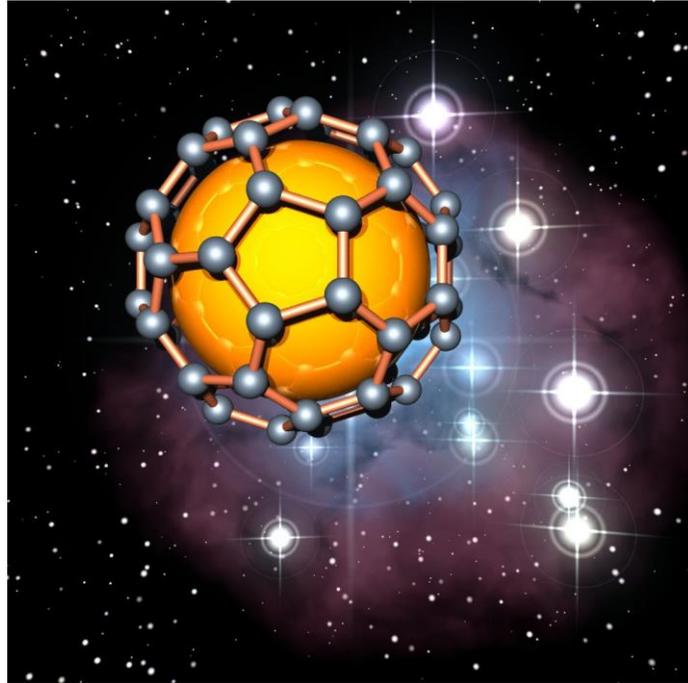


DEPARTEMENT DE CHIMIE



Cristallographie Géométrique

SMP 4

Pr Mohamed EL OMARI

Lcsab@yahoo.fr

WhatsApp 0667280501

2019 – 2020

Merci de Communiquer vos numéros de téléphone pour constituer un groupe sur WhatsApp

Chapitre 3

Cristallographie géométrie : Symétrie cristalline

I- Introduction

Depuis presque 150 ans, les cristallographes ont appris à classer les différents cristaux au vu de la symétrie de leurs formes extérieures.

A l'échelle microscopique, la symétrie est une conséquence immédiate de l'agencement réel entre les constituants du solide. En fait, la symétrie d'un cristal est une association d'éléments ou opérateurs de symétrie (ou d'orientation) qui caractérisent le cristal.

Définition : Un élément de symétrie est une opération géométrique qui transforme le cristal en une figure indiscernable à lui-même. Deux classes d'éléments de symétrie sont présentes.

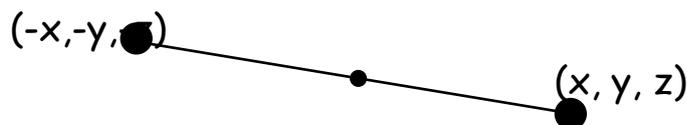
II-Eléments de symétrie sans translations : opérations ponctuelles de symétrie

- **l'inversion** : c'est un centre (ou point) d'inversion noté $\bar{1}$.
- **la rotation** : c'est un axe de rotation d'ordre n ($n = 1, 2, 3, 4, 6$) noté A_n .
- **la rotation inverse** : c'est un axe d'ordre n ($n = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ ou $\bar{6}$) noté A_n^- ou A_n^- .
- **la réflexion** : c'est un miroir ou plan de symétrie noté m ($\equiv \bar{2}$).

Remarque : Les symboles des éléments de symétrie utilisés sont ceux d'*Hermann-Mauguin*.

α - Inversion

Cette opération fait correspondre chaque nœud $N(x, y, z)$ du réseau cristallin avec son image indiscernable $M(-x, -y, -z)$. Le centre d'inversion étant situé à l'origine $(0, 0, 0)$.



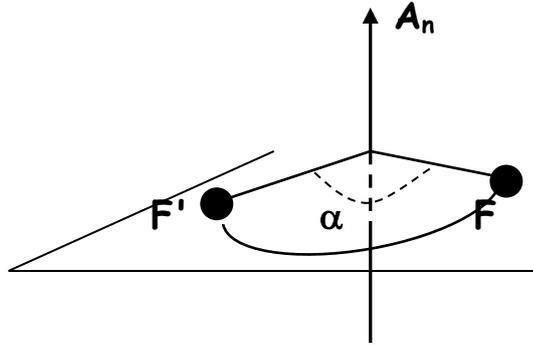
Plus généralement, en système orthonormé : centre d'inversion (x_0, y_0, z_0)

$N(x, y, z)$

$M(2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z)$

β - Rotation

C'est une opération directe qui transforme une figure F à une image F' , absolument indiscernables, par une rotation d'un angle α autour d'un axe de symétrie A_n . Il s'agit d'un axe de symétrie d'ordre n ($n = \frac{2\pi}{\alpha}$). Autrement, il faut effectuer n opérations de rotation d'un angle α pour retourner à la figure initiale F .



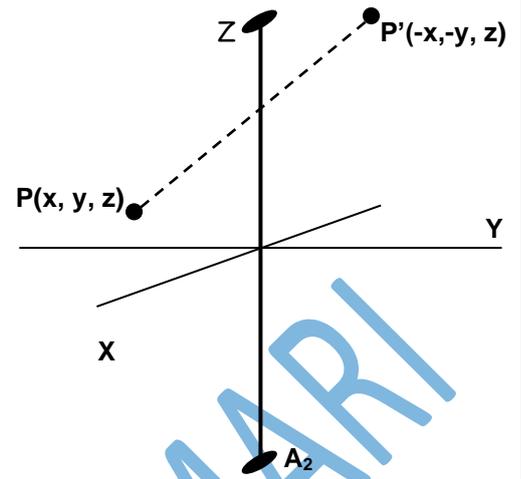
Les axes de symétrie A_n possibles pour un réseau cristallin tridimensionnel sont :

| | | | | | |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Ordre n | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| Notation | A_1 ou C_1 | A_2 ou C_2 | A_3 ou C_3 | A_4 ou C_4 | A_6 ou C_6 |
| Rotation | 360° | 180° | 120° | 90° | 60° |
| Symbole | --- | ● | ▲ | ◆ | ⬡ |

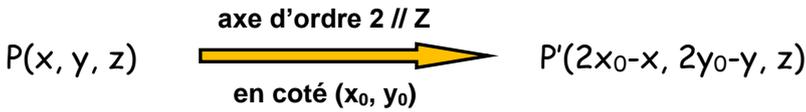
Remarque : Les axes d'ordre 5 et d'ordres supérieurs à 6 n'existent pas car ne sont pas compatibles avec la périodicité des solides cristallins tridimensionnels.

Exemple 1 : Rotation d'ordre 2

Un axe de symétrie d'ordre 2 fait correspondre à tout point P (x, y, z) un autre point P' (-x,-y, z) obtenu par une rotation d'un angle de π . L'axe A_2 étant selon l'axe Z en système orthonormé.



Plus généralement en système orthonormé :



Exemple 2 : Rotation d'ordre 3

Un axe de symétrie d'ordre 3 fait correspondre à tout point P deux autres points P' et P'' obtenus par rotations d'angles de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ autour de l'axe.

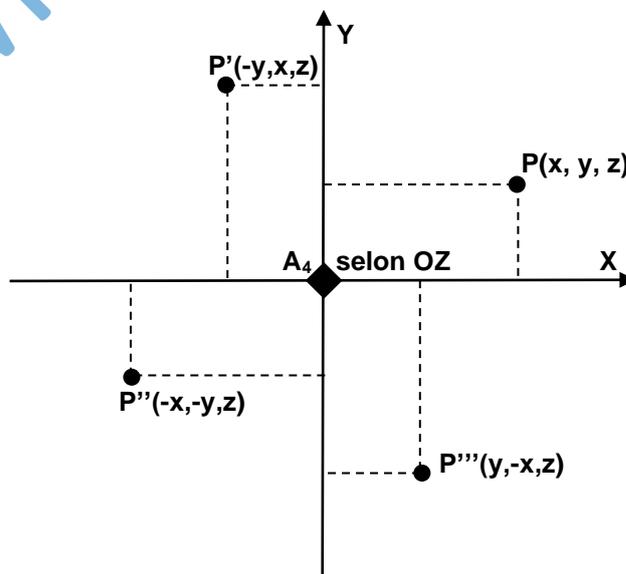
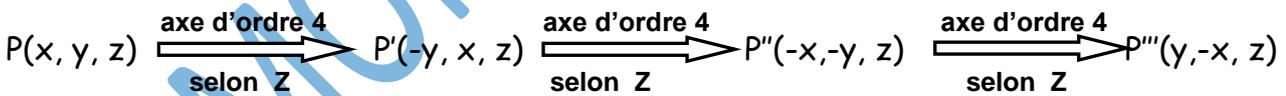
Plus généralement (le cas où l'angle xOy vaut 120°) :



Exemple 3 : Rotation d'ordre 4

Un axe de symétrie d'ordre 4 fait correspondre à tout point P trois autres points P', P'' et P''' obtenus par rotations d'angles de $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$ autour de l'axe.

Plus généralement (en système orthonormé) :



χ- Réflexion

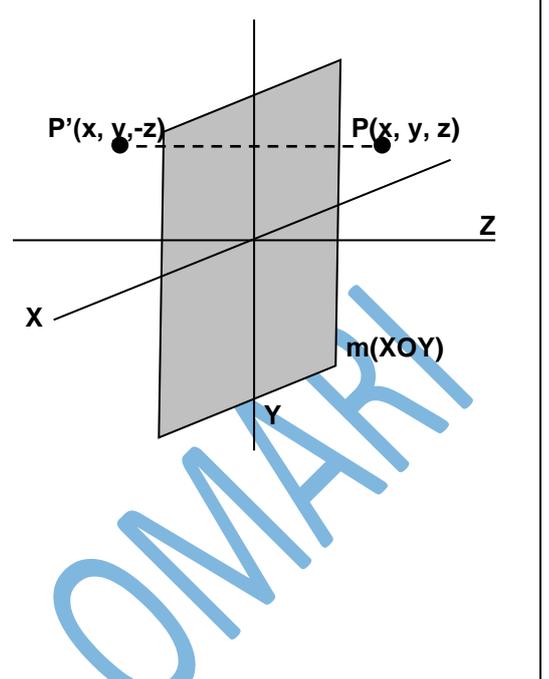
Cette opération existe dans un solide cristallin si une moitié de ce composé est l'image de l'autre, dans un miroir, par rapport à un plan de symétrie. Un plan de symétrie parallèle au plan (XOY) de côté $z = 0$ fait correspondre, à tout point $P(x, y, z)$ un point $P'(x, y, -z)$ en système orthonormé.

Plus généralement en système orthonormé :

$$P(x, y, z) \xrightarrow[\text{// au plan (XOY) en côté } z_0]{\text{miroir}} P'(x, y, 2z_0 - z)$$

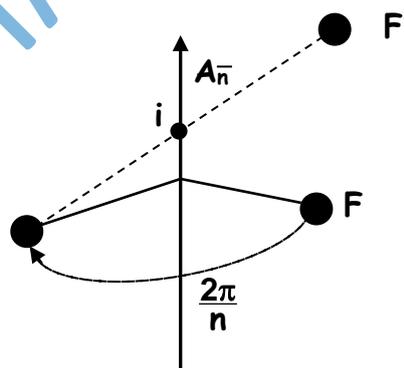
La représentation graphique :

- * — si m est \perp au plan de dessin
- * \perp si m est // au plan de dessin



γ- Rotation inverse

Aux trois opérations de symétrie directes décrites ci-dessus s'ajoutent d'autres opérations de symétrie dites indirectes. La rotation inverse fait en partie. Elle consiste à appliquer une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour d'un axe de symétrie suivie d'une inversion par rapport à un centre de symétrie (i) appartient à cet même axe. L'axe de rotation inverse est dit d'ordre n et noté A_n^- .



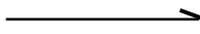
Remarque : L'axe de rotation inverse $\bar{2}$ est équivalent à un miroir perpendiculaire à l'axe 2, leur intersection constitue le centre d'inversion.

Les axes de symétrie A_n^- possibles pour un réseau cristallin tridimensionnel sont :

| Ordre n | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|----------|-------------|---|---|---|---|
| Notation | A_1^- | A_2^- | A_3^- | A_4^- | A_6^- |
| Rotation | 360° | 180° | 120° | 90° | 60° |
| Symbole | --- |  |  |  |  |

III- Éléments de symétrie avec translations

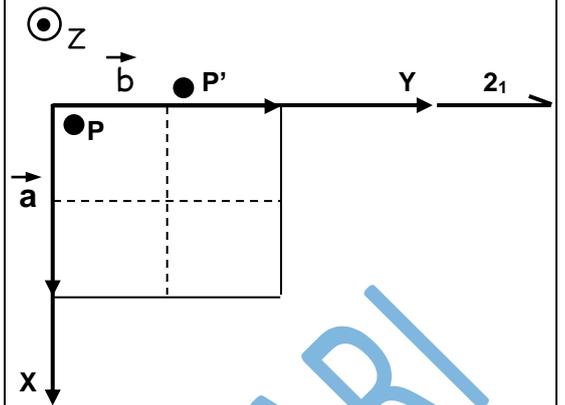
- Translation propre : $\vec{T} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$
- Axes hélicoïdaux : $2_1, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2, 4_3, 6_1, 6_2, 6_3, 6_4, 6_5$
- Plans de glissement : a, b, c, n, d.

| Symboles | Normal au plan de projection | Parallèle | Glissement |
|-------------------------------|---|--|---|
| a, b | ----- |  | a/2 suivant [100] b/2 suivant [010] |
| c | | | c/2 suivant [001] |
| n miroir diagonal | ----- |  | (a + b)/2 ; (b + c)/2 ; (c + a)/2 (a + b + c)/2 (cubique et quadratique) |
| d miroir diamant | --->--- ---<--- |  | (a ± b)/4 ; (b ± c)/4 ; (c ± a)/4 (mode F) (a ± b ± c)/4 (mode I) |
| 2_1 |  |  | c/2 |
| $3_1 ; 3_2$ |  | | c/3 ; 2c/3 |
| $4_1 ; 4_2 ; 4_3$ |  | | c/4 ; 2c/4 ; 3c/4 |
| $6_1 ; 6_2 ; 6_3 ; 6_4 ; 6_5$ |  | | c/6 ; 2c/6 ; 3c/6 ; 4c/6 ; 5c/6 |

Symboles des éléments de symétrie avec translations
Plan de projection est (xOy)

Exemple 1 : Axe hélicoïdal 2₁

Un axe hélicoïdal 2₁ fait correspondre à tout point P (x, y, z) un autre point P' (-x, y + $\frac{b}{2}$, -z) obtenu par une rotation d'un angle de π suivi d'une translation $\frac{b}{2}$. L'axe A₂ étant selon l'axe OY en système orthonormé.



Plus généralement en système orthonormé :

axe hélicoïdal 2₁
// Y en coté (x₀, z₀)

$P(x, y, z) \longrightarrow P'(2x_0 - x, y + \frac{b}{2}, 2z_0 - z)$
S'écris $P'(2x_0 - x, \frac{1}{2}y, 2z_0 - z)$

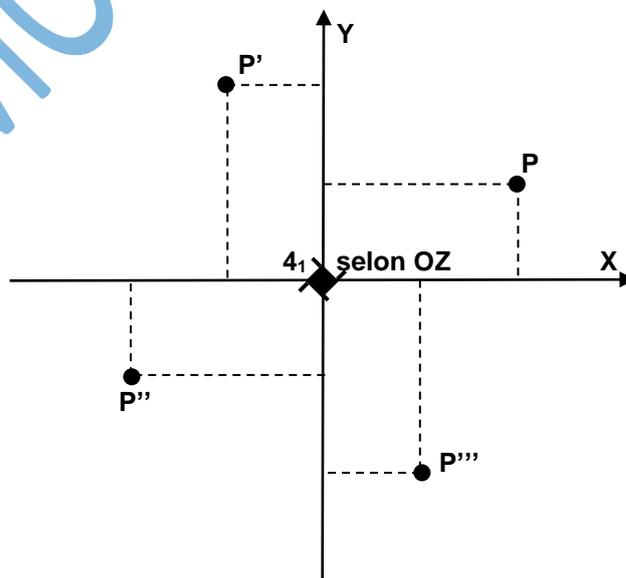
Exemple 2 : Axe hélicoïdal 4₁

Un axe hélicoïdal 4₁ fait correspondre à tout point P trois autres points P', P'' et P''' obtenus respectivement par rotation d'angle de $\frac{\pi}{2}$ suivie de translation $\frac{c}{4}$, par rotation d'angle de π suivie de translation $\frac{c}{2}$ et par rotation d'angle de $\frac{3\pi}{2}$ suivie de translation $\frac{3c}{4}$ autour de l'axe selon Oz.

Plus généralement (en système orthonormé) :

axe hélicoïdal 4₁ selon Z \longrightarrow axe hélicoïdal 4₁ selon Z \longrightarrow axe hélicoïdal 4₁ selon Z

$P(x, y, z) \longrightarrow P'(-y, x, z + \frac{c}{4}) \longrightarrow P''(-x, -y, z + \frac{c}{2}) \longrightarrow P'''(y, -x, z + \frac{3c}{4})$
S'écrivent $P'(-y, x, \frac{1}{2}z)$ $P''(-x, -y, \frac{1}{2}z)$ $P'''(y, -x, \frac{3}{4}z)$



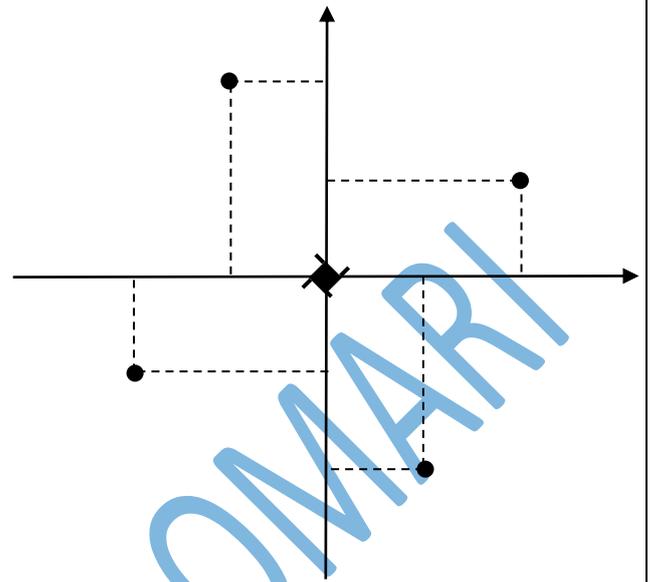
Exemple 3 : Axe hélicoïdal 4₂

Un axe hélicoïdal 4₂ fait correspondre à tout point P autres points P', P'' et P''' obtenus par rotation d'angle de $\frac{\pi}{2}$ suivie de translation $\frac{c}{2}$ autour de l'axe selon Oz.

Plus généralement (en système orthonormé) :

axe hélicoïdal 4₂
selon Z

$$\begin{aligned}
 P(x, y, z) &\longrightarrow P'(-y, x, z + \frac{c}{2}) \\
 &\longrightarrow P''(-x, -y, z) \\
 &\longrightarrow P'''(y, -x, z + \frac{c}{2}) \\
 &\longrightarrow P''''(x, y, z)
 \end{aligned}$$

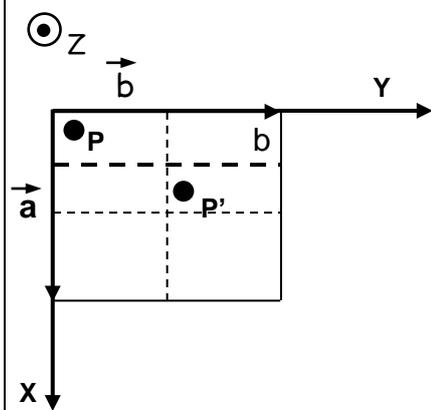


Exemple 4 : plan de glissement b

Un plan de glissement b fait correspondre à tout point P (x, y, z) un autre point P' ($\frac{1}{2}a-x, \frac{1}{2}b+y, z$) obtenu par une réflexion suivi d'une translation $\frac{1}{2}\vec{b}$. Le plan b étant // au plan (yOz) en position $x_0 = \frac{1}{4}$, en système orthonormé.

$$\begin{aligned}
 P(x, y, z) &\longrightarrow P'(\frac{1}{2}a-x, \frac{1}{2}b+y, z) \\
 &\longrightarrow P'(\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}+y, z)
 \end{aligned}$$

Plan de glissement b
// (yOz) en $x_0 = \frac{1}{4}$

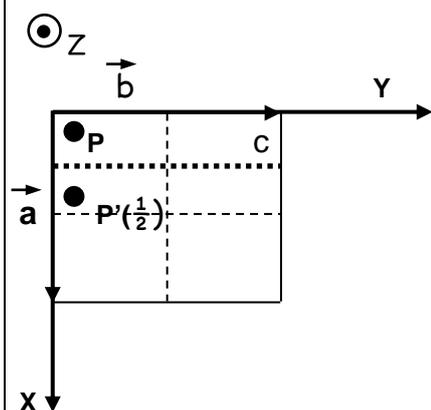


Exemple 5 : plan de glissement c

Un plan de glissement c fait correspondre à tout point P (x, y, z) un autre point P' ($\frac{1}{2}a-x, y, \frac{1}{2}c+z$) obtenu par une réflexion suivi d'une translation $\frac{1}{2}\vec{c}$. Le plan c étant // au plan (yOz) en position $x_0 = \frac{1}{4}$, en système orthonormé.

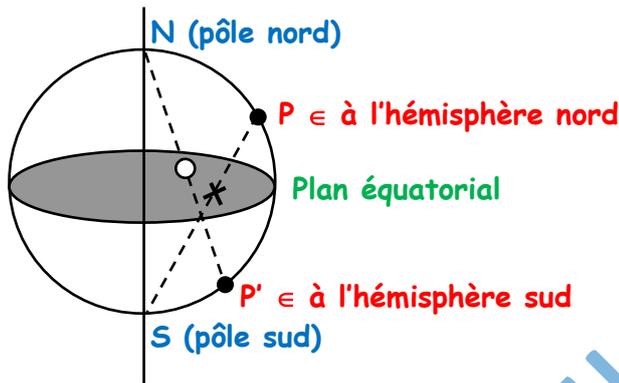
$$\begin{aligned}
 P(x, y, z) &\longrightarrow P'(\frac{1}{2}a-x, y, \frac{1}{2}c+z) \\
 &\longrightarrow P'(\frac{1}{2}-x, y, \frac{1}{2}+z)
 \end{aligned}$$

Plan de glissement c
// (yOz) en $x_0 = \frac{1}{4}$

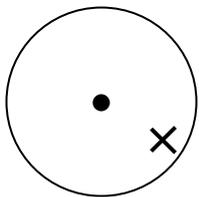


IV- Représentation stéréographique des éléments de symétrie

La représentation stéréographie est suggérée pour simplifier la visualisation des opérations des éléments de symétrie et déterminer les points équivalents pour les solides cristallins tridimensionnels. Elle consiste à considérer une sphère de centre O , l'intersection de l'ensemble des éléments de symétrie sans translation existant, et de rayon arbitraire R .

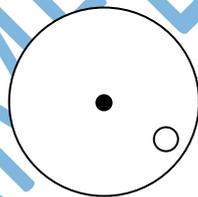


La technique consiste à projeter les points P de l'hémisphère nord (positif) dans le plan équatorial selon des segments PS et les points P' de l'hémisphère sud (négatif) dans le même plan selon des segments $P'N$.



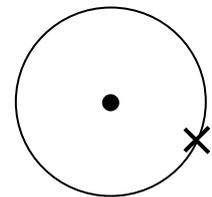
$Z > 0$

La projection stéréographique de P est l'intersection p de la droite SP avec le plan équatorial



$Z < 0$

La projection stéréographique de P' est l'intersection p' de la droite NP' avec le plan équatorial



$Z = 0$

P appartient au le plan équatorial