Feuille d'exercices N°3

Exercice 1 *Soient H un espace de Hilbert, G un sous-espace fermé de H et P_G la projection orthogonale de H sur G.*

1) *Montrer que pour tout $f \in G^*$, il existe un seul prolongement $\overline{f} \in H^*$ défini par $\overline{f}(x) = f(P_G(x))$ pour tout $x \in H$.*
2) *Soient $a \in H$, $a \neq 0$ et $b \in H$. Posons $G = \{x \in H / < x, a >= 0\}$ et soit $f \in G^*$ définie par $f(x) =< x, b >$ pour tout $x \in G$. Montrer que l'unique extension de Hahn-Banach de f est définie par :*

$$\bar{f}(x) =< x, b > - \frac{< a, b >}{\|a\|^2} < x, a >, \text{ pour tout } x \in H.$$

3) *Prouver que pour tout espace normé X et pour tout $T \in L(G, X)$ il existe $\overline{T} \in L(H, X)$ tel que $\overline{T} = T_{/G}$ et $\|\overline{T}\| = \|T\|$.*

Solution 1 *1)* **Existence**. *Soit $f \in G^*$. Comme G est s.e.v fermé de l'espace H, alors d'après Théorème de projection, $H = G \oplus G^\perp$ ($\oplus$ est somme directe topologique). Maintenant, on définit $\overline{f} : H \to \mathbb{C}$ par $\overline{f}(x) = f(P_G(x))$ pour tout $x = P_G(x) + P_{G^\perp}(x) \in H$. Alors $\overline{f}$ est linéaire et $\overline{f}_{/G} = f$, donc $\|\overline{f}\| \geq \|f\|$. D'autre part,*

$$|\overline{f}(x)| = |f(P_G(x))| \leq \|f\|\|P_G(x)\| \leq \|f\|\|x\|,$$

(On utilise la propriété $\|x\|^2 = \|P_G(x)\|^2 + \|P_{G^\perp}\|^2 \geq \|P_G(x)\|^2$) pour tout $x \in H$. Ceci implique $\|\overline{f}\| \leq \|f\|$, et ainsi $\|\overline{f}\| = \|f\|$.

Unicité. *Soit $g \in H^*$ avec $g_{/G} = f$ et $\|g\| = \|f\|$. Par Théorème de représentation de Riesz, il existe $b \in H$ tel que $g(x) =< x, b >$, pour tout $x \in H$. Comme $b = P_G(b) + P_{G^\perp}(b)$, alors pour tout $y \in G$, on a*

$$\begin{aligned} f(y) &= g(y) \\ &= < y, P_G(b) > + < y, P_{G^\perp}(b) > \\ &= < y, P_G(b) >, \end{aligned}$$

et $\|f\| = \|P_G(b)\|$. On a $\|f\| = \|g\|$, alors $\|g\| = \|P_G(b)\|$. Ceci implique que $\|b\|^2 = \|P_G(b)\|^2$. Comme $\|b\|^2 = \|P_G(b)\|^2 + \|P_G^\perp(b)\|^2$, alors $P_G^\perp(b) = 0$ et donc

$$g(x) =< x, b >=< x, P_G(b) >= \overline{f}(x)$$

pour tout $x \in H$. Par conséquent, $\overline{f} = g$.

2) *On a $G = ker(\varphi_a)$ s.e.v fermé car $\varphi_a \in H^*$ définie par $\varphi_a(x) =< x, a >$. Alors d'après question (1) il existe unique extension de Hahn-Banach $\overline{f}$ de f définie par $\overline{f}(x) = f(P_G(x)) =< P_G(x), b >=< x, P_G(b) >$. Notons que $a \notin G$ (car sinon a=0). D'après Théorème de projection $H = G \oplus \mathbb{C}a$ alors pour tout $x \in H$, $x = x - \frac{<x,a>}{\|a\|} a + \frac{<x,a>}{\|a\|} a$. Ce qui montre que $P_G(b) = b - \frac{<b,a>}{\|a\|} a$. Par conséquent, $\overline{f}(x) =< x, b > - \frac{<a,b>}{\|a\|^2} < x, a >$.*

3) *On définit l'application* $\overline{T} : H \to X$ *par* $\overline{T}(x) = T(P_G(x))$. *Evidemment,* $\overline{T}$ *est linéaire continue (car est la composée de deux applications linéaires continues), et que* $\overline{T}$ *prolonge* T *(car si* $x \in G$ *alors* $P_G(x) = x$*). D'autre part, on a*

$$\begin{aligned} \|\overline{T}(x)\| &= \|T(P_G(x)\| \\ &\leq \|T\|\|P_G(x)\| \\ &\leq \|T\|\|x\| \end{aligned}$$

pour tout $x \in H$. *Par suite,* $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$. *Puisque* $\overline{T}$ *étend* T *on obtient que* $\|T\| \leq \|\overline{T}\|$, *et ainsi* $\|\overline{T}\| = \|T\|$. *Ce qui prouve que* $\overline{T}$ *est extension de Hahn-Banach.*

Exercice 2 *Soient* E *et* F *deux espaces normés avec* $E \neq \{0\}$.

1) *Montrer que pour tout* $x \in E$, *il existe* $\phi \in E^*$ *tel que* $\phi(x) = \|x\|$ *et* $\|\phi\| = 1$

2) *Montrer que si* $L(E, F)$ *est complet alors* F *est aussi complet.*

Solution 2 ***1)*** *Soit* $M = \mathbb{K}x = \{\alpha x : \ \alpha \in \mathbb{K}\}$ *et définissons* $f : M \to \mathbb{K}; \alpha x \mapsto \ \alpha\|x\|$. *Notons que* $|f(\alpha x)| = |\alpha|\|x\| = \|\alpha x\|$. *Ceci implique par Théorème d'extension de Hahn-Banach qu'il existe* $\phi \in E^*$ *et* $\phi_{/M} = f$ *en particulier* $\phi(x) = \|x\|$, *et* $|\phi(y)| \leq \|y\|$ *pour tout* $y \in E$. *Donc* $\|\phi\| \leq 1$, *et puisque* $\phi(\frac{x}{\|x\|}) = 1$, *d'où l'égalité.*

2) *Soit* $(y_n)_{n\geq 1} \subseteq F$ *une suite de Cauchy et fixons* $x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$. *Par question* (1), *il existe* $\phi \in E^*$, $\|\phi\| = 1 = \phi(x_0)$. *Pour* $n \geq 1$, *on définit* $T_n \in L(E, F)$ *par* $T_n(x) = \phi(x)y_n$ *et notons que* $T_n(x_0) = y_n$.
Alors $\|(T_n - T_m)x\| = |\phi(x)|\|y_n - y_m\| \leq \|x\|\|y_n - y_m\|$ *pour tout* $x \in X$. *Ceci implique* $\|T_n - T_m\| \leq \|y_n - y_m\|$. *Ce qui montre que* $(T_n)_n$ *est de Cauchy dans* $L(E, F)$ *qui est complet. Soit* T *la limite de* $(T_n)_n$, *alors* $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} T_n x_0 = T x_0$. *Par suite* $(y_n)_{n\geq 1}$ *est convergente. Par conséquent,* F *est complet.*

Exercice 3 *Soit* X *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et* $f, f_1, ..., f_n : E \to \mathbb{R}$ *des formes linéaires.*

1) *Montrer que si* $\bigcap_{i=1}^n ker(f_i) \subseteq ker(f)$, *alors il existe* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$.

2) *On suppose que la dimension de* X *est infinie.*
Montrer qu'il existe $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, *tel que* $f_i(x_0) = 0, \ \forall i = 1, ..., n$.

3) *On suppose que* X *est normé et que* $f_1, ..., f_n, f \in E^*$. *Soient* $G = \{x \in X \ / \ f_i(x) = 0 \ \forall \ i = 1, ..., n\}$ *et* $g \in G^*$ *définie par* $g(x) = f(x) \ \forall x \in G$. *Montrer que si* $h \in X^*$ *est le prolongement de* g *alors il existe* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $h = f + \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$.

Solution 3 ***1)*** **Première méthode est purement algébrique.** *En utilisant le raisonnement par récurrence. Pour* $n = 1$ *et soit* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *des formes linéaires telles que* $ker(g) \subseteq ker(f)$. *Si* $g = 0$ *alors* $ker(g) = X$, *donc* $ker(f) = X$, *et ainsi* $f = 0$ *équavaut à* $f = \alpha g$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Supposons maintenant qu'il existe* x_0 *tel que* $g(x_0) \neq 0$. *Alors pour tout* $x \in X$ $x - \frac{g(x)}{g(x_0)}x_0 \in ker(g)$ *ceci implique par l'hypothèse que* $x - \frac{g(x)}{g(x_0)}x_0 \in ker(f)$. *Ce qui montre que* $f(x - \frac{g(x)}{g(x_0)}x_0) = 0$ *et par suite* $f(x) = \alpha g(x)$ *pour tout* $x \in X$ *où* $\alpha = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ *ne dépend pas de choix* x.

Supposons que l'assertion est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ *et supposons que* $\bigcap_{i=1}^{n+1} ker(f_i) \subseteq ker(f)$. *Alors* $\bigcap_{i=1}^{n} ker(f_{i_{/ker(f_{n+1})}}) \subseteq ker(f_{/ker(f_{n+1})})$. *En appliquant l'hypothèse de récurrence pour* $f_{/ker(f_{n+1})}, f_{1_{/ker(f_{n+1})}}, ..., f_{n_{/ker(f_{n+1})}}$, *On obtient sur* $ker(f_{n+1})$ *que* $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ *sur* $ker(f_{n+1})$. *D'où* $ker(f_{n+1}) \subseteq ker(f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i)$. *Et par l'hypothèse de récurrence on aboutit que* $f = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f_i$. *Ce qui montre le résultat désiré.*

Deuxième méthode, en utilisant Théorème de Hahn-Banach géométrique. *On définit* $F : X \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \longmapsto (f(x), f_1(x), ..., f_n(x))$ *qui est linéaire. On a* $F(X)$ *est un s. e. v f de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *qui est fermé alors il est convexe fermé non vide. Le vecteur* $a = (1, 0, ..., 0) \notin F(X)$ *car sinon* $(f(x), f_1(x), ..., f_n(x)) = a$ *et par l'hypothèse* $\bigcap_{i=1}^{n} ker(f_i) \subseteq ker(f)$, *on a si*

$$f_i(x) = 0 \ \text{pour} \ \text{tout} \ i = 1, ..., n \Longrightarrow f(x) = 0$$

ce qui prouve la contradictoin. On a $\{a\}$ *est compact non vide alors d'après Théorème de Hahn-Banach deuxième forme géométrique on peut séparer* $\{a\}$ *et* $F(X)$ *au sens strict dans* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Donc* $\exists \phi$ *forme linéaire non nulle continue sur* $\mathbb{R}^{n+1}$ *et* $\exists \mu \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$(*) \ \ \phi(a) < \mu < \phi(F(x)), \forall x \in E.$$

Comme $\mathbb{R}^{n+1}$ *est espace de Hilbert alors d'après Théorème de reprèsentation de Riesz il existe unique* $y = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ *tel que*

$$\phi(x) =< x, y >= \Sigma_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \ \ \forall x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

En remplaçant dans $(*)$, *on obtient alors que*

$$\alpha_0 < \mu < \alpha_0 f(x) + \Sigma_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x), \ \ \forall x \in X.$$

Ceci implique, par linéairité que

$$\alpha_0 < \mu < \lambda(\alpha_0 f(x) + \Sigma_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x)), \ \ \forall x \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que $\alpha_0 f(x) + \Sigma_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0$. *Par suite* $\alpha_0 < 0$, *on pose* $\lambda_i = \frac{-\alpha_i}{\alpha_0}$ *pour* $i = 1, ..., n$ *et on obtient donc que* $f(x) = \Sigma_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x), \ \forall x \in X$. *Ce qui prouve le résultat désiré.*

2) *Supposons par l'absurde que* $\bigcap_{i=1}^{n} ker(f_i) = \{0\}$. *Alors pour tout* $f \in X'$ *forme linéaire on a* $\{0\} = \bigcap_{i=1}^{n+1} ker(f_i) \subseteq ker(f)$. *En utilisant (1), on obtient alors que* $f \in vect(f_1, f_2, ..., f_n)$. *Donc la dimension de dual algébrique* X' *est finie et par suite la dimension de* X *est aussi finie, ce qui est absurde par notre hypothèse.*

3) *Comme* h *étend* g *alors* $h(x) = g(x), \ \forall x \in G$ *où* $G = \bigcap_{i=1}^{n} ker(f_i) \subseteq ker(h - f)$. *Ceci implique d'après (1) qu'il existe* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, *tel que* $h - f = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n$. *D'où le résultat.*

Exercice 4 *Soient* X *un espace normé et* Y *un sous-espace vectoriel de* X. *Pour* $x_0 \in X \setminus Y$ *on définit l'application* $f : Y \oplus \mathbb{K}x_0 \to \mathbb{K}$ *par* $f(y + \lambda x_0) = \lambda$.

1) *Prouver que* f *est bien définie et linéaire.*

2) *Montrer que* f *est continue si et seulement si* $x_0 \notin \overline{Y}$.

3) *Montrer que* $\overline{Y} = \bigcap \{ker(x^*) \ / \ x^* \in X^* \text{ et } Y \subseteq ker(x^*)\}$.

4) *En déduire que* $\overline{Y} = X$ *si et seulement si pour tout* $x^* \in X^*$, $x^* = 0$ *sur* Y *implique que* $x^* = 0$ *sur* X.

Solution 4 **1)** *Montrons que si* $y, y' \in Y$ $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ *avec* $y + \lambda x_0 = y' + \lambda' x_0$ *alors* $\lambda' = \lambda$ *et* $y = y'$. *En effet, si* $\lambda' = \lambda$ *alors* $x_0 = \frac{y-y'}{\lambda'-\lambda} \in Y$ *car* Y *est s.e.v et ceci est impossible par notre hypothèse. Alors* $\lambda' = \lambda$ *et par suite* $y = y'$. *On en déduit que* f *est bien définie. Par l'unicité de la décomposition des éléments de* $Y \oplus \mathbb{K}x_0$ *on obtient que* f *est linéaire.*

2) *Supposons que* f *est continue. On va prouver* $x_0 \notin \overline{Y}$. *Supposons par l'absurde que* $x_0 \in \overline{Y}$. *Alors il existe* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ *tel que* $y_n \to x_0$. *On a* $(y_n)_n \subseteq Y \oplus \mathbb{K}x_0$, *et* $x_0 \in Y \oplus \mathbb{K}x_0$. *et par la continuité de* f *il s'ensuit que* $f(y_n) \to f(x_0)$. *Puisque* $f(y_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *ceci implique que* $f(y_n) \to 0$, *et par l'unicité de limité on aboutit* $f(x_0) = 0$, *ce qui est impossible car* $f(x_0) = 1$. *D'où le résultat.*

3) *Si* $x^* \in X^*$ *et* $Y \subseteq ker(x^*)$, *et puisque* $ker(x^*)$ *est fermé alors* $\overline{Y} \subseteq ker(x^*)$, *et ainsi* $\overline{Y} \subseteq \bigcap\{ker(x^*)/x^* \in X^*, Y \subseteq ker(x^*)\}$.
Réciproquement, soit $x_0 \in \bigcap\{ker(x^*)/x^* \in X^*, Y \subseteq ker(x^*)\}$ *et supposons que* $x_0 \notin \overline{Y}$. *En utilisant question (2) alors il existe* $f : Y \oplus \mathbb{K}x_0 \to \mathbb{K}$ *linéaire continue telle que* $f_{/Y} = 0$ *et* $f(x_0) = 1$. *Soit* x^* *l'extension de* f *par Théorème d'extension de Hahn-Banach. Alors* $x^* = f$ *sur* $Y \oplus \mathbb{K}x_0$. *En particulier,* $x_0 \notin ker(x^*)$ *et ainsi* $x_0 \notin \bigcap\{ker(x^*)/x^* \in X^*, Y \subseteq ker(x^*)\}$ *ce qui est contradictoire par l'hypothèse. On en déduit que* $\overline{Y} = \bigcap\{ker(x^*) \ / \ x^* \in E^* \text{ et } Y \subseteq ker(x^*)\}$.

4) *D'après question* (3) *on a* $\overline{Y} = \bigcap\{ker(x^*) \ / \ x^* \in E^* \text{ et } Y \subseteq ker(x^*)\}$. *Alors*
[l'égalité $\overline{Y} = X$ *] ssi [* $ker(x^*) = X$ *pour tout* $x^* \in X^*$, $ker(x^*) \supseteq Y$*] ssi [pour tout* $x^* \in X^*$ $x^* = 0$ *sur* Y *implique que* $x^* = 0$ *sur* X.*]*

Pr. Mohammed KACHAD
Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia.