Module P135 : Mécanique des Solides

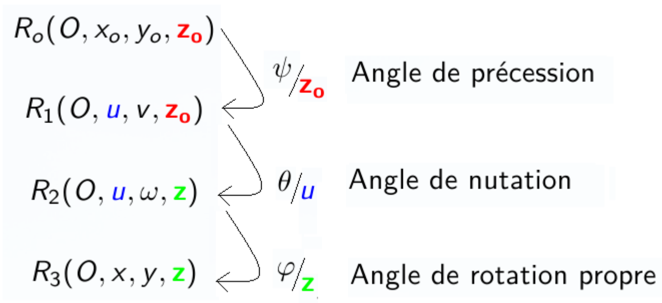
Correction d'Examen de Mécanique des Solides P135

Semestre 3

Correction d'exercice 1 :

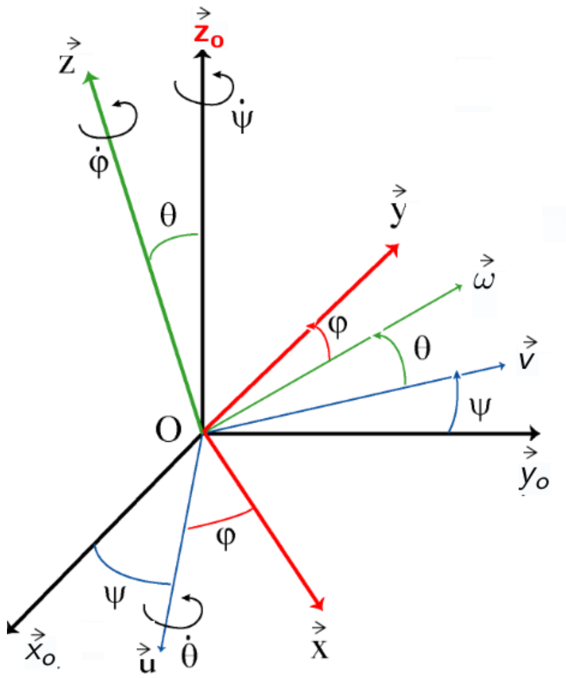
1) Soit $\mathbf{R_o}(\mathbf{O}, \mathbf{x_o}, \mathbf{y_o}, \mathbf{z_o})$ en repère absolue et $\mathbf{R_1}(\mathbf{O}, \omega, v, \mathbf{z_o})$ en repère lié au solide $(\mathbf{S})$

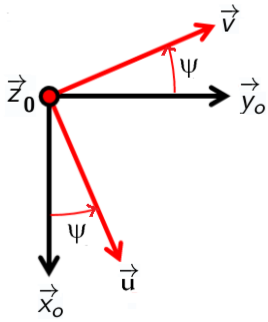
$$\mathbf{R_o}(\mathbf{O}, \mathbf{x_o}, \mathbf{y_o}, \mathbf{z_o}), \quad \mathbf{R_1}(\mathbf{O}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z_o}), \quad \mathbf{R_2}(\mathbf{O}, \mathbf{u}, \omega, \mathbf{z}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R_3}(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$



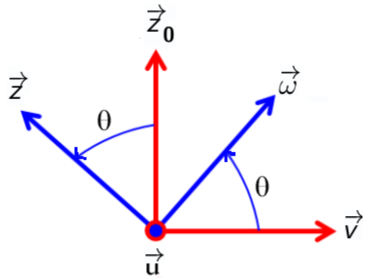
- ψ Angle de précession
- θ Angle de nutation
- φ Angle de rotation propre

2) **C'est le cas des angles d'Euler**

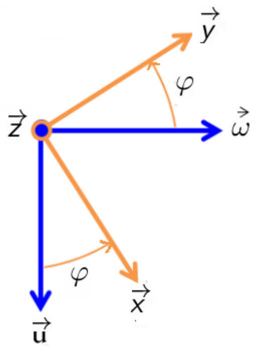




$$\vec{\mathbf{v}} = \cos\psi\,\vec{\mathbf{y_0}} - \sin\psi\,\vec{\mathbf{x_0}} \qquad\qquad \vec{\mathbf{u}} = \cos\psi\,\vec{\mathbf{x_0}} + \sin\psi\,\vec{\mathbf{y_0}}$$



$$\vec{\mathbf{w}} = \cos\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \sin\theta\,\vec{\mathbf{z_0}} \qquad\qquad \vec{\mathbf{z}} = -\sin\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \cos\theta\,\vec{\mathbf{z_0}}$$

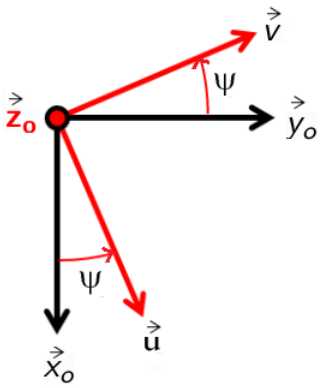


$$\vec{\mathbf{x}} = \cos\varphi\,\vec{\mathbf{u}} + \sin\varphi\,\vec{\omega} \qquad\qquad \vec{\mathbf{y}} = -\sin\varphi\,\vec{\mathbf{u}} + \cos\varphi\,\vec{\omega}$$

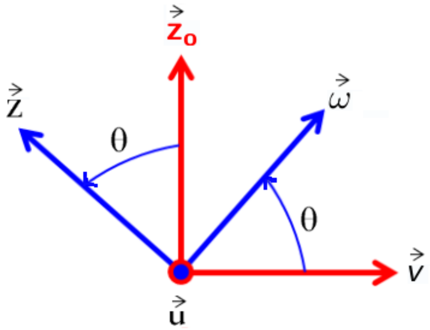
3) Le vecteur de vitesse instantané de rotation

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{S/R_0}} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{R_3/R_0}} = \vec{\Omega}_{\mathbf{R_3/R_2}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{R_2/R_1}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{R_1/R_0}}$$

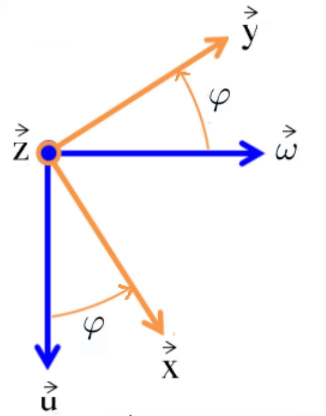
$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{S/R_0}} = \dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{u}} + \dot{\psi}\,\vec{\mathbf{z}}_{\mathbf{0}}$$



$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$$



$$\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\theta}\,\vec{u}$$



$$\vec{\Omega}_{R_3/R_2} = \dot{\varphi}\,\vec{z}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{z}_0}$$

$\overrightarrow{\Omega}_{S/R_0}$ dans $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ et $R_S = R(O, x_0, y_0, z_0)$

Dans R_0

$$\underline{\text{Dans } R_0} \quad \begin{cases} \overrightarrow{u} = \cos\psi\overrightarrow{x_0} + \sin\psi\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z} = -\sin\theta\overrightarrow{v} + \cos\theta\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{v} = -\sin\psi\overrightarrow{x_0} + \cos\psi\overrightarrow{y_0} \end{cases} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \begin{cases} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}_{R_0}$$

$$\underline{\text{Dans } R_S = R} \quad \begin{cases} \overrightarrow{z_0} = -\sin\theta\overrightarrow{w} + \cos\theta\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{w} = \sin\varphi\overrightarrow{x} + \cos\varphi\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{u} = -\sin\varphi\overrightarrow{y} + \cos\varphi\overrightarrow{x} \end{cases} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \begin{cases} \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{cases}_{R}$$

4) En utilisant le mouvement inverse, on donne l'expression de $\overrightarrow{\Omega}_{R_0/R}$ dans R_0 et R.

$$(\psi, \theta, \varphi) \quad \Longrightarrow \quad (-\varphi, -\theta, -\psi)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\underline{\text{Dans } R_0 :} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_0/R} \begin{cases} -\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_0}$$

$$\underline{\text{Dans } R :} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_0/R} \begin{cases} -\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ -\dot{\psi} - \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}_{R}$$

Correction d'exercice 2 :

Torseur $[T]$

$$[T] = [A, \overrightarrow{U}] + [B, \overrightarrow{V}] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R} \\ \\ \overrightarrow{m}(O) \end{array} \right.$$

1) Les éléments de réduction de $[T]$ sont :

La résultante : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} \beta \\ 3 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \beta \\ 3 \\ \alpha \end{array} \right. = \beta \overrightarrow{i} + 3 \overrightarrow{j} + \alpha \overrightarrow{k}$

Le moment au point au O : $\overrightarrow{m}(O) = \overrightarrow{m_1}(O) + \overrightarrow{m_2}(O)$

$$\overrightarrow{m_1}(O) = \underbrace{\overrightarrow{m_1}(A)}_{=0} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{U}$$

$$\overrightarrow{m_2}(O) = \underbrace{\overrightarrow{m_2}(B)}_{=0} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V}$$

$$\overrightarrow{m}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{U} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V} = \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} \beta \\ 3 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \alpha \\ -\alpha \\ -2\beta \end{array} \right. = \alpha \overrightarrow{i} - \alpha \overrightarrow{j} - 2\beta \overrightarrow{k}$$

2) $[T]$ est un glisseur si et seulement si $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{m}(O) = 0$ et $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$

On a $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0}$ et $I = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{m}(O) = 0 = \left| \begin{array}{l} \beta \\ 3 \\ \alpha \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} \alpha \\ -\alpha \\ -2\beta \end{array} \right. = -\alpha(3+\beta) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \beta = -3)$

(a) La condition nécessaire et suffisante pour que $[T]$ soit un glisseur est : $\alpha = 0$ ou β=-3

(b) Le support d'un glisseur est son axe central, c'est l'ensemble des points où le moment est nul. (D) est le support du glisseur si $\forall P(x, y, z) \in$ (D), on a $\overrightarrow{m}(P) = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{m}(P) = \overrightarrow{m}(O) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OP} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{m}(O) = \overrightarrow{m}(P) - \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R}$$

$\overrightarrow{m}(P) = \overrightarrow{0}$ car $P \in \Delta_f$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\alpha - 3z \\ z\beta - \alpha x \\ 3x - y\beta \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha = 0 \text{ ou } \beta\text{=-3})$$

(c) 1^er cas : $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\beta \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} -3z \\ z\beta \\ 3x - y\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ 3x - y\beta = -2\beta \end{array} \right.$$

Pour chaque valeur de β, on a un glisseur dont le support (parallèle à $\overrightarrow{R}$) est l'ensemble des points : $P(x,y,z)$ tel que : $z=0$ et $3x-y\beta=-2\beta \quad \forall\beta$

(d) 2ième cas : $\beta=-3$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\6\end{pmatrix} == \begin{pmatrix}y\alpha-3z\\-3z-\alpha x\\3x+3y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=y\alpha-3z\\\alpha=3z+\alpha x\\2=x+y\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}6z=\alpha(y-x)\\2=x+y\end{cases}$$

Le support de $[T]$ est l'ensemble des droits ayant pour le vecteur $\overrightarrow{R}$ et qui passent par le point $P(x,y,z)$ tel que : $6z=\alpha(y-x)$ et $2=x+y$ et $\forall\alpha$

(e) Axe central du torseur $[T]$
L'axe centrale (Δ) du torseur $[T]$ est l'ensemble des points $P(x,y,z)$ tels que le moment en P est parallèle à la résultante $\overrightarrow{R}$.

$$\overrightarrow{m}(P)=\overrightarrow{m}(O)+\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{R} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\-2\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\3\\\alpha\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\alpha+3z+\alpha\\-z\beta+\alpha x-\alpha\\-3x+y\beta-2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\beta\\3\lambda\\\alpha\lambda\end{pmatrix}$$

(Δ) est défini par les équations :

$$\frac{3z-y\alpha+\alpha}{\beta}=\frac{\alpha x-\beta z-\alpha}{3}=\frac{\beta y-3x-2\beta}{\alpha}$$

Correction d'exercice 3 :

$R_0(O,\overrightarrow{x}_0,\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{z}_0)$ repère fixe.

$R_1(G,\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{y}_1,\overrightarrow{z}_1)$ en translation par rapport à $R_0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}=\overrightarrow{0}$

$R_2(G,\overrightarrow{x}_2,\overrightarrow{y}_2,\overrightarrow{z}_2)$ est tel que : $(\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{x}_2)=(\overrightarrow{y}_1,\overrightarrow{y}_2)=\varphi$ et $\overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1}=\dot{\varphi}\overrightarrow{z}_1=\dot{\varphi}\overrightarrow{z}_0$

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IG}= {}_{R_1}\begin{cases}0\\y\\0\end{cases} + {}_{R_1}\begin{cases}a\\0\\0\end{cases} = {}_{R_1}\begin{cases}a\\y\\0\end{cases}$$

1) **Vitesse $\overrightarrow{V}(G)_{/R_0}$ et accélération $\overrightarrow{a}(G)_{/R_0}$ du point G ;**
Par dérivation :

$$\overrightarrow{V}(G)_{/R_0}=\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt_{/R_0}}=\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt_{/R_1}}+\overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{OG}= {}_{R_1}\begin{cases}0\\\dot{y}\\0\end{cases} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}=\overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{a}(G)_{/R_0}=\frac{d\overrightarrow{V}(G)}{dt_{/R_0}}=\frac{d\overrightarrow{V}(G)_{/R_0}}{dt_{/R_1}}+\overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{V}(G)_{/R_0}= {}_{R_1}\begin{cases}0\\\ddot{y}\\0\end{cases} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}=\overrightarrow{0}$$

2) **Théorème de la résultante dynamique appliqué au disque** ;

La résultante des forces extérieures appliquées au disque est égale à la masse du disque par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\sum_i \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}(G)_{/R_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{a}(G)_{/R_0} \tag{1}$$

La projection de cette équation sur les axes du repère R_1 donne deux équations scalaires :

$$N - mg\cos(\alpha) = 0 \tag{2}$$

$$-T + mg\sin(\alpha) = m\ddot{y} \tag{3}$$

3) **Théorème de du moment dynamique appliqué au disque**

Le moment résultant des forces extérieures appliquées au disque est égale au moment dynamique du disque au même point G .

$$\sum_i \overrightarrow{M}(\overrightarrow{F}_{ext})_{/G} = \overrightarrow{\delta}(G)_{/R_0} \iff \overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{T}+\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\delta}(G)_{/R_0} \text{ comme } \overrightarrow{GI} \,/\!/\, \overrightarrow{N} \text{ elle devient :}$$

$$\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{T} = \overrightarrow{\delta}(G)_{/R_0} \tag{4}$$

Nous exprimons chacun des termes de cette équation :

$$\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{T} = \left\{\begin{array}{l} -a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R_1} \wedge \left\{\begin{array}{l} 0 \\ -T \\ 0 \end{array}\right._{R_1} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ aT \end{array}\right._{R_1} = aT\overrightarrow{z}_1 \tag{5}$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique, d'où :

$$\overrightarrow{\delta}(G)_{/R_0} = \frac{d\overrightarrow{\sigma}(G)_{/R_0}}{dt_{/R_0}}$$

Le moment cinétique du disque est donné par :

$$\overrightarrow{\sigma}(G)_{/R_0} = I_{C/R_2}.\overrightarrow{\Omega}_{R./R_0}$$

$$\overrightarrow{\sigma}(G)_{/R_0} = {}_{R_1}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\dot{\varphi} \end{pmatrix} = A\dot{\varphi}\overrightarrow{z}_1 = A\dot{\varphi}\overrightarrow{z}_0$$

$$\overrightarrow{\delta}(G)_{/R_0} = \frac{d\overrightarrow{\sigma}(G)_{/R_0}}{dt_{/R_0}} = \frac{d\overrightarrow{\sigma}(G)_{/R_0}}{dt_{/R_1}} = A\ddot{\varphi}\overrightarrow{z}_1 = \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi}\overrightarrow{z}_1 \qquad \text{car} \qquad \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0} = \overrightarrow{0}$$

En égalisant les deux expressions des moments nous obtenons :

$$aT = \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{ma}{2}\ddot{\varphi} \tag{6}$$

4) **Equation scalaire liant les paramètres cinématiques $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ et a qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné :**

La condition de roulement sans glissement est vérifiée si la vitesse du point de contact du disque et du plan incliné est nulle :

$$\overrightarrow{V}(I)_g = \overrightarrow{V}(I \in S)_{/R_0} - \overrightarrow{V}(I \in P)_{/R_0} = \overrightarrow{0}$$

Or : $\overrightarrow{V}(I \in P)_{/R_0} = 0$ alors : $\overrightarrow{V}(I \in S)_{/R_0} = \overrightarrow{V}(G)_{/R_0} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0}$

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{array}\right._{R_1} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{array}\right._{R_1} \wedge \left\{\begin{array}{c} -a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R_1} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R_1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{y} - a\dot{\varphi} = 0 \tag{7}$$

5) **Nous expressions de N, T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m, g, α et a :**

L'équation (3) donne :

$$N = mg\cos\alpha$$

L'équation (6) : $\ddot{y} = \alpha\ddot{\varphi} \Longrightarrow \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{y}}{\alpha}$ l'équation (4) devient : $-\dfrac{ma}{2}\dfrac{\ddot{y}}{\alpha} + mg\sin\alpha = m\ddot{y}$

On déduit :

$$\ddot{y} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

d'où :

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3a}g\sin\alpha$$

L'équation (5) donne :

$$T = \frac{mg}{3}\sin\alpha$$

6) **Energie cinétique du disque en fonction de m, a, $\dot{y}$ et $\dot{\varphi}$:**

L'énergie cinétique totale est égale à l'énergie cinétique de translation + l'énergie cinétique de rotation :

$$E_C = \frac{1}{2}m(\overrightarrow{V}(G)_{/R_0})^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}^T_{R_1/R_0}.I_G(S/R_2).\overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\varphi})\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$$

7) **Energie cinétique du disque en fonction de m et $\dot{y}$ en tenant compte de la condition de roulement sans glissement :**

Nous avons dans l'équation (6) qui exprime le roulement sans glissement :

$$\dot{y} = a\dot{\varphi}$$

On déduit que :

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{a}$$

alors l'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\frac{\dot{y}^2}{a^2} = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \qquad \underline{E_C = \frac{3}{4}m\dot{y}^2}$$

8) **Expression de l'accélération linéaire $\ddot{y}$ en appliquant le théorème de l'énergie cinétique au disque :**

La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures :

$$\frac{dE_C}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

$$E_C = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dE_C}{dt} = \frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW(\overrightarrow{T})}{dt} + \frac{dW(\overrightarrow{N})}{dt} + \frac{dW(\overrightarrow{P})}{dt} = \overrightarrow{T}.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt} + \overrightarrow{N}.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt} + m\overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V}(G)_{/R_0}$$

$$\frac{dW}{dt} = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{V}(I)_{/R_0} + \overrightarrow{N}.\overrightarrow{V}(I)_{/R_0} + m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V}(G)_{/R_0} = m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V}(G)_{/R_0} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{V}(I)_{/R_0} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{dW}{dt} = m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{V}(G)_{/R_0} = {}_{R_1}\!\begin{pmatrix} -mg\cos\alpha \\ mg\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} . {}_{R_1}\!\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = mg\dot{y}\sin\alpha$$

L'égalité des deux expressions donne :

$$\frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y} = mg\dot{y}\sin\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\ddot{y} = \frac{2}{3}g\sin\alpha}$$