Examen de Mécanique des Solides

Session de Février 2024 - Durée de l'épreuve : 2h

N.B. Les quatre exercices sont indépendants.

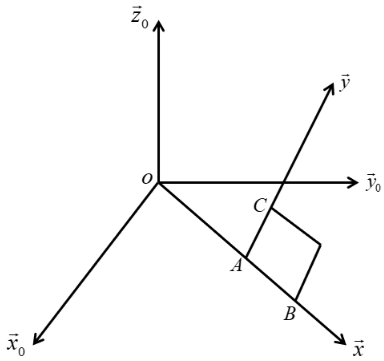
<u>Exercice 1 :</u> (5 pts)

On considère les trois glisseurs : $\vec{V}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{V}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j}$, définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et liés respectivement aux points : A(0, 1, 2) ; B(1, 0, 2) et C(1, 2, 0). Soit [T] la somme de ces trois vecteurs.

1) Déterminer les éléments de réduction de [T] associé au système des trois vecteurs au point O.
2) Calculer l'invariant Scalaire I de [T] et de réduire sa nature.
3) Trouver les équations de l'axe central de [T] et donner sa représentation graphique

<u>Exercice 2 :</u> (5 pts)

Soit (S) un solide constitué par un cube de côté a et $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S). Par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ de référence, le solide (S) est en mouvement de la manière suivante : Si l'on désigne par A un sommet, et par AB, AC et AD les trois arrêts issues de A, alors :



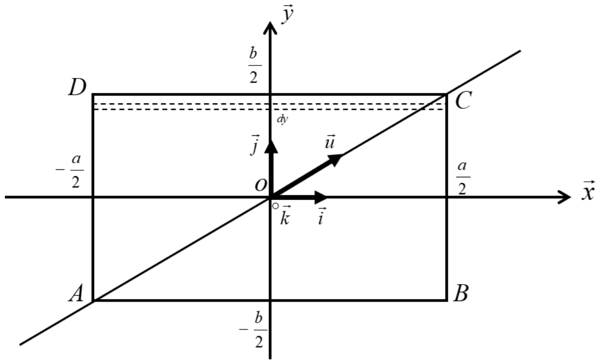
- L'arrêt AB glisse sur le plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ de façon quelconque.
- Le cube tourne autour AB.

On défini le repère intermédiaire $R_1(A, \vec{x}, \vec{u}, \vec{z_0})$ par rapport A(x,y,0) dans R_0, $\vec{x}$ unitaire de $\overrightarrow{AB}$ et on pose $\psi = (\vec{x_0}, \vec{y_0})$ et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AC})$

1) Déterminer $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ dans R_1 puis dans R_0 et R
2) Calculer $\vec{V}_{B/R_0}$ et $\vec{V}_{C/R_0}$, les exprimer dans R_1.
3) Calculer $\vec{\Gamma}_{B/R_0}$ de deux manières différentes dans R_1.

<u>Exercice 3 :</u> (5 pts)

Une plaque rectangulaire homogène, de masse m, dont les longueur des côtés a et b tourne autour de l'un de ces diagonales avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}$. Soit O le centre de la plaque et $O\overrightarrow{x}$, $O\overrightarrow{y}$ deux axes perpendiculaires et parallèles aux côtés. Les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ forment en O la base principale d'inertie.



1) Calculer les moments principaux d'inertie I_x,I_y et I_z par rapport à un repère principale d'inertie qu'on précisera. En déduire la matrice d'inertie dans ce repère.

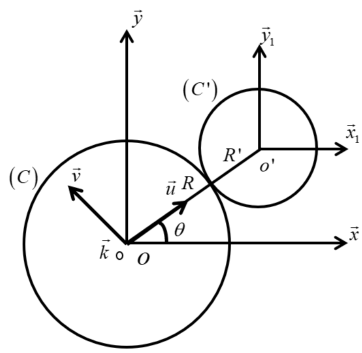
2) Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation formé part la diagonale AC, de la plaque, montrer que le vecteur rotation s'écrit sous la forme $\overrightarrow{\omega} = (a\vec{i} + b\vec{j})/\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

3) Déterminer le moment cinétique au centre de la plaque.

4) Traiter le cas où $a = 0$. Conclure.

<u>Exercice 4 :</u> (5 pts)

Soit (***C***) et (***C'***) deux cylindres en contact ponctuel en I (voir la figure). Nous admettons que le cylindre d'axe O et de rayon R est fixe Celui dont l'axe est ***O'***, de masse m et le rayon ***R'*** roule sans glisser à l'extérieur On note φ l'angle de rotation de (***C'***) autour de (***O'***, $\vec{k}$) et $\theta = (\vec{x}, \vec{u})$. On donne le moment d'inertie d'un disque de masse m et de rayon r : $I_{oz} = \frac{mr^2}{2}$.



1) Déterminer les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V}(O')$ et $\overrightarrow{V_g}(I_{C'})$ quand I appartient à (***C'***).

2) Traduire la condition de roulement sans glissement au point de contact I entre (***C***) et (***C'***).

3) En appliquant le théorème de Koenig. Déterminer le moment cinétique en un point de l'axe O du cylindre mobile (***C'***).

4) Calculer l'Energie Cinétique correspondant.