (S'), montrer que l'on peut éliminer E_{03} et exprimer simplement E_4 en fonction de E_2.
   2. Si la couche (n_1) est une lame quart d'onde [$e = \frac{\lambda_1}{4}$] montrer qu'alors : $\omega n_1 \frac{e}{c} = \frac{\pi}{2}$

      Exprimer simplement E_{04} en fonction de E_{02}.

   3. Considérons les relations de passage en (S) , exprimer $\frac{E_{05}}{E_{01}}$.
   4. Exprimer le pouvoir de Réflexion R du système considéré ici.

      A quelle condition est-il minimum ? Cette condition peut-elle être remplie quelle que soit la longueur d'onde de la lumière incidente ?

   5. Exprimer E_2 en fonction de E_1 pour une lame quart d'onde, pour une lame demi onde.

Exercice2 : Conditions de Brewster

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $(O.P.P.M.R)$ tombe sous l'incidence i $(i \neq 0)$ sur le plan S séparant deux diélectriques linéaires, homogènes, isotropes non magnétiques, de permittivités ε_1 et ε_2 $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$. On admet l'existence d'une onde plane réfléchie et d'une onde plane transmise de même pulsation et de même polarisation que l'onde incidente et dont les vecteurs d'onde sont respectivement $\overrightarrow{k_1'}$ et $\vec{k}_2$. On se propose de chercher à quelles conditions il n'y a pas d'onde réfléchie et en supposant qu'il n'y a sur S ni distribution de charges ni distribution de courants.

Les champs magnétiques des ondes incidente et transmise peuvent s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{10}\, expj\left(\omega t - \vec{k}_1\, \vec{r}\right)$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{20}\, expj\left(\omega t - \vec{k}_2\, \vec{r}\right)$$

$\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ étant leurs vecteurs d'ondes. On appelle $X_1, X_2\,, Z_1$ les composantes de $\vec{B}_{10}$

et $X_2, Y_2\,, Z_2$ celles de $\vec{B}_{20}$.

1. Ecrire les relations exprimant la transversalité des ondes incidente et transmise et les relations de continuité du champ magnétique à la traversée de S en l'absence d'onde réfléchie ; en déduire que $\vec{B}_{10}$ doit être perpendiculaire au plan d'incidence pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie.

2. Former les composantes des champs électriques et écrire les relations de continuité relatives au champ électrique à la traversée de S en l'absence d'onde réfléchie. En déduire la valeur que doit avoir l'angle d'incidence pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie.

Fichier thématique n°3 : Couche antireflet

Ahmed se rend chez un opticien pour acheter des lunettes. Il lui propose des lunettes avec un traitement antireflets. Elles sont plus chères mais il lui assure que le confort est meilleur. Quels sont les intérêts du traitement antireflet ?

Réponse : Les situations dans lesquelles ces avantages sont perceptibles sont nombreuses (travail sur écran, conduite nocturne, éclairage artificiel, images améliorées, objectifs et systèmes optiques de grande luminosité,…etc.)

4-Les verres antireflets

Un rayon de lumière qui arrive sur une surface optique non traitée perd environ 10% de sa transmission lumineuse qui se manifeste par des reflets parasite abominables.

Un traitement antireflets est constitué d'un empilement de couches très fines de sels minéraux déposées sous vide en milieu propre, de manière à provoquer une interférence annulant les reflets afin d'augmenter la transmission lumineuse.

La réfraction l'emporte ainsi sur la réflexion.

Cette fiche présente les principales caractéristiques qui permettent d'appréhender le phénomène de traitement antireflet ; le formalisme mathématique est réduit au maximum, au profit d'une représentation schématique permettant une compréhension intuitive et graphique

5-Etude des réflexions parasites de la lumière sur les verres

Les réflexions parasites de la lumière sur les faces des verres sont de natures diverses. Elles ont pour conséquence de réduire la transmission du verre et de provoquer des reflets indésirables à la fois gênants et parfois effrayant pour un système optique (pour un objectif de 5 lentilles, on perd jusqu'à 45% de l'intensité incidente).

Parmi ces reflets, on peut citer :

2.1. La réflexion sur la face avant et arrière du verre

Simultanément au phénomène de réfraction de la lumière à travers chaque surface du verre, se produit un phénomène de réflexion sur chacune des faces : en premier lieu sur la face avant du verre mais également sur la face arrière après traversée du verre. Ces réflexions sont à l'origine de la réduction de l'intensité de la lumière transmise par le verre.

2.2. Double réflexion interne

Un phénomène particulier de dédoublement des images peut également se produire par réflexions internes dans le verre. Il s'opère ainsi :

Après réfraction à travers la première face du verre, le faisceau lumineux atteint la deuxième face et il se produit d'une part, une nouvelle réfraction du faisceau et d'autre part, une seconde réflexion de la lumière qui crée un faisceau lumineux secondaire. Ce dernier, après une nouvelle réflexion sur la face avant du verre et réfraction à travers la face arrière, donne naissance à une seconde image de moindre intensité que l'image principale et légèrement décalée par rapport à celle-ci. Pour la formation de l'image, cela se traduit par un dédoublement de celle-ci :

Une seconde image venant faire « écho » à l'image principale. Ce phénomène peut s'avérer très gênant dans beaucoup d'applications.

6- Le traitement antireflet

Les deux bénéfices les plus significatifs du traitement antireflet sont :

- L'amélioration de la luminosité et du contraste (des verres tellement transparents qu'ils sont virtuellement invisibles)
- La réduction des effets parasites
- Une haute définition de l'image
- Un renforcement du champ visuel

3.1. Principe du traitement antireflet

Le traitement antireflet consiste à déposer sur les surfaces du verre un empilement de couches minces faisant interférer entre eux les ondes lumineuses réfléchies de telle manière qu'elles s'annulent.

Pour cela on exploite la nature ondulatoire de la lumière et on cherche à provoquer des « interférences destructives »

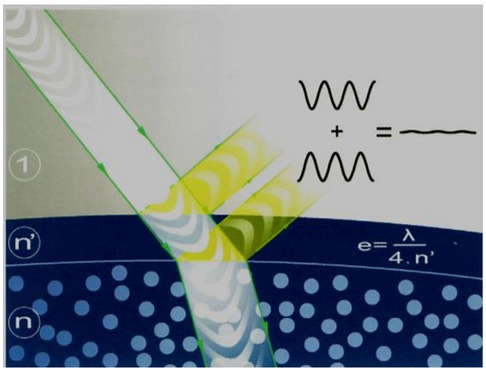
3.2. Le traitement « monocouche »

Considérons le phénomène qui se produit pour une couche isolée du traitement (figure ci-contre).

Le faisceau qui atteint cette couche se décompose en un faisceau réfléchi par la couche et un faisceau réfracté qui la pénètre.

Ce dernier atteint alors la surface du verre et se divise à son tour en un faisceau réfléchi et un second réfracté.

Si l'on choisit judicieusement l'épaisseur et l'indice de réfraction de la couche déposée sur le verre, on parvient à annuler les deux ondes réfléchies. Il faut pour cela qu'elles se superposent et soient en « opposition de phase », cela signifie qu'une onde est à son maximum d'intensité lorsque l'autre est à son minimum. Il n'y a alors plus de lumière réfléchie.



Principe du traitement antireflet

La théorie montre que ce phénomène n'est que réalisable que si la couche mince déposée :

- a un indice n' tel que $n' = \sqrt{n}$, n étant l'indice du matériau utilisé pour le verre
- a une épaisseur qui soit un multiple de $\frac{\lambda}{4.n'}$ avec λ la longueur d'onde de la radiation lumineuse.

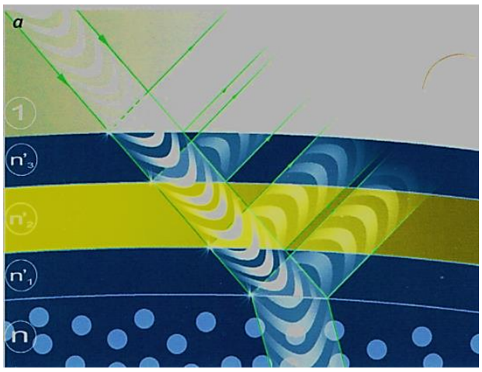
Avec un tel traitement, il est possible d'obtenir une extinction de la réflexion pour une longueur d'onde donnée mais il est impossible d'obtenir cette extinction pour l'ensemble des ondes lumineuses composant le domaine du visible.

On choisit plus particulièrement d'éteindre les réflexions du domaine spectral favorisé.

3.3. Le traitement « multicouche »

Pour obtenir une atténuation globale sur l'ensemble du spectre, on utilise un principe de traitement « multicouche » qui consiste à éliminer la réflexion résiduelle en jouant sur les interférences multiples d'ondes réfléchies par plusieurs couches

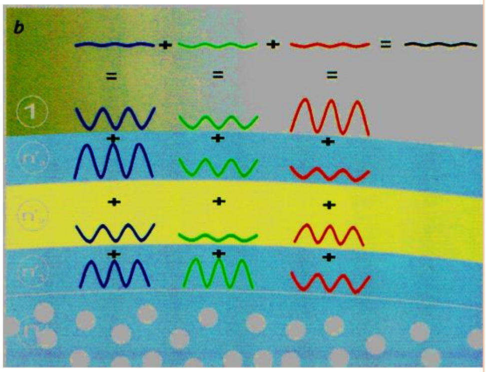
Chacune de ces couches produit une onde réfléchie, ces différentes ondes sont déphasées les unes par rapport aux autres et interfèrent entre elles de façon multiple.



Principe du traitement multicouche. Interférences multiples

Un calcul complexe permet de déterminer comment obtenir une annulation quasi-totale de la lumière réfléchie.

Cependant, l'efficacité d'un traitement antireflet n'est pas proportionnelle au nombre de couches déposées. Selon les cas étudiés, un traitement antireflet « multicouche » peut comporter de **3** à **8** couches.



Annulation des ondes réfléchies

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Filière : SMP 6
TD : Propagations Guidées
Année Universitaire : 2017/2018

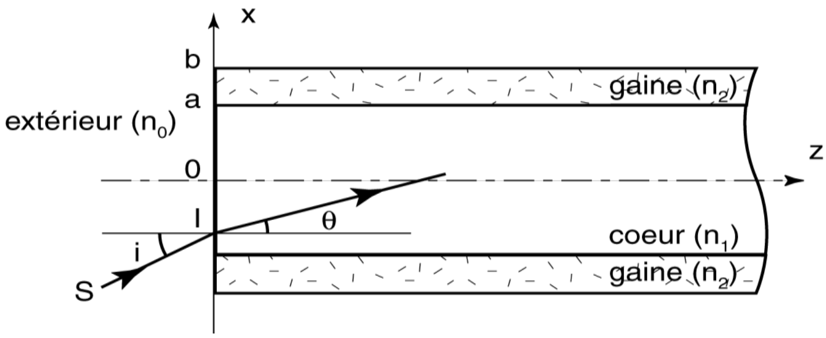
Série 4

I. Fibre optique à saut d'indice

Soit une fibre optique F constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1, entouré d'une gaine d'indice n_2 inférieur à n_1 et de rayon extérieur b. Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires au cylindre d'axe oz formé par la fibre.

1. *« Zigzag » plan*

On considère un rayon $\boldsymbol{SI}$ incident sur le cœur et contenu dans le plan $\boldsymbol{Oxz}$. On appelle $\boldsymbol{i}$ l'angle d'incidence et $\boldsymbol{\theta}$ l'angle de la réfraction sur la face d'entrée de la fibre.



2. Déterminer en fonction de n_0 , n_1 et n_2 la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur.

3. On appelle ouverture numérique ($O.N$) du guide la quantité $O.N = n_0 \sin i_a$ où i_a est la valeur maximale de *i* . Exprimer $O.N$. en fonction de n_1 et n_2.

4. Applications : Endoscope à fibres, fibroscope

Le but d'un endoscope est de permettre à un observateur de « voir » dans des endroits inaccessibles, d'intérêts divers (médical, militaire, industriel, etc). L'endoscope à fibres est constitué de deux faisceaux de fibres : l'un éclaire le site, l'autre assure le retour vers l'extérieur de la lumière émise par la cible éclairée. Deux grands problèmes se posent lorsque l'on veut transmettre des signaux lumineux dans les fibres : l'atténuation de l'impulsion qui se propage et son élargissement temporel.

a. On suppose que la lumière incidente qui véhicule le signal définit un cône convergent de sommet O et de demi-angle i_a . Calculer la différence $\delta\tau_{max}$ des durées extrémales de propagation dans le cœur en fonction de la longueur L de la fibre, des indices n_1 et n_2 et de c (vitesse de la lumière dans le vide).

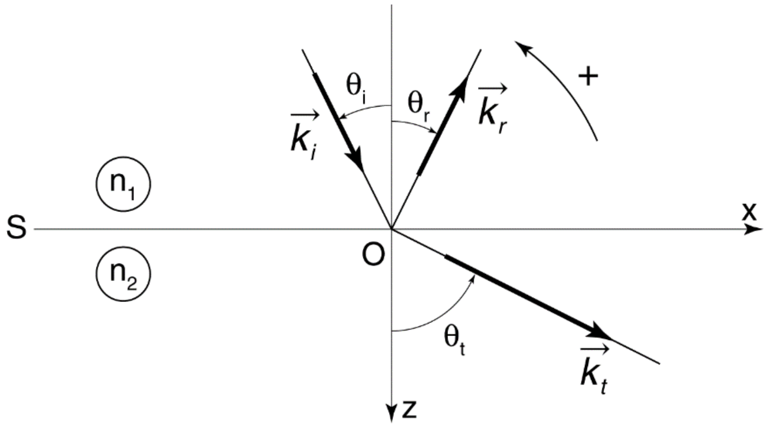
b. On envoie à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses très brèves avec une période T :

Quelle est la valeur minimale de T pour que les impulsions soient séparées à la sortie ? Comment définissez-vous une bande passante associée ?

c. En transmission numérique, on exprime le résultat en nombre maximum d'éléments binaires (présence ou absence d'impulsion : bit) qu'on peut transmettre par seconde. Que vaut le débit en b/s (bits par seconde) de cette fibre ? Le comparer au standard de la téléphonie Numérique ($128\, Kb/s$) et au standard télévision ($200\ Mb/s$).

II. Electromagnétisme : formules de Fresnel et onde évanescente

On considère l'espace rempli de deux milieux notés 1 et 2, séparés par une interface plane S. Ce sont des diélectriques parfaits, non magnétiques, linéaires, homogènes, isotropes et non absorbants de permittivité ε_1 et ε_2 , d'indice n_1 et n_2.
Une source, située dans le milieu 1, émet une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, de longueur d'onde λ_0 dans le vide et de pulsation ω, appelée onde incidente, de champ électrique $\vec{E}_1$ qui tombe en O sur S avec un angle orienté θ_i par rapport à la normale .



Cette onde donne naissance en O à une onde réfléchie, de champ électrique $\vec{E}_r$, de vecteur d'onde $\vec{k}_r$ dans le milieu 1 et à une onde transmise de champ électrique $\vec{E}_t$, de vecteur d'onde $\vec{k}_t$, dans le milieu 2. On écrit en notation complexe en un point $M(x,y,z)$ à l'instant t :

$$\underline{\vec{E}_i}(M,t) = \vec{E}_{0i} expj(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})$$

où le vecteur d'onde réel $\vec{k}_i$, dans le plan d'incidence Oxz, a les composantes suivantes:

$k_{ix} = k_i sin\theta_i$, $k_{iy} = 0$, $k_{iz} = k_i cos\theta_i$

II.1 Lois de Snell-Descartes

1. Donner, en fonction de ω , c et n_1 , l'équation différentielle de propagation de l'onde $\vec{E}_1$ résultant de la superposition des ondes incidente $\vec{E}_i$ et réfléchie $\vec{E}_r$ dans le milieu 1.

2. On écrit en notation complexe : $\underline{\vec{E}_1}(M,t) = \underline{\vec{E}_1}(z)\ expj(\omega t - k_x \cdot x)$

Montrer que $\underline{\vec{E}_1}(z)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \underline{\vec{E}}_1(z)}{dz^2} + k_{1z}^2\, \underline{\vec{E}}_1(z) = \vec{0}$$

Exprimer le terme k_{1z}^2 en fonction de $, c , n_1\ et\ k_x$. Justifier son caractère réel et son signe.
En déduire les expressions de $\underline{\vec{E}_i}(z)\ et\ \underline{\vec{E}_r}(z)$. Calculer k_r.

3. On introduit l'angle orienté θ_r relatif à l'onde réfléchie $\underline{\vec{E}_r}$. Retrouver les lois de la réflexion.

4. Donner, en fonction de ω , c et n_2 , l'équation différentielle de propagation de l'onde $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$ dans le milieu 2. En déduire l'équation satisfaite par $\underline{\vec{E}_2}(z)$.

On se place dans le cas où $n_1 < n_2$.

Exprimer la solution générale pour k_{2z} en fonction de k_0, n_1, n_2 et θ_i . En déduire l'expression de l'onde transmise $\underline{\vec{E}_t}(z)$ dans le milieu 2. Calculer k_t.

5. On introduit l'angle orienté θ_t relatif à l'onde transmise $\underline{\vec{E}_t}$. Retrouver les lois de la réfraction.

II. 2 Onde évanescente

On se place maintenant dans le cas où $n_1 > n_2$.

1. A quelle condition l'onde $\underline{\vec{E}_t}$ existe-t-elle sans être amortie ?

On suppose que cette dernière condition n'est pas non plus satisfaite.

2. Montrer que le vecteur d'onde dans le milieu 2 devient complexe et donner ses composantes dans le repère $Oxyz$ en fonction de k_0, n_1, n_2 et θ_i.

Montrer que l'onde transmise peut alors s'écrire : $\underline{\vec{E}_t}(M,t) = \underline{\vec{E}_{0t}}.exp(-k''_{tz}.z)\,.expj(\omega t - k_x\,.x)$

Identifier k''_{tz}. Est-ce encore une onde progressive ? Pourquoi une telle onde est-elle dite évanescente ?

3. La profondeur de pénétration δ de l'onde dans le milieu 2 est définie comme la distance à l'interface, telle que l'amplitude du champ électrique se trouve divisée par un facteur $e = 2{,}72$. Exprimer δ en fonction de k_0, n_1, n_2 et $sin\theta_i$ et tracer l'allure du graphe $\delta = \delta(\theta_i)$.

4. Donner en fonction de la longueur d'onde λ_0 dans le vide la valeur de δ en incidence quasi-rasante avec $n_1 = 1{,}456$ (silice) et $n_2 = 1{,}410$ (silicone) .

II.3 Formules de Fresnel

Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

On considère maintenant une onde incidente dont la polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence :

$$\vec{E}_i(M,t) = E_{0i}expj(\omega t - \vec{k}_i\,.\vec{r})\vec{j}$$

Les champs des ondes incidente, réfléchie et transmise sont écrits :

$$\underline{\vec{E}_m}(M,t) = \underline{\vec{E}_{0m}}expj(\omega t - \vec{k}_m\,.\vec{r}\,) \text{ et } \underline{\vec{B}_m}(M,t) = \underline{\vec{B}_{0m}}expj(\omega t - \vec{k}_m\,.\vec{r}\,) \quad m = i,r,t$$

1. Exprimer $\underline{\vec{B}_{0m}}(m = i,r,t)$ dans le repère $Oxyz$ en fonction de E_{0m} et des paramètres ω, k_0, n_1 et n_2.

2. On appelle ceficient de réflexion et de transmission en amplitude pour cette onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, les quantités (complexes) sans dimension $\underline{r}_\perp$ et $\underline{t}_\perp$ suivantes :

$$\underline{r}_\perp = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} \quad et \quad \underline{t}_\perp = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}}$$

3. Ecrire un système de deux équations satisfaites par $\underline{r}_{\perp}$ et $\underline{t}_{\perp}$.
   Le résoudre et montrer qu'on obtient les formules de Fresnel :

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \quad et \quad \underline{t}_{\perp} = \frac{2\sin\theta_t cos\theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

4. Que remarque-t-on pour $\underline{t}_{\perp}$? Que vaut le déphasage de l'onde réfléchie lors d'une réflexion sur un milieu plus réfringent ?
   Donner la valeur de $\underline{r}_{\perp}$ *et* $\underline{t}_{\perp}$ pour les cas particuliers :
   - d'une incidence telle que $\theta_i = \theta_{i(lim)} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ $avec\ n_2 < n_1$
   - d'une incidence rasante $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ avec $n_2 > n_1$.

II.3 Onde évanescente, coefficients de réflexion et de transmission (question facultative)

1. Exprimer en fonction de , k_x , k''_{tz} *et de* $\underline{E}_{0t}$ les composantes dans le repère $Oxyz$ de l'amplitude $\vec{\underline{B}}_{0t}$ de l'onde magnétique associée à l'onde évanescente $\vec{\underline{E}}_t$ de la question **II. 2.** 2 II.A.3.b polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

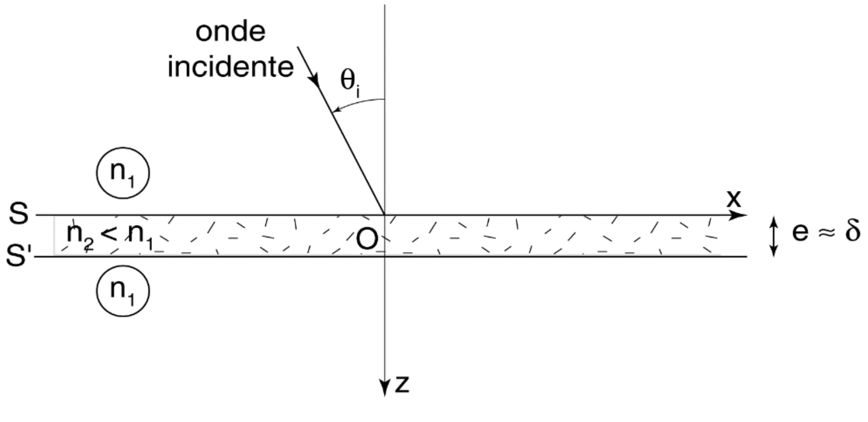
2. Ecrire les deux conditions de passage que satisfont les champs à la surface S. En déduire les deux équations vérifiées maintenant par $\underline{r}_{\perp}$ *et* $\underline{t}_{\perp}$.

3. Montrer que les solutions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\underline{r}_{\perp} = expj\varphi_r \quad \text{et} \quad \underline{t}_{\perp} = \frac{2n_1 cos\theta_i}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}\, expj\varphi_t$$

   Identifier $tan\,\varphi_r$ *et* $tan\,\varphi_t$.

4. Sans faire de calcul, décrire ce qui se passe si le milieu 2 a une épaisseur e très faible, de l'ordre de la profondeur de pénétration δ, et s'il existe une deuxième interface S' avec un milieu 3 identique au milieu 1 .



Fiche thématique n°4 : effet de Peau

L'effet de peau exprime le phénomène de pénétration du champ électromagnétique dans un conducteur.

Sur un métal, la réflexion de la lumière se joue sur l'épaisseur de peau. Si l'épaisseur du matériau est inférieure à celle-ci, il laisse passer la lumière

1 – L'Effet de Peau

L'effet de peau ou effet pelliculaire ou effet Kelvin est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le courant a tendance à ne circuler qu'en surface des conducteurs. Ce phénomène d'origine électromagnétique existe pour tous les conducteurs parcourus par des courants alternatifs. Il provoque la décroissance de la densité de courant à mesure que l'on s'éloigne de la périphérie du conducteur. Il en résulte une augmentation de la résistance du conducteur.
Cet effet peut être pris en compte pour alléger le poids des lignes de transmission à haute fréquence en utilisant des conducteurs tubulaires, ou même des tuyaux, sans perte de courant. Il est utilisé dans le blindage électromagnétique des fils coaxiaux en les entourant d'un mince étui métallique qui garde les courants induits par les hautes fréquences ambiantes sur l'extérieur du câble.

 **Nikola Tesla**	*Les travaux les plus connus et les plus largement diffusés de* **Tesla** *portent sur l'énergie électrique. Il a mis au point les premiers alternateurs permettant la naissance des réseaux électriques de distribution en courant alternatif, dont il est l'un des pionniers. Il est l'auteur du moteur électrique asynchrone, l'alternateur polyphasé et d'autre inventions.* **Kelvin** *est un physicien britannique reconnu pour ses travaux en thermodynamique. Ces mêmes études lui permirent d'étudier la conduction électrique des câbles sous-marins qui lui ont permet l'invention d'un mécanisme simple (Replenisher) de production d'électricité statique par influence.*	 **Lord Kelvin**

2 – Profondeurs d'action

2.1. Distance (ou profondeur) de diffusion

C'est I_d la distance de diffusion (profondeur) à laquelle agit le champ électromagnétique ambiant pendant le temps t.

$$I_d = (2.\nu/t)^{1/2}$$

où I_d est la profondeur de diffusion, $\nu(m^2/s)$ est la diffusivité et t la constante de temps (ou temps caractéristique)

2.2. Profondeur maximale (dite pénétration)

Dans le cas d'un courant alternatif, de fréquence $f(Hz)$, I_p la profondeur limite (max) de l'effet de peau est :

$$I_p = (K\Omega/mf\sigma)^2$$

avec K : constante affectée aux caractéristiques mécaniques du conducteur

Ω : angle solide dans lequel se déroule le phénomène

M : perméabilité magnétique ambiante

σ : conductivité électrique du matériau

2.2. Cas de la lumière

La distance maximale de pénétration superficielle de la lumière (qui est un champ électromagnétique, donc qui pénètre identiquement) dans un matériau est :

$$I_p = {}^{1}/_{J_b}$$

où I_p : profondeur limite de l'effet de peau (dite pénétration)

J_b : coefficient d'atténuation linéique, qui vaut lui-même $2fn/c$

f étant la fréquence, n l'indice de réfraction et c la vitesse de la lumière dans le vide

Exemple :

Pour une lumière de longueur d'onde verte $\lambda = 0.55\mu m$
La pénétration dans l'aluminium est de l'ordre de $10^{-8}m$
Pour le cuivre elle est de l'ordre de $7.10^{-2}m$

L'aluminium est fréquemment utilisé dans les lignes de transmission, car c'est un matériau bien plus léger que le cuivre et présentant des propriétés de conduction à peine plus médiocres. L'effet de peau est plus prononcé avec de meilleurs conducteurs et l'épaisseur de peau est proportionnelle à la racine carrée de la résistivité d'un conducteur : l'épaisseur de peau est donc supérieure à celle observée avec le cuivre pour l'acheminement de la même puissance.

Cette épaisseur de peau étendue renforce les arguments en faveur de l'utilisation de l'aluminium dans les lignes de transmission, car c'est un métal bien plus léger et plus économique.

À mesure que la fréquence augmente, l'épaisseur de peau décroît plus vite qu'on pourrait le penser et peut provoquer des problèmes même à l'étape de conception.

Des **câbles à fibres optiques** utilisant un milieu non métallique pour transmettre des données sont généralement nécessaires, car l'épaisseur de peau des conducteurs standards serait beaucoup trop faible.

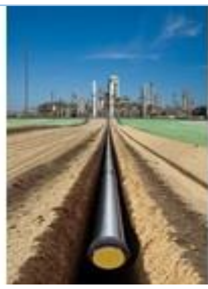
2.4. Quelques applications

a. Vitrage antisolaire

La couche d'argent est séparée en deux (Fabry-Pérot) pour augmenter la transmission dans le visible et augmenter la réflectivité

b. Chauffage à effet de peau

Les systèmes de chauffage à effet de peau sont parfaitement adaptés à la mise hors gel, au maintien en température et au réchauffage des matériaux transportés par les canalisations sur une longue distance (jusqu'à 25 km). Les tuyaux peuvent être au-dessus du sol, immergés ou placés sur tous types de terrains. Le traçage thermique à effet de peau emploie un seul circuit, ce qui rend inutile un vaste système de distribution électrique.



c. Autres applications

L'effet de peau est utilisé sur les marchés des secteurs tels que le pétrole et le gaz, le raffinage, l'industrie chimique ou tout autre marché industriel similaire qui nécessite des canalisations chauffées sur de longues distances. On peut citer par exemple :

- Détection de fuites d'eau
- Maintien en température et mise hors gel
- Prévention contre les effets mécaniques du gel
- Systèmes de traçage

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Filière : SMP 6
TD : Propagations Guidées
Année Universitaire : 2017/2018

Série 5

Soit ($\mathscr{M}$) un milieu diélectrique parfaitement isolant, non magnétique, linéaire, homogène et isotrope
1/ Donner la signification des termes soulignés ci-dessus. Pourquoi est-il judicieux d'étudier un tel milieu en réponse sinusoïdale, en utilisant la notation complexe ?
2/ On considère deux milieux diélectriques, non magnétiques, séparés par une surface $\boldsymbol{S}$. Ecrire sans démonstration les relations de passage entre ces deux milieux, concernant les champs électriques $\vec{\boldsymbol{E}}$, magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ et le vecteur $\vec{\boldsymbol{D}}$.

I/ Propagation des ondes électromagnétiques dans ($\mathscr{M}$)

Nous allons nous intéresser ici à la propagation, dans ($\mathcal{M}$) de permittivité diélectrique complexe $\varepsilon(\omega)$, d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique décrite en notation complexe par les champs électrique $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}}(M) exp - j\omega t$ et magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{B_0}}(M) exp - j\omega t$, en un point M du milieu et à l'instant t.

1- Déterminer les équations de propagation des champs complexes $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t)$ dans ce milieu (équations découplées vérifiées séparément par $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t)$).
2- En déduire, en précisant la forme choisie pour les fonctions $\underline{\overrightarrow{E_0}}(M)$ et $\underline{\overrightarrow{B_0}}(M)$, la relation de dispersion dans ce milieu (on introduira un vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$ *a priori* complexe).
3- Définir l'indice complexe $n(\omega) = n_r(\omega) + jn_i(\omega)$. Donner l'interprétation physique de $n_r(\omega)$ et $n_i(\omega)$. Caractériser les zones du spectre où ($\mathcal{M}$) est transparent.
4- Quelle est la structure du champ électromagnétique dans le milieu ? $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t)$ sont-ils nécessairement en phase ?
5- Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\vec{P}$ dans ce milieu. Commenter le résultat obtenu.

II/ Réflexion et réfraction d'une onde plane à la surface de séparation de deux milieux ($\mathscr{M}_1$) et ($\mathscr{M}_2$) transparents

Une onde plane monochromatique, polarisée rectilignement et de pulsation ω_i , est incidente à la surface de séparation S entre deux milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes parfaitement isolants non magnétiques ($\mathcal{M}_1$) **et** ($\mathcal{M}_2$), transparents, d'indices réels respectifs n_1 et n_2 .

1- Montrer que les lois de Snell-Descartes (réflexion et réfraction) peuvent être déduites de l'écriture des relations de passage des champs au niveau de S.
2- On se place dans le cas où l'onde incidente est polarisée parallèlement au plan d'incidence. On appelle $r_{\parallel}$ et $t_{\parallel}$ respectivement les coefficients de réflexion et de transmission pour l'amplitude du champ électrique, i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction.
   2.1 Quelles sont les quantités conservées à la traversée de la surface S ? On justifiera brièvement la réponse.
   2.2 On donne : $\left\|r_{\parallel}\right\| = \left|\frac{tan(i_1 - i_2)}{tan(i_1 + i_2)}\right| = \left|\frac{n_2 cosi_1 - n_1 cosi_2}{n_2 cosi_1 + n_1 cosi_2}\right|$ et $\left\|t_{\parallel}\right\| = \left|\frac{2\, n_1 cosi_1}{n_2 cosi_1 + n_1 cosi_2}\right|$

   Définir et déterminer dans ce cas les coefficients de réflexion $R_{\parallel}$ et de transmission $T_{\parallel}$ en puissance. Commenter.

Dans le cas où le champ électrique est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, on aboutit aux coefficients de réflexion $r_\perp$ et de transmission $t_\perp$ en amplitude suivants :

$$\|r_\perp\| = \left|\frac{sin(i_1 - i_2)}{sin(i_1 + i_2)}\right| \quad \text{et} \quad \|t_\perp\| = \left|\frac{2\, cos i_1 \times sin i_2}{sin(i_1 + i_2)}\right|$$

2.3 Définir ce qu'on appelle l'angle de Brewster i_B, et donner son expression. Que se passe-t-il lorsqu'on envoie sur S une onde plane non polarisée sous l'incidence de Brewster ?

2.4 Dans le cas de la réflexion totale, retrouve-t-on l'onde dans le milieu d'indice n_2 ? Si oui, sous quelle forme ? (aucune démonstration n'est demandée).

III/ Application au guidage d'une onde

Pour simplifier l'étude, on se place dans une géométrie bidimensionnelle qui rend bien compte des propriétés fondamentales des fibres à saut d'indice : une couche d'épaisseur a d'indice réel n_1 , immergée dans un milieu diélectrique d'indice réel $n_2 < n_1$ (figure ci-dessous). Le guide est éclairé par une onde monochromatique de pulsation ω.

Dans chacune des couches, on cherche un champ électrique complexe de la forme :
$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = A(x) expj[\alpha z - \omega t]\vec{e}_y$, dit transverse électrique et noté TE (α désigne une constante réelle positive et $A(x)$ une fonction réelle de x).

1- Ecrire l'équation de propagation du champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(x, y, z, t)$ dans chacune des couches.
En déduire, dans chaque couche, une relation entre A , $\frac{d^2A}{dx^2}$, α et $k_i = n_i \frac{\omega}{c}$ $avec$ $i = 1{,}2$.

2- Que doivent vérifier A et $\frac{dA}{dx}$ aux interfaces $x = \pm\frac{a}{2}$? Montrer que la symétrie du problème permet de chercher des solutions paires ou impaires.

3- Discuter, dans chaque tranche, de la nature des solutions de l'équation différentielle obtenue à la question a- en fonction de la valeur de ($k_i^2 - \alpha^2$).

4- Montrer qu'il n'existe pas de solutions au problème pour $k_1 < \alpha$ et que le guidage de l'onde par la fibre impose la condition $k_2 < \alpha$.

5- On suppose dans la suite $k_1 < \alpha < k_2$ et on cherche à déterminer entièrement les modes guidés dans la fibre optique. On pose $\beta^2 = k_1^2 - \alpha^2$ et $\gamma^2 = -k_2^2 + \alpha^2$, avec β et γ supposés positifs.
Ecrire la forme générale d'une solution paire et montrer qu'une telle solution n'est possible que si :

$$\gamma\frac{a}{2} = \beta\frac{a}{2} tan\left(\beta\frac{a}{2}\right)$$

6- Procéder de même pour les solutions impaires et montrer que leur condition d'existence est :

$$\gamma\frac{a}{2} = -\beta\frac{a}{2} cotan\left(\beta\frac{a}{2}\right)$$

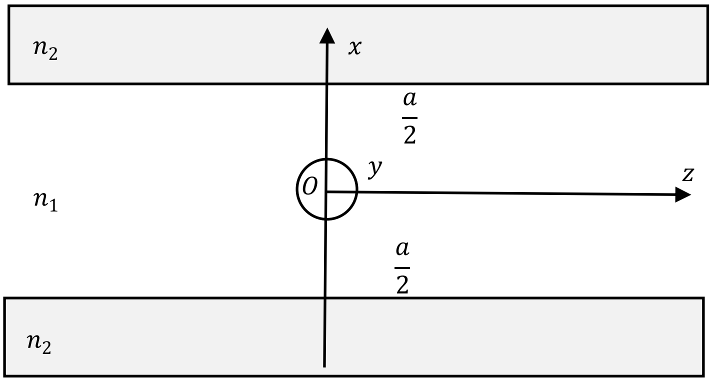
7- Représenter sur un même schéma l'allure des graphes donnant $\gamma\frac{a}{2}$ en fonction de $\beta\frac{a}{2}$ pour les deux types de solutions paires ou impaires.
En utilisant la relation :

$$\left(\gamma\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\beta\frac{a}{2}\right)^2 = a^2\frac{k_1^2 - k_2^2}{4}$$

Trouver le principe d'une détermination graphique des valeurs de β et γ pour les modes guidés TE de la fibre. Montrer qu'il existe toujours un mode TE et que le nombre N de ces modes est donné par la relation: $N = 1 + Ent\left[\frac{\omega a}{\pi c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right]$ où $Ent(u)$ représente la partie entière de u.

8- Qu’appelle-t-on fibre optique monomode ? Quelle est la valeur maximale du rayon d’une telle fibre ?

9- Ecrire la condition d’existence du $p^{ième}$ mode TE guidé et vérifier qu'il existe pour ce mode une pulsation de coupure ω_{pc} qu’on déterminera. Décrire qualitativement ce qui se passe lorsqu’on envoie à l'entrée du guide d’onde une onde de pulsation ω inférieure à la plus petite pulsation de coupure non nulle.



Fichier thématique n°5 : Conditions de Brewster

Pour quel angle d'incidence particulier, la lumière (réfractée et réfléchie) possède – elle des propriétés de polarisation particulière ?

Réponse : Pour faire court : L'angle de Brewster
Plus précisément, lorsque l'on envoie un faisceau lumineux sur un dioptre, on observe en général une réflexion partielle. Si le faisceau est incliné d'un angle nommé angle de Brewster, la réflexion partielle disparait, à condition que la lumière soit polarisée dans le plan d'incidence. À l'angle de Brewster, le rayon réfracté et la direction attendue pour le rayon réfléchi forment un angle droit.

David Brewster

L'angle de Brewster est nommé d'après **David Brewster** qui l'a découvert en 1812. Les découvertes sur la biréfringence et la polarisation en sont alors à leurs débuts.

En observant la réflexion de la lumière sur les fenêtres du palais du Luxembourg à Paris à travers un cristal de calcite, **Étienne-Louis Malus** remarqua que les deux images n'ont pas la même intensité. On peut également changer l'intensité des deux images l'une par rapport à l'autre en tournant le cristal et on peut même faire disparaitre une des deux images dans des conditions particulières.

À la suite de ces résultats expérimentaux, Brewster parvint à trouver la loi reliant l'indice de réfraction du verre avec la valeur de cet angle permettant de polariser la lumière.

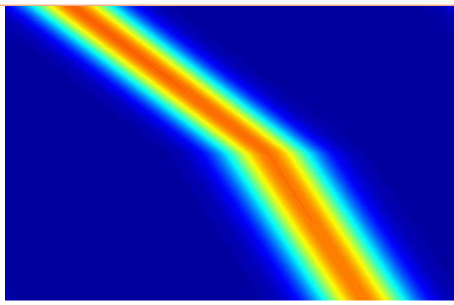
Louis Malus

L'explication physique du phénomène n'arrive que plus tard, après les travaux notamment d'**Augustin Fresnel** et les développements en optique physique exprimant l'interaction entre le champ électromagnétique et les milieux diélectriques.

Les lois de la réflexion-transmission (lois d'**Ibn El Haytem**) portent sur les directions des rayons réfléchis et transmis, mais le comportement des ondes TE et TM diffère en ce qui concerne les intensités respectives des ondes réfléchies et transmises.

Ces intensités varient avec l'angle d'incidence.

À une incidence égale à l'angle de Brewster, l'onde TM est totalement transmise et le rayon réfléchi disparait.



Rayon lumineux réfracté par un dioptre à l'incidence de Brewster en polarisation TM. Il n'y a pas de rayon réfléchi.

Démonstration

Nous avons montré en TD que le coefficient de Fresnel en réflexion pour une onde polarisée TM s'écrit :

$$r = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}$$

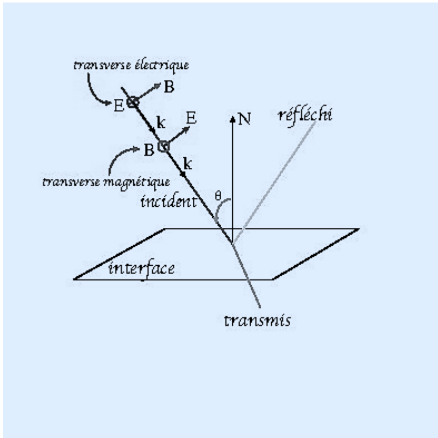
où les angles θ_1 *et* θ_2 sont liés par :

$$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2 \qquad (1)$$

Pour annuler le numérateur du coefficient en réflexion, on doit donc avoir :

$$n_2\cos\theta_1 = n_1\cos\theta_2 \qquad (2)$$

(1) et (2) **nous donnent :** $tan\theta_1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)$



1-Microscopie à l'angle de Brewster

La microscopie à l'angle de Brewster est une nouvelle et très puissante technique d'étude des films monomoléculaires à la surface de l'eau. Son principe est basé sur les propriétés de réflectivité des interfaces. Elle est sensible à l'épaisseur, la densité et l'anisotropie optique des films.

2-Applications

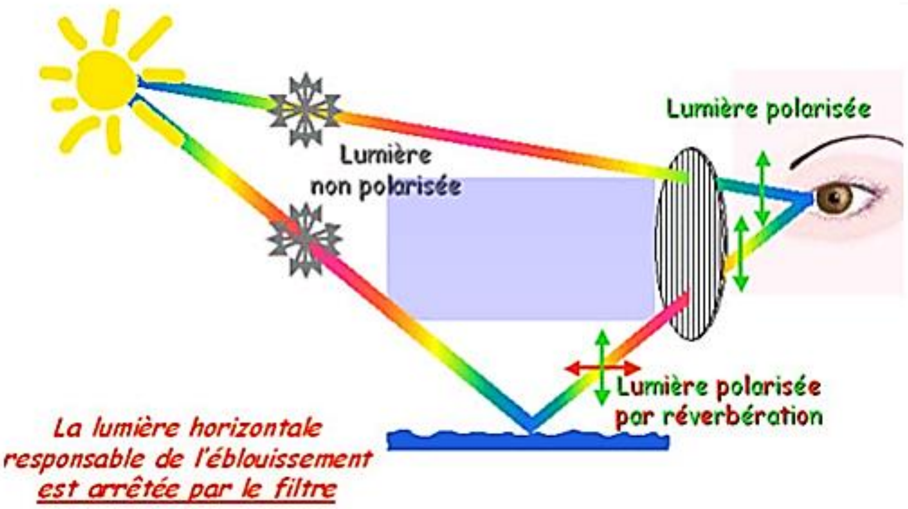
Les lames inclinés à l'angle de Brewster seront utilisées afin soit d'annuler la réflexion partielle ou bien de polariser la lumière. Ces lames seront le plus souvent des lames de verre inclinées à l'angle de Brewster par rapport à l'axe optique sur lesquels elles étaient utilisées.

2.1. Lasers

Dans les lasers dont le milieu amplificateur est séparé des miroirs de cavité, les dioptres délimitant ce milieu sont inclinés à l'angle de Brewster pour éliminer les pertes par réflexion partielle.

2.2. Lunettes polarisantes

Les lunettes polarisantes polarisées verticalement permettent de supprimer la lumière naturelle réfléchie sur des surfaces horizontales à l'angle de Brewster. Elles permettent d'atténuer fortement les réflexions parasites voisines de cet angle.



2.3. Lames de Brewster

Ces lames permettent de retrouver la direction de polarisation d'un polariseur. En tournant un polariseur autour d'une lame de verre, on peut observer un minimum de réflexion. À ce minimum, la réflexion partielle à l'angle de Brewster est annulée et on est donc en polarisation TM à l'angle de Brewster.
La direction de polarisation du polariseur forme alors l'angle de Brewster avec la lame.

2.4. Imagerie

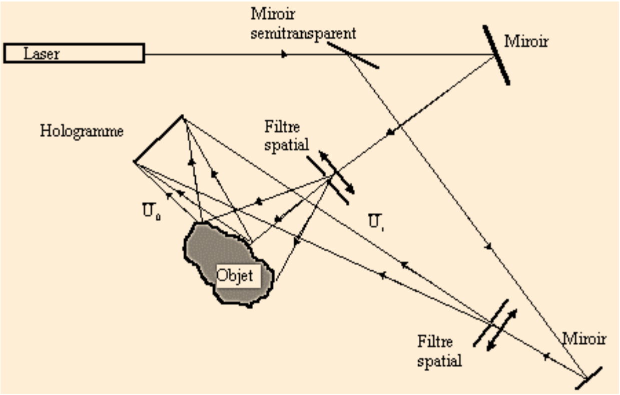
De nombreux appareils photographiques sont équipés de filtres polarisants, permettant de régler par exemple le contraste de l'image. En utilisant le filtre de manière à ce que la direction de polarisation de la lumière arrivant sur l'appareil forme l'angle de Brewster avec le dioptre formé par une surface réfléchissante, on peut éliminer les réflexions partielles qui nous gênent pour prendre la photographie, et voir ce que nous ne pourrions pas voir avec les réflexions

2.5. *Enregistrement holographique*

L'holographie est un procédé d'enregistrement de la phase et de l'amplitude de l'onde diffractée par un objet. Ce procédé d'enregistrement permet de restituer ultérieurement une image en trois dimensions de l'objet. Ceci est réalisé en utilisant les propriétés de la lumière cohérente issue des lasers.

Pour cela, on fait interférer deux faisceaux cohérents sur une plaque photographique. Le premier faisceau, appelé « onde de référence », est envoyé directement sur la plaque. Le second, appelé « onde objet », est envoyé sur l'objet à photographier, qui diffuse cette lumière en direction de la plaque holographique. La figure d'interférences ainsi formée contient toutes les informations concernant l'amplitude et la phase de l'onde objet, c'est-à-dire la forme et la position de l'objet dans l'espace.

Un système d'holographie est constitué d'un laser avec un ou deux systèmes permettant d'étendre le faisceau. Les faisceaux sont alors envoyés sur une plaque holographique (par de chemins différents) qui permettra d'enregistrer l'hologramme. Les miroirs seront alors tournés de manière à ce que les rayons arrivent sur la plaque de verre avec l'angle de Brewster de manière à éviter les réflexions gênantes.



Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Filière : SMP 6
TD : Propagations Guidées
Année Universitaire : 2017/2018

Devoir n°1

Le sujet est constitué de quatre parties indépendantes, quoique reliées entre elles par le même thème. L'accent est notamment mis sur les propriétés des lames quart- d'onde antireflet qui, déposées sur les faces d'entrée et de sortie, conditionnent - comme dans tout système optique - la propagation d'une onde progressive.

I/ Equations de Maxwell et relations de passage

1.a Rappeler les **4** équations de Maxwell dans le vide (ni charges ni courants) caractérisé par sa permittivité diélectrique $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ et sa perméabilité magnétique $\boldsymbol{\mu_0}$.

1.b Retrouver l'équation de propagation du champ électrique puis en déduire la vitesse de propagation $\boldsymbol{c}$ des ondes électromagnétiques dans le vide.

1.c Réécrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas d'un milieu diélectrique linéaire homogène transparent, caractérisé par une permittivité diélectrique relative réelle $\boldsymbol{\varepsilon_r}$

2/ Préciser les relations de passage pour le champ électromagnétique, à la surface de séparation entre deux milieux diélectriques, en 1'absence de charges et de courants.

3/ Le champ électrique d'une onde incidente se propage, selon un axe $'\boldsymbol{x}$, dans un milieu d'indice $\boldsymbol{n_1}$ avec la vitesse de propagation $\boldsymbol{v_1}$ en conservant une amplitude constante $\boldsymbol{E_0}$. II est défini dans un repère cartésien orthonormé $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ par ses composantes, telles que :

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{E_0 cos\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)\vec{J}}$$

a. Préciser les trois caractéristiques principales de cette onde.

b. Rappeler la relation de structure de l'onde plane progressive puis en déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_i$ associé au champ électrique $\vec{E}_i$.

c. Démontrer que la puissance moyenne incidente P_i rayonnée par cette onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation est donnée par la relation : $P_i = \frac{\boldsymbol{n_1} E_0^2}{2\,\boldsymbol{\mu_0}\,c}$

4/ Cette onde vient frapper en $x = 0$ la frontière - constituée par le plan yOz - avec un second milieu d'indice n_2, semi-infini pour $x > 0$ et dans lequel elle possède une vitesse de propagation $_{\boldsymbol{2}}$.

a. En écrivant le champ électrique réfléchi $\vec{E}_r$ et le champ électrique transmis $\vec{E}_t$ sous la forme :

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\rho E_0 cos\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)\vec{J}} \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\tau E_0 cos\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)\vec{J}}$$

déduire des relations de passage en $x = 0$, une première relation liant entre eux les coefficients de réflexion ρ et de transmission τ .

b. Exprimer les champs magnétiques $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_{\boldsymbol{t}}$ associés aux champs électriques respectifs puis, toujours à l'aide des relations de passage, écrire une seconde relation reliant les coefficients de réflexion ρ et de transmission τ.

c. Démontrer alors que : $\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$

d. La puissance moyenne réfléchie P_r et la puissance moyenne transmise P_t étant définies dans les mêmes conditions que la puissance moyenne incidente P_r en (3.c), exprimer le rapport $R = {}^{P_r}/_{P_i}$ puis le rapport $T = {}^{P_t}/_{P_i}$

II/ Lame antireflet

1/ - La face d'entrée d'une fibre optique d'indice $N = 1{,}69$ est éclairée, en incidence normale, par un faisceau laser en transit dans l'air d'indice $n = 1$. Calculer la valeur numérique des coefficients ρ et τ. En déduire la proportion d'énergie réfléchie par la face d'entrée et la proportion d'énergie transmise à la fibre optique.

2/ Une couche mince de cryolithe (Na_3 Al F_6) d'indice n' et d'épaisseur D égale au quart de la longueur d'onde λ de la lumière dans ce milieu, est déposée sur la face d'entrée de la fibre optique (Figure 1). .

a) - Quelle relation y a-t-il, pour une onde de fréquence donnée, entre sa longueur d'onde λ dans un milieu d'indice n et sa longueur d'onde λ_0 dans le vide ?

b) - Exprimer, en fonction des indices $, n'$ et N, les coefficients de transmission en amplitude τ_1 **,** τ_2 , τ_3 et les coefficients de réflexion en amplitude ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , notés sur la figure 1.

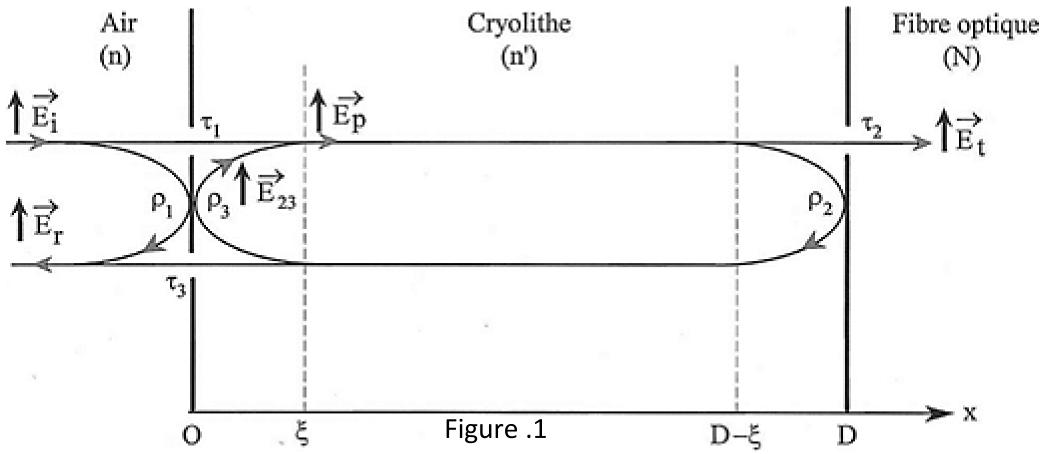


Figure .1

τ_1 pour la transmission de l'air vers la cryolithe
τ_2 pour la transmission de la cryolithe vers la fibre
τ_3 pour la transmission de la cryolithe vers l'air
ρ_1 pour la réflexion "air - cryolithe - air"
ρ_2 pour la réflexion "cryolithe - fibre - cryolithe"
ρ_3 pour la réflexion "cryolithe - air - cryolithe"

c) - Exprimer ρ_3 en fonction de ρ_1

3/ *Dans ce qui suit, tous les champs électriques seront décrits* ***par leur composante algébrique,*** *nommée E* **,** *selon l'axe de polarisation. Leur amplitude, indépendante du temps mais éventuellement complexe, sera notée* $\underline{\tilde{E}}$ *tandis que* $\tilde{E}$ *en désignera le module.*

Le champ électrique incident dans l'air à l'abscisse $x = 0$ sera désigné par E_i . II sera représenté en notation complexe par : $\underline{E_i}(o,t) = \underline{\tilde{E_i}} expj\omega t$

Le champ électrique sortant, défini dans le verre, en $= D = \lambda/4$, sera désigné par E_t.

A l'instant t, an voisinage de la surface S_1 à l'abscisse ξ tendant vers zéro, un champ électrique global E_p se propage dans le sens positif de l'axe. II sera représenté, en notation complexe, sous la forme :

$$\underline{E}_p(\xi\,,t) = \underline{\tilde{E}}_p\ expj\omega t$$

Ce champ résulte de la superposition du champ $\tau_1 E_i$ et d'un champ E_{23} dont la valeur est égale à celle qu'avait E_p à l'instant $t - 2D/v$ (précédemment à un aller-retour à la vitesse de propagation v dans la cryolithe), atténuée par deux réflexions successives.

a) - En tenant compte du fait que $= \lambda/4$, écrire l'expression complexe $\underline{E}_{23}(\xi\,,t)$ en fonction de $\underline{E}_p(\xi\,,t)$ et des coefficients ρ_2 et ρ_3 .

b) - Exprimer $\underline{E}_p$ en fonction de $\underline{E}_i$ et de $\underline{E}_{23}$ puis en déduire $\underline{\tilde{E}}_p$ en fonction de $\underline{\tilde{E}}_i$, et des autres données.

c) - Exprimer en conséquence le champ globalement réfléchi $\underline{E}_r$ au voisinage de l'abscisse $x = 0$ puis réduire son expression en fonction des seuls coefficients ρ_1 , ρ_2 et $\underline{E}_i$.

- En déduire une condition entre ρ_1 et ρ_2 qui permette d'annuler ce champ.

4/ a) - Transposer la relation précédente en fonction des indices $, n'\ et\ N$. Ce résultat serait- il modifié si l'on intervertissait les indices $n\ et\ N$?

- Calculer la valeur numérique de l'indice de la cryolithe qui réalise cette condition.

b) - Quelle est alors la proportion d'énergie transmise à la fibre ?

c) - La face de sortie de la fibre est revêtue d'une même lame mince de cryolithe. Quelle est la puissance transmise en bout de ligne ? Conclure. Quelle est la valeur du coefficient de réflexion global de l'ensemble constitué par la fibre et les deux couches de cryolithe ?

III/ Guidage par une gaine réfléchissante

Une fibre optique d'indice $N = 1{,}69$ et dont les faces d'entrée et de sortie ont subi le traitement antireflet décrit précédemment, est étirée (Figure 2) sous forme d'un cylindre de révolution d'axe Ox.

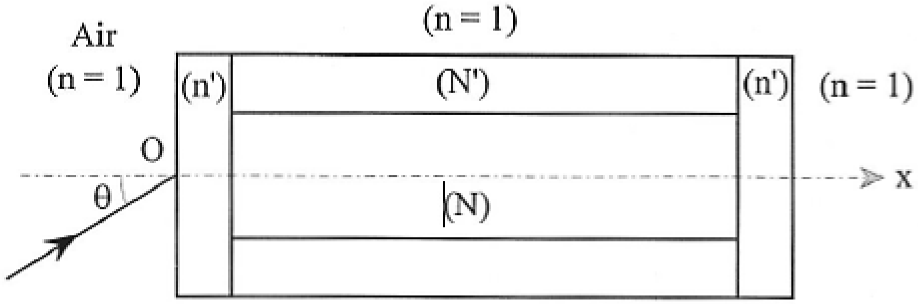


Figure .2

1/ Démontrer que l'angle de pénétration d'un rayon lumineux dans la fibre d'indice N est indépendant de la couche d'indice n', quelle que soit son incidence initiale.

2/ Cette fibre est gainée par une couche transparente d'indice $N' = 1{,}30$ dont l'épaisseur est très supérieure à la longueur d'onde. Expliquer et justifier la raison pour laquelle un rayon lumineux incident, situé dans un plan méridien et incliné d'un angle θ par rapport à l'axe, est conduit le long de l'axe sans jamais traverser la gaine.

3/ Avec le présent choix des indices, cette propriété est-elle vérifiée quel que soit l'angle θ ou existe-t-il une valeur limite pour θ ?

IV/ Face de sortie focalisante

La fibre étant utilisée en "monomode", c'est-à-dire en lumière paraxiale pour éviter les réflexions multiples, on recherche un profil de sortie (Figure 3) qui fasse converger vers un foyer F tout faisceau de lumière parallèle à l'axe Ox. Le calcul se fera en négligeant l'épaisseur de la couche antireflet. On désignera par S le sommet de la face de sortie et par $f = \overline{SF}$ la distance focale. La position du point d'émergence M sera repérée à l'aide de ses coordonnées polaires r et θ.

1/ On considérera ci-après les chemins optiques mesures jusqu'au point , à compter d'un plan d'onde (P_0) fixe, positionne en H_0 sur l'axe optique, à l'intérieur de la fibre. Exprimer alors, en fonction de $f, r, \theta.$ et des indices, la différence (Δ) entre le chemin optique selon un rayon lumineux passant par le point courant M et le chemin optique relatif au rayon particulier confondu avec l'axe optique.

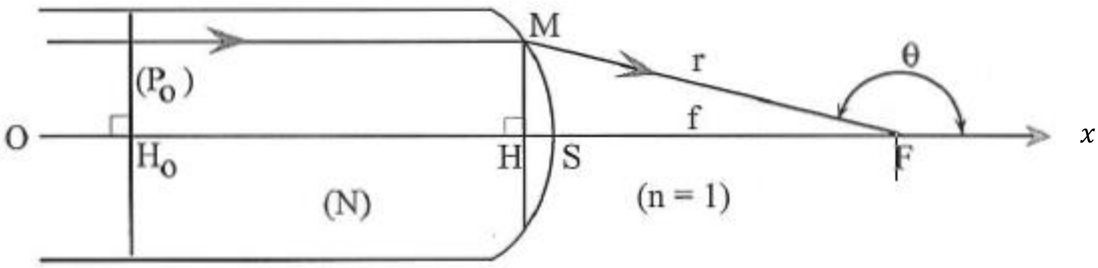


Figure.3

2/ Sachant qu'un foyer lumineux est un point ou se superposent un grand nombre d'ondes en concordance de phase, traduire cette propriété par une condition relative à la différence (Δ). En déduire alors l'équation $r = g(\theta)$ du profil de la face de sortie dans le plan de figure. Comment se nomme cette courbe ?

3/ Les fibres optiques utilisées en monomode ont un diamètre très faible, de l'ordre de $6\ \mu m$. En supposant que la valeur maximale de la distance HM soit égale à $3\ \mu m$, en déduire la distance focale f puis la flèche $(HS)_{\max}$ de la face de sortie, si l'on souhaite que le demi-angle au sommet du cône de lumière atteignant le foyer F , c'est-à-dire θ , ait pour mesure 30°.

Fiche thématique n°6 : **Guide d’onde à section rectangulaire**

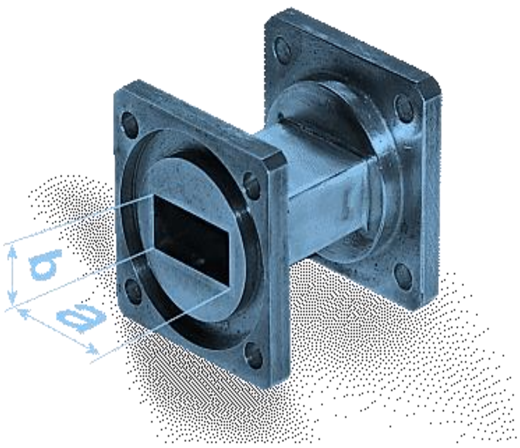
Quel rapport entre un transmetteur de haute puissance, un four micro-ondes, un bloc-convertisseurs à faible bruit des antennes de réception des signaux de télévision, une pince optique et des équipements radars ?

Réponse : sont constitués de Guide d’onde à section rectangulaire

1 – Notions de base de la théorie des guides d'ondes

Le guide d'ondes est une forme particulière de la ligne de transmission utilisée pour les applications micro-ondes. Il s’agit de tubes métalliques fait de matériaux de haute qualité (cuivre et laiton - partiellement argenté ou même plaqué or). Dans la technologie récente, ces guides sont composés de cuivre plaqué électriquement d’une mince couche de fibres de carbone

Un guide d'ondes peut avoir une section transversale rectangulaire, circulaire ou elliptique, la section rectangulaire étant la plus couramment utilisée pour les connexions relativement courtes. Les guides d’onde ont plusieurs avantages par rapport à la transmission par fils et lignes coaxiales (surtout pour des fréquences supérieures à **1** GHz*). Le principal avantage est la minimisation de la perte lors de la transmission. Les champs électriques et magnétiques, qui sont utilisés pour le transport de l'énergie, sont égaux à zéro dans les surfaces métalliques. Par conséquent, ces champs sont confinés à l'espace interne du guide ce qui minimise les pertes. Ils sont de plus complètement blindés ce qui entraîne un privilège pour la transmission de très faibles signaux.*



James Clerk Maxwell

Maxwell est un physicien et mathématicien écossais. Il est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations, l'électricité, le magnétisme et l'induction, en incluant une importante modification du théorème d'Ampère.
Il est également célèbre pour avoir interprété, dans un article la lumière comme étant un phénomène électromagnétique en s'appuyant sur les travaux de Michael Faraday.
Maxwell est considéré par de nombreux physiciens comme le scientifique du XIX[e] siècle ayant eu le plus d'influence au vingtième siècle. Ses contributions à la science sont considérées par certains comme aussi importantes que celles d'Isaac Newton ou d'Albert Einstein.
Il est également connu pour avoir réalisé le 17 mai 1861 la première photographie en vraie couleur

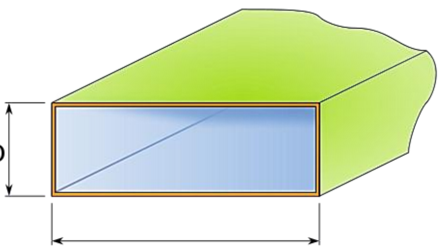
On souhaite propager dans ce guide une onde de pulsation ω. Son vecteur d'onde dans le vide a pour norme $k_0 = \frac{\omega}{c}$ et sa longueur d'onde dans le vide est : $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$

On ne s'intéressera dans cette fiche à un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = f(x,y)expj(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

La continuité des composantes tangentielle $\vec{E}$ de et normale de $\vec{B}$, associée à la nullité des champs dans le métal, donnent les relations suivantes :

$E_T = B_N = 0$ en $x = 0$ et $x = a$, ainsi qu'en : $y = 0$ et $y = b$



Dans le vide : $div\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow f \; ne \; dépend \; que \; de \; x$

Equation de Maxwell de propagation s'écrit : $\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f = 0$

$\frac{\omega^2}{c^2} < k^2$: conduit à des solutions en exponentielles réelles qui ne peuvent s'annuler en deux points sans s'annuler partout $\Rightarrow$ cas non intéressant

$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$ les solutions sont affines et sont nulles partout comme auparavant

$\frac{\omega^2}{c^2} > k^2$: $f(x) = E_0 sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) expj(\omega t - kz)\vec{e}_y$ cette solution est appelée mode n

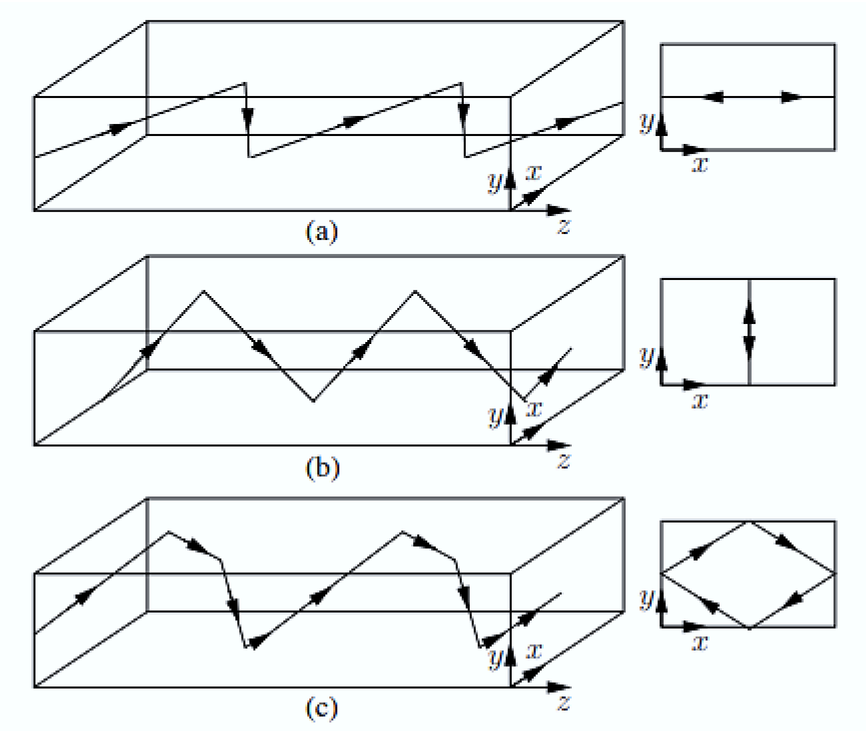
Remarque :

Le champ précédent est transverse et porté seulement par $\vec{e}_y$; si le champ avait une composante selon $\vec{e}_x$, alors les amplitudes serait de la forme : $E_0 sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

Les modes seraient alors caractérisées par un couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

Deux modes supérieurs peuvent donc se propager :

- Le mode TE où le champ électrique est transverse avec :
  - $E_z = 0$
  - $H_z \neq 0$
- Le mode TM où le champ magnétique est transverse avec :
  - $E_z \neq 0$
  - $H_z = 0$



TE_{m0}

TE_{0n}

TE_{mn} ou TM_{mn}

La condition de propagation impose que la pulsation ω de l'onde soit plus grande que la pulsation de coupure ω_c :

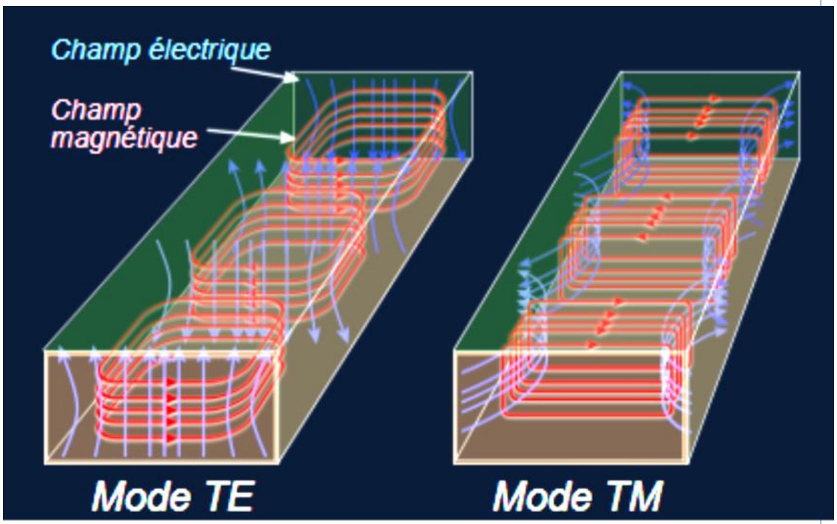
$$\omega \geq c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega_c$$

2 – Illustration de la Propagation

<table>
<tr>
<td>

Lorsque l'énergie est introduite dans un guide d'ondes, un champ électrique $\vec{E}$ est induit dans le centre de la paroi de largeur « a ». Ce champ électrique est plus fort au centre du guide d'ondes et diminue dans la direction de la paroi étroite « b ». Il a une forme sinusoïdale vu en coupe. Un champ magnétique $\vec{B}$ est également induit et, comme ce champ ne peut être maintenu verticalement sur un conducteur métallique, il prend la direction orthogonale.

</td>
<td>



Description générale des modes de transmission dans un guide d'ondes

</td>
</tr>
</table>

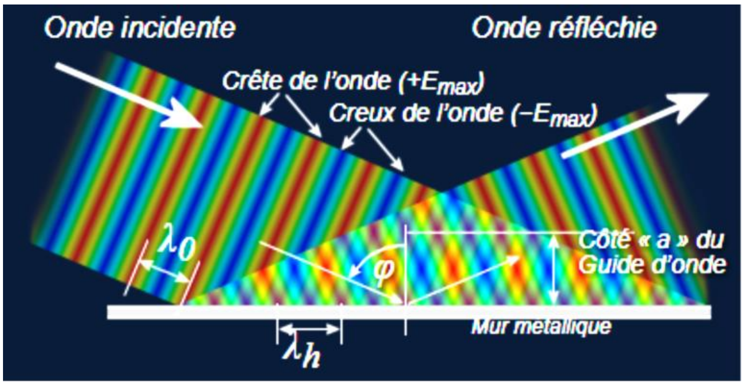
Le champ électrique varie dans le temps selon la fréquence du signal et donne dans la direction longitudinale du guide d'ondes des maxima et des minima aux endroits correspondant à la moitié de la longueur d'onde. L'énergie à haute fréquence qui est introduite dans un guide d'onde, génère une onde électromagnétique transversale (mode TEM) dont les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires les uns aux autres. Ces champs ne restent pas dans leur état respectif et se propagent ainsi dans les guides d'ondes. Avec le temps, ils changent l'intensité et de polarité au rythme du signal d'entrée. Leur interaction permet ainsi de transmettre l'énergie du signal d'entrée vers sa destination.

1.1. Propagation par multiples réflexions

<table>
<tr>
<td>

La propagation dans un guide d'ondes peut être expliquée en partie par l'optique ondulatoire et les propriétés des ondes en espace libre s'appliquent donc dans ce cas. Une onde plane de longueur d'onde λ_0, sous une incidence φ est réfléchie par le mur métallique du guide. L'amplitude du champ électrique $\vec{E}$, perpendiculaire au plan de l'onde, est indiquée par des couleurs différentes. La crête de l'onde est indiquée en rouge et le creux en bleu. Le vert donne le point de valeur nulle du champ.

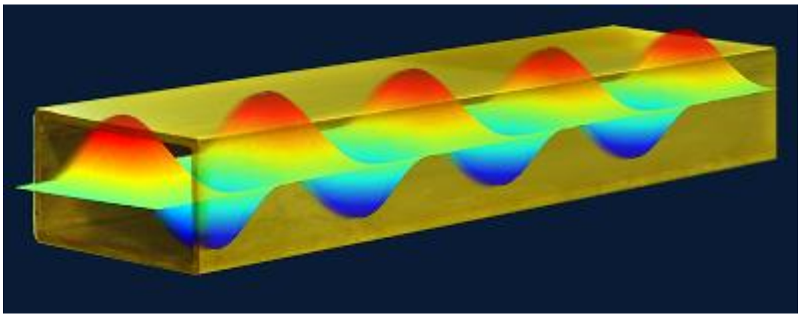
</td>
<td>



Réflexion d'une onde arrivant à un angle oblique sur le mur métallique du guide

</td>
</tr>
</table>

En mettant un mur métallique à une distance « a » au-dessus du premier, sans changer rien d'autre, il y a réflexion totale interne de l'onde et formation de « paquets » d'onde qui se déplacent à la vitesse de phase, ou de groupe, vers la droite correspondant au comportement tridimensionnel de l'onde. Les deux murs (celui tracé en bas et celui identifié par une ligne au-dessus) correspondent aux murs « b » dans un guide d'onde.



Vue tridimensionnelle des champs électrique et magnétiques pour le mode TE_{10} dans un guide de section rectangulaire

1.2. Longueurs d'onde dans un guide d'ondes

En pratique, les valeurs maximales et minimales du champ $\vec{E}$ dans un guide d'onde sont le résultat des multiples interférences des ondes réfléchies par tous les murs. Les « paquets » se déplaçant vers la droite peuvent ainsi avoir une distance inter-maxima différente que celle en espace libre avec la même longueur d'onde λo.

1.3. Raisons de l'atténuation

L'atténuation dans un guide d'ondes est proportionnelle à la fréquence du signal. Même avec une fréquence de coupure, l'atténuation est importante mais atteint un minimum en augmentant la fréquence jusqu'à une certaine valeur, demeure ensuite presque constante, puis augmente à nouveau. Le facteur important pour avoir une bonne conductivité dans un guide rectangulaire est sa dimension « a » qui défini la fréquence de coupure. En effet, la longueur d'onde du signal doit être de dimension proche de celle de ce mur pour pouvoir induire un courant qui propagera l'onde dans celui-ci. Donc, plus la fréquence à transmettre est élevée, plus le mur « a » doit être petit et vise-et-versa.

1.1. Rigidité diélectrique*

La rigidité diélectrique est la valeur maximale d'un champ électrique que peut supporter l'isolant dans un guide d'onde sans décharge disruptive d'une paroi à l'autre. Elle est habituellement exprimée en kilovolts par millimètre et dépend directement de l'espacement entre les parois à fréquence égale. Pour un guide d'ondes de section rectangulaire, cette distance dépend donc de la longueur du mur le plus court « b ». La rigidité dépend aussi de l'humidité de l'air contenu dans le guide. Pour améliorer ce facteur, les guides à haute puissance sont pressurisés avec de l'air déshumidifié. Si un endroit développe une fuite, l'air sec s'échappe mais la pression interne étant plus forte que celle de l'environnement, l'humidité externe ne peut pénétrer dans le guide.

La valeur du champ de claquage (ou de percement) du matériau diélectrique est appelée champ **disruptif ou rigidité diélectrique*

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Filière : SMP 6
TD : Propagations Guidées
Année Universitaire : 2017/2018

Devoir n°2

Problème : Fibre optique à saut d'indice

Partie A : aspect géométrique

Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique transparent homogène et isotrope, de diamètre $2a$, d'indice de réfraction $n_1 = 1.447$, entouré d'une gaine, elle aussi transparente homogène et isotrope dont l'indice de réfraction $n_2 = 1.443$.

1. Montrer que l'angle α doit être supérieur à une valeur que l'on exprimera en fonction de n_1 et n_2 pour qu'il y ait réflexion totale en I.

2. En déduire que l'angle i à l'entrée de la fibre doit rester inférieur à une valeur imax que l'on exprimera en fonction de n_1 et n_2. Faire l'application numérique (on considérera que l'indice de l'air est égal à 1).

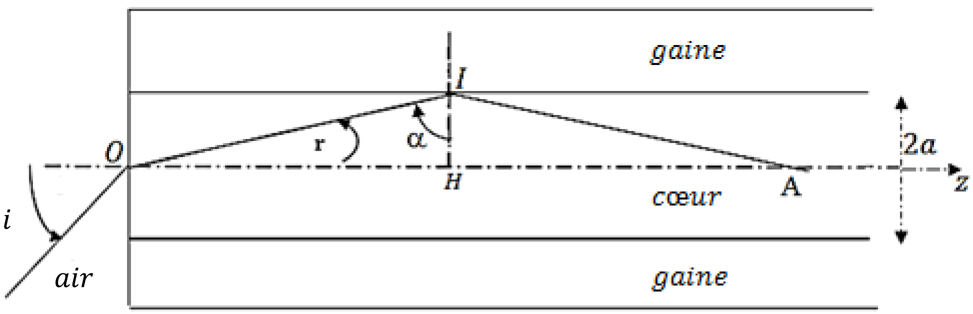
3. Exprimer le chemin optique (OA) en fonction de n_1 , a et i

4. Montrer que la variation relative de chemin optique δL ($\delta L = \frac{(OA)imax - (OA)i=0}{(OA)i=0}$) pour les rayons extrêmes se propageant à travers la fibre optique est égale à :

$(n_1/n_2$ - 1). Que pensez-vous du stigmatisme de cette fibre ?

5. Application à la transmission d'informations

En entrée de la fibre, on place une diode Laser qui émet des impulsions lumineuses. Ces impulsions correspondent au codage binaire d'une information numérique.
Quelle durée τ doit séparer deux impulsions successives pour qu'elles ne se superposent pas à la sortie de la fibre ?
En déduire le débit maximal (en bits par seconde) de cette fibre optique.



Partie B : aspect ondulatoire

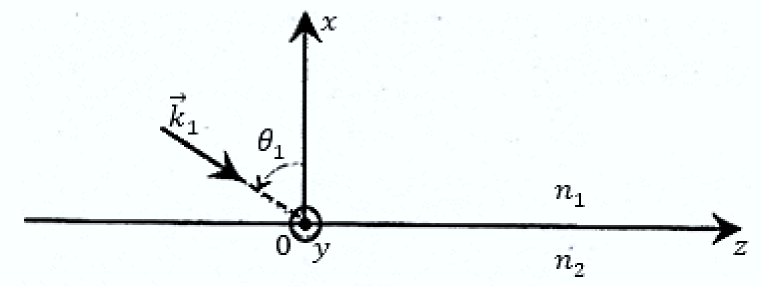
Les milieux diélectriques étudiés dans cette partie sont supposés linéaires homogènes, isotropes, non magnétiques et isolants. La permittivité diélectrique du milieu est notée ε et son indice n.
On considère R un référentiel galiléen, il est rapporté à trois axes orthogonaux Ox, Oy, Oz . $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est la base orthonormée directe associée.

1. Le phénomène de réflexion totale

On considère un dioptre plan (Oyz) qui sépare deux milieux diélectriques d'indices différents n_1 et n_2. Une onde incidente plane, progressive, monochromatique, polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence est caractérisée par son champ électrique qui s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}_i} = E_0 expj(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})\vec{e}_y$$

où ω est la pulsation de l'onde, λ la longueur d'onde dans le vide, $\vec{k}_1 = k_{1x}\vec{e}_x + k_{1z}\vec{e}_z$ son vecteur d'onde.



Cette onde donne naissance à deux ondes :

• dans le milieu d'indice n_2, une onde transmise dont le vecteur champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}_t} = t_\perp E_0 expj(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r})\vec{e}_y \quad \text{avec} \quad \vec{k}_2 = k_{2x}\vec{e}_x + k_{2z}\vec{e}_z$$

et $t_\perp$ le coefficient de transmission en amplitude complexe,

• dans le milieu d'indice n_1, une onde réfléchie dont le vecteur champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}_r} = r_\perp E_0 expj\left(\omega t - \vec{k'}_1.\vec{r}\right)\vec{e}_y \quad \text{avec} \quad \vec{k'}_1 = k'_{1x}\vec{e}_x + k'_{1z}\vec{e}_z$$

et $r_\perp$ le coefficient de réflexion en amplitude complexe.

1.1. Structure des ondes

1.1.1. Donner les expressions des composantes des champs magnétiques associés aux ondes incidente, transmise et réfléchie en fonction de $E_0, \omega, t, \vec{r}, t_\perp, r_\perp$ et des composantes des vecteurs $\vec{k}_1$, $\vec{k'}_1$ *et* $\vec{k}_2$.

1.1.2.

a. Expliciter les composantes k_{1x} *et* k_{1z} en fonction de n_1, ω, c *et* θ_1.

b. En utilisant les relations de continuité à l'interface entre les milieux, exprimer k'_{1z} *et* k_{2z} en fonction de n_1, ω, c *et* θ_1.

c. Donner les expressions de k'_{1x} , $r_\perp$ *et* $t_\perp$ en fonction de k_{1x} *et* k_{2x}. Dans cette question on ne cherchera pas à déterminer k_{2x} .

1.2. Étude de la réflexion totale

Rappeler la condition sur n_1, n_2 *et* θ_1 pour que l'on observe le phénomène de réflexion totale.

1.2.1. Déterminer k_{2x} en fonction de n_1, n_2, ω, c *et* θ_1. On justifiera avec soin le choix du signe sachant que le milieu d'indice n_2 occupe le demi-espace des x négatifs.

1.2.2. Décrire avec précision la structure de l'onde transmise.

1.2.3. Donner l'expression du coefficient de réflexion $r_\perp$ en amplitude complexe en fonction de n_1, n_2 , *et* θ_1.

2. Onde électromagnétique guidée dans une fibre

On va maintenant étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu tel que celui décrit au début de la partie A, de forme cylindrique et d'axe Oz.

Parmi les divers modes de propagation possibles : transverses électriques (TE), transverses magnétiques (TM) on se limitera dans un premier temps à l'étude des modes (TE).

2.1. Onde transverse électrique

Dans le cas d'une onde (TE), le champ $\vec{E}$ est partout perpendiculaire à Oz. Il s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \overrightarrow{E_s}(r,\varphi) expj(\omega t - \beta z) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{E_s}(r,\varphi).\vec{e}_z = 0$$

Par contre le champ magnétique $\vec{B}$ s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}} = \overrightarrow{B_s}(r,\varphi) expj(\omega t - \beta z) + B_z(r,\varphi)\vec{e}_z expj(\omega t - \beta z) \qquad \text{avec} \quad \overrightarrow{B_s}(r,\varphi).\vec{e}_z = 0$$

Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r,φ,z). On précise que β est réel positif et $\mu_0\varepsilon\omega^2 \neq \beta^2$.
2.1.1. En utilisant les équations de Maxwell, ainsi que les formules d'analyse vectorielle rappelées dans les données regroupées à la fin du problème, établir les relations :

$$\overrightarrow{E_s} = j\frac{\omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{grad}B_z}{\mu_0\varepsilon\omega^2 - \beta^2} \qquad et \qquad \overrightarrow{B_s} = -j\frac{\beta\overrightarrow{grad}B_z}{\mu_0\varepsilon\omega^2 - \beta^2}$$

2.1.2. En utilisant l'équation de propagation relative à $\vec{B}$ projetée selon z, montrer que B_z vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \left(-\beta^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\right)B_z = 0$$

2.1.3. On cherche une solution à l'équation précédente sous la forme $B_z = F(r)G(\varphi)$; $F(r)$ est une fonction de la variable r et $G(\varphi)$ une fonction de la variable φ. Montrer que $F(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \left(-\frac{p^2}{r^2} - \beta^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\right)F = 0$$

où p est un entier naturel. Déduire que $G(\varphi)$ peut s'écrire sous la forme : $G(\varphi) = A.cosp\varphi + B.sinp\varphi$

où A et B sont des constantes positives.

.

2.2. Étude d'une fibre optique à saut d'indice

On désire appliquer les résultats précédents à l'étude d'une fibre optique à saut d'indice formée d'un cœur diélectrique cylindrique de rayon a, d'indice n_1 et d'une gaine diélectrique de grand rayon, d'indice n_2 légèrement inférieur à n_1.
Une onde électromagnétique est guidée si :

$$\frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} - \beta^2 > 0 \qquad et \qquad \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} - \beta^2 < 0$$

On pose :

$$\frac{u^2}{a^2} = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} - \beta^2 \ , \qquad \frac{v^2}{a^2} = \beta^2 - \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} \qquad et \qquad V^2 = u^2 + v^2$$

$u, v, et\ V$ sont des constantes positives.
Par analogie avec les notations précédentes, les champs sont définis de la manière suivante :

- dans le cœur $(r < a)$:

$\underline{\vec{E}_1} = \overrightarrow{E_{s1}}(r,\varphi) expj(\omega t - \beta z)$ et $\underline{\vec{B}_1} = \overrightarrow{B_{s1}}(r,\varphi) expj(\omega t - \beta z) + B_{z1}(r,\varphi)\vec{e}_z expj(\omega t - \beta z)$

avec $\overrightarrow{E_{s1}}(r,\varphi).\vec{e}_z = 0$ et $\overrightarrow{B_{s1}}(r,\varphi).\vec{e}_z = 0$

- dans la gaine $(r > a)$:

$\underline{\vec{E}_2} = \overrightarrow{E_{s2}}(r,\varphi) expj(\omega t - \beta z)$ et $\underline{\vec{B}_2} = \overrightarrow{B_{s2}}(r,\varphi) expj(\omega t - \beta z) + B_{z2}(r,\varphi)\vec{e}_z expj(\omega t - \beta z)$

avec $\overrightarrow{E_{s2}}(r,\varphi).\vec{e}_z = 0$ et $\overrightarrow{B_{s2}}(r,\varphi).\vec{e}_z = 0$

2.2.1. Vérifier que $B_{z1}(r,\varphi) = B_{01}J_p(u\frac{r}{a})\cos(p\varphi)$ est solution dans le cœur d'indice. $J_p(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre p dont quelques propriétés sont rappelées dans les données regroupées à la fin du problème.

On admet de même que $B_{z2}(r,\varphi) = B_{02}K_p(v\frac{r}{a})\cos(p\varphi)$ est solution de l'équation différentielle pour la gaine. $K_p(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre p dont quelques propriétés sont rappelées dans les données regroupées à la fin du problème.

2.2.2. Analyse des relations de passage à l'interface gaine-cœur

a. Rappeler les relations de passage relatives au vecteur champ électrique en $r = a$. On ne cherchera pas à calculer explicitement les composantes des vecteurs champs électriques.

b. Rappeler de même celles relatives au vecteur champ magnétique en $r = a$. On ne cherchera pas à calculer explicitement les composantes des vecteurs champs magnétiques.

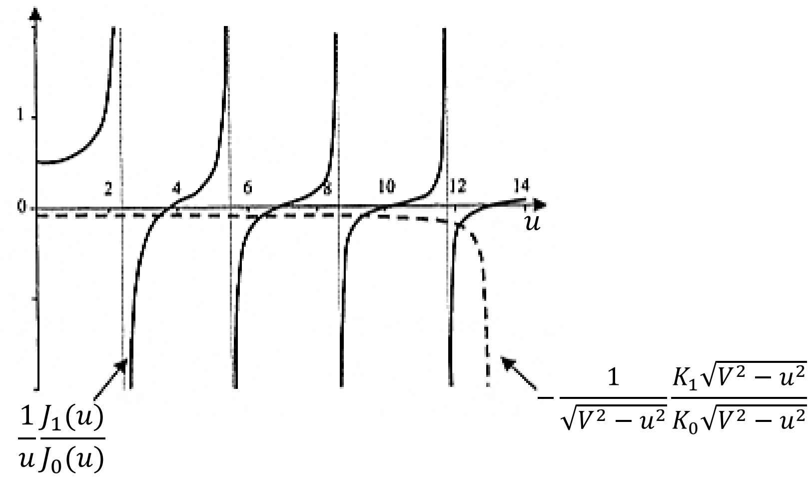
On admet alors que l'on peut déduire de ces relations que $p = 0$ et que u *et* v vérifient la relation suivante :

$$\frac{1}{u}\frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{v}\frac{K_1(v)}{K_0(v)}$$

2.2.3. Notion de mode

Les courbes de la figure suivante représentent les fonctions :

$$\frac{1}{u}\frac{J_1(u)}{J_0(u)} \quad et - \frac{1}{\sqrt{V^2-u^2}}\frac{K_1\sqrt{V^2-u^2}}{K_0\sqrt{V^2-u^2}} \qquad pour \quad V = 12.9$$



a. Déterminer la valeur de a sachant que $\lambda = 1,31\,\mu m$, $n_1 = 1.447$ et $n_2 = 1.443$

b. Dénombrer le nombre de modes (TE) possibles dans cette fibre.

c. En remarquant que l'on a toujours u inférieur à V, montrer qu'il existe une longueur d'onde de coupure λ_c au dessus de laquelle la propagation d'un mode (TE) est impossible.

d. Calculer λ_c pour $a = 4,5\,\mu m$. On utilise cette fibre avec une longueur d'onde $\lambda = 1,31\,\mu m$, calculer V et conclure.

Annexe et Bibliographie

Continuité des ondes électromagnétiques aux interfaces

1 Introduction

Le caractère transverse des ondes lumineuses n'a pas été utilisé pour établir les lois de la réflexion et de la réfraction (Snell-Descartes) : seul le caractère ondulatoire de la lumière a été pris en compte. Il n'est plus possible de négliger ce caractère transverse lorsqu'on souhaité établir les relations de Fresnel qui lient les amplitudes des ondes incidente, transmise et réfléchie à l'interface entre deux milieux diélectriques (Figure 1). En particulier, il faut établir les *relations de continuité* des différents vecteurs à l'interface entre les deux milieux.

C'est l'objet de ce complément.

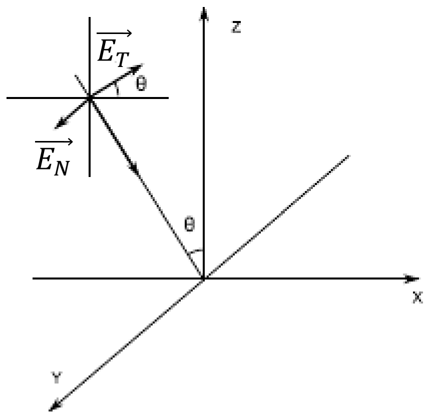


Figure 1 - Décomposition du champ électrique au voisinage de l'interface entre 2 milieux diélectriques.

2 Continuité des composantes tangentielles des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$.

Considérons une surface $S = \delta h.\delta l$ délimitée par un contour orienté rectangulaire C. Supposons en outre que S soit petite et située à l'interface entre les deux milieux diélectriques (Figure 2). Les équations de Maxwell sont vérifiées en tout point de l'espace.

En particulier,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

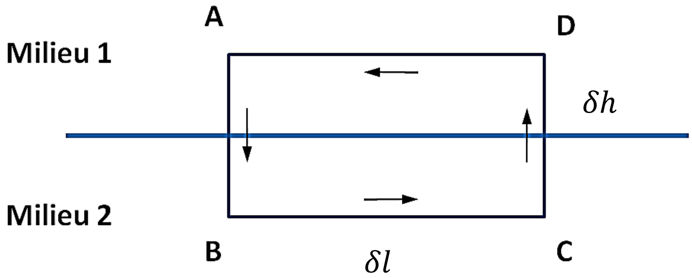


Figure 2 - Surface et contour d'intégration à l'interface.

En intégrant liquation précédente sur la surface S,

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right).\overrightarrow{dS} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$$

et en utilisant la formule de Stokes

$$\iint_\Sigma \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right).\overrightarrow{d\Sigma} = \oint_\Gamma \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

où A *est un champ de vecteur, X une surface ouverte et r un contour ferme de cette surface, nous obtenons*

$$\oint_\Gamma \vec{\mathrm{E}}.\overrightarrow{\mathrm{dl}} = -\iint_S \frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}.\overrightarrow{\mathrm{dS}} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\iint_S \vec{\mathrm{B}}.\overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

Faisons tendre l'élément de surface vers zéro de sorte qu'il continue à contenir la même portion d'interface 1-2 ($\delta h \to 0$): $\overrightarrow{dS} = \delta h \delta l \vec{u}_N \to 0$ où $\vec{u}_N$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S.

Dans ce cas, le membre de droite de l'équation précédente tend vers zéro 0 pour toute valeur de $\vec{B}$ et donc

$$\oint_\Gamma \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$$

Le calcul de l'intégrale de contour est évident si on décompose le champ électrique de part et d'autre de l'interface en ses composantes perpendiculaire N et tangentielle T à l'interface :

$$\oint_\Gamma \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \left(\vec{E}_{T,1} - \vec{E}_{t,2}\right).\delta l \vec{u}_T = 0$$

les autres termes de la somme s'annulant lorsque $\delta h \to 0$. Cette équation montre que la composante parallèle à l'interface du champ électrique $\vec{E}$ est conservée :

$$\vec{E}_{T,1} = \vec{E}_{T,2}$$

De même, en partant de la troisième équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

on obtient par le même raisonnement

$$\frac{\vec{B}_{T,1}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_{T,2}}{\mu_2} \quad c'est-à-dire \qquad \vec{H}_{T,1} = \vec{H}_{T,2}$$

3 Continuité des composantes normales des champs de déplacement électrique $\vec{D}$ et d'induction magnétique $\vec{B}$.

Considérons maintenant la même interface et remplaçons la surface S bidimensionnelle par une surface cylindrique de hauteur δh et de base S (Figure 3).

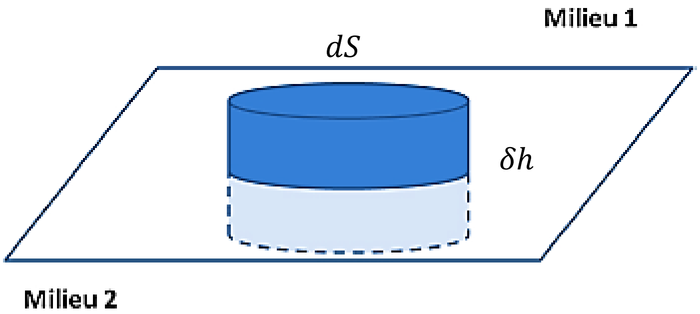


Figure 3 - Surface et volume d'intégration à l'interface.

Le théorème de Gauss nous dit que

$$\vec{\nabla} . \vec{D} = \vec{\nabla} . \varepsilon \vec{E} = 0$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky

$$\iint_S \vec{A} . \vec{dS} = \iiint_V \left(\vec{\nabla} . \vec{A}\right) dV$$

nous obtenons

$$\iint_S \left(\varepsilon \vec{E}\right) . \vec{dS} = \iiint_V \left(\vec{\nabla} . \varepsilon \vec{E}\right) dV = 0$$

En faisant tendre la hauteur du cylindre vers 0 ($\delta h \to 0$), l'integrale sur la surface latérale du cylindre s'annule et nous ne devons plus tenir compte que des composantes normales de $\vec{E}$ à l'interface :

A partir de

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

nous obtenons de la même manière $\quad \vec{B}_{N,1} = \vec{B}_{N,2}$

En résumé ...

Nous obtenons 4 équations relatives à la propagation des composantes des champs vectoriels à l'interface entre 2 milieux diélectriques :

$$\vec{E}_{T,1} = \vec{E}_{T,2}$$

$$\vec{H}_{T,1} = \vec{H}_{t,2}$$

$$\varepsilon_1 \vec{E}_{N,1} = \varepsilon_2 \vec{E}_{N,2}$$

$$\vec{B}_{N,1} = \vec{B}_{N,2}$$

Les deux premières traduisent la continuité des composantes parallèles du champ électrique et du champ magnétique. Les deux suivantes la continuité des composantes normales du déplacement électrique et de l'induction magnétique.

Références

- Tout bon ouvrage de physique niveau licence pour les trois premiers chapitres,

[1] E. Hecht, *Optics*, Addisson-Wesley, New-York, 4th Ed. (2002)
[2] R. Taillet, Optique physique, De boeck (2006)
[3] K.D. Moller, *Optics*, University Science Books, Mill Valley (1988)
[4] J.M. Jonathan, « Introduction à l'optique guidée et aux fibres optiques », Institut d'Optique paris (2009)
[5] P-A. Bélanger, Les fibres optiques, Université Laval, Canada (1993)
[6] T. Okoshi, *Optical Fibers*. Academic Press, N.Y., (1982)
[7] J.J. *Labarthe*, Ondes, Corde vibrante, Acoustique, Électromagnétisme, Optique ondulatoire Annales de Physique. Université Paris-sud, (2006)
[8] B. Amana et J.-L. Lemaire, Propagation d'ondes électromagnétiques dans un guide d'onde à section rectangulaire. Licence de Physique - Univ. de Cergy-Pontoise(2014)
[9] T. P. Persall, Photonics essentials « an introduction with experiments »McGraw-Hill, (2003).
[10] Kjell J. Gasvik, Optical Metrology, Third Edition, JOHN WILEY *and SONS, LTD* (2002)
[11] Palais, J.C. Fiber Optic Communications, 4th edn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. (1998)
[12] Keiser, G. Optical Fiber Communications, 2nd edn, McGraw-Hill, New York. (1991)
[13] Goff, D.R. Fiber Optic Reference Guide: A Practical Guide to the Technology, Focal Press. (1999)
[14] Yokohama I, and al Technical Staff of CSELT Fiber Optic Communications Handbook, McGraw-Hill. (1990)