Équations différentielles: d'ordre un et d'ordre deux à cœfficients constants

Mardi 23 mars 2020

1 Équations différentielles linéres d'ordre un

Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I (contenant au moins un intervalle ouvert non vide) de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que a ne soit pas identiquement nulle sur I. On considère l'égalité suivante:

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \tag{1.1}$$

appelée équation différentielle linéaire d'ordre un. On lui associe l'équation homogène:

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \tag{1.2}$$

Exemple 1.1

$$ch(x)y'(x) + sh(x)y(x) = \frac{1}{x^2+1} \tag{1.3}$$

est bien une équation différentielle linéaire d'ordre un dont l'équation homogène est:

$$ch(x)y'(x) + sh(x)y(x) = 0 \tag{1.4}$$

Remarque 1.1 Les solutions de (1.1) et (1.2) c'est-à- les fonctions $x \mapsto y(x)$ qui vérifient respectivement (1.1) et (1.2) seront données dans un intervalle J contenu dans I tel que $a(x) \neq 0$, $\forall x \in J$.

Proposition 1.1 *La solution générale de l'équation homogène (1.2) dans un intervalle J où la fonction a ne s'annule pas est:*

$$y_0(x) = \lambda \exp(-B(x))$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et B est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Remarquons que l'ensemble S_H des solutions de l'équation homogène (1.2) est égal à l'ensemble des multiples d'une solution $y_0 \neq 0$ de (1.2). C'est-à-dire $S_H = \mathbb{K}y_0$. qui est donc une droite vectorielle. Par ailleurs, si $y \in S_H - \{0\}$ alors $y(x) \neq 0$, pour tout $x \in J$ (où $J \subset I$ satisfait $0 \notin a(J)$).

Exemple 1.2 Pour l'équation différentielle:

$$xy'(x) + y(x) = \sin(x) \tag{1.5}$$

la solution générale de l'équation homogène associée

$$xy'(x) + y(x) = 0 \tag{1.6}$$

est donnée par $S_H = \left\{y; x \mapsto \frac{\lambda}{x} : \lambda \in \mathbb{K}\right\}$,

Proposition 1.2 *On suppose que dans l'équation avec second membre (1.1), la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors sa solution générale est donnée par:*

$$y(x) = (C(x) + \lambda) \exp(-B(x))$$

où B et C sont respectivement des primitives des fonctions $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ et $x \mapsto \frac{c(x)}{a(x)} \exp(B(x))$.

Preuve. Il suffit d'integrer successivement les équations (1.2) et (1.1). ■

Remarque 1.2 1. Théoriquement, les équations (1.1) et (1.2) admettent toujours des solutions. Mais pratiquent, la détermination explicite de y_0 nécessite les calculs des intégrales qui donnent B et C de la proposition1.2. Génralement, ces calculs sont difficiles.

2. L'ensemble des solutions S_E de l'équation avec second membre (1.1) est

$$S_E = \{x \mapsto y_p(x) + y_0(x)\}$$

où $y_0(x) = \lambda \exp(-B(x))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, B est primitive de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ et y_p une solution particulière de l'équation complète (1.1). Dans ce cas aussi, on a besoin de connaitre une solution particulière y_p de (1.1).

Ainsi, ayant déterminé y_0, pour résoudre l'équation (1.1) on cherche d'abord intuitivement une solution particulière y_p de (1.1).

Exemple 1.3 Pour l'équation différentielle:

$$xy'(x) - y(x) = x^2 \exp(x) \tag{1.7}$$

la solution générale de l'équation homogène associée

$$xy'(x) - y(x) = 0 \tag{1.8}$$

est donnée par $S_H = \{y; x \mapsto \lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Par ailleurs, la fonction $y_p : x \mapsto x \exp(x)$ est bien une solution particulière de l'équation avec second membre (1.7). Donc la solution générale de cette équation complète est $y : x \mapsto y(x) = \lambda x + x \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si on n'arrive pas trouver intuitivement une solution particulière de l'équation avec second membre, on utilise la méthode de la variation de la constante:

• **Méthode de la variation de la constante**

Reprenons les équations (1.1) et (1.2) données sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $a(x) \neq 0, \forall x \in I$. Si y_0 est une solution non triviale (ie. y_0 non identiquement nulle sur I) alors $\forall x \in I, y_0(x) \neq 0$ et la solution générale de (1.2) est

$$y(x) = \lambda y_0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec secod membre (1.2) on fait varier la constante c'est-à-dire on suppose que $\lambda = \lambda(x)$ est une fonction de x. On cherche alors une solution particulière de (1.1) de la forme $x \mapsto \lambda(x)y_0(x)$ dont la dérivée est $y'(x) = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)$. Par substitution dans (1.1) on obtient

$$\begin{aligned}
(E_1) \quad &: \quad a(x)\left[\lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)\right] + b(x)\lambda(x)y_0(x) = c(x) \\
&\Leftrightarrow \quad a(x)\left[\lambda'(x)y_0 + \lambda(x)y_0'(x)\right] + b(x)y_0(x) = c(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(x)a(x)y_0(x) = c(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)y_0(x)} \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Si $x \mapsto \Gamma(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{c(x)}{a(x)y_0(x)}$ sur I alors $y_p : x \mapsto \Gamma(x)y_0(x)$ est une solution particulière de (1.1) et $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ est la solution générale de (1.1)

Exemple 1.4 Résolvons l'équation différentielle:

$$\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 1 \tag{1.10}$$

la solution générale de l'équation homogène associée

$$\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 0 \tag{1.11}$$

est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned} \cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x)}{cos(x)}y \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{\sin(x)}{cos(x)}dx \end{aligned} \tag{1.12}$$

Par intégration des deux membres de l'égalité (1.12) on obtient:

$$\ln|y| = \ln|\cos(x)| + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

En appliquant l'exponentielle à cette égalité on en déduit que la solution générale de

$$y_0(x) = \lambda\cos(x);\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Faisons varier la constante, donc $\lambda = \lambda(x)$ et dérivons l'expression

$$y(x) = \lambda(x)\cos(x)$$

pour aboutir à *:*

$$\cos(x)\left[\lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)\right] + \sin(x)\left[\lambda(x)\cos(x)\right] = 1$$

qui est équivalente à:

$$\lambda'(x)\cos^2(x) = 1$$

c'est-à-dire:

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = (\tan)'(x)$$

Par suite;

$$\lambda(x) = \tan(x) + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, une solution particulière de l'èquation différentielle (1.10) est (pour $\alpha = 0$)*:* $y_p = \tan(x)\cos(x) = \sin(x)$ et sa solution générale est

$$y(x) = \sin(x) + \alpha\cos(x),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pratiquement, même la méthode de la variation de la constante ne marche pas pour toutes les équations différentielles d'otdtre un, puisqu'elle repose sur les calculs d'intégrales qui ne sont pas toujours facilement abordables. Dans certains cas spéciaux on donnera des méthodes adéquates pour détourner ce problème.

2 Équations homogènes de premier ordre

Définition 2.1 *Une équation homogène de premier ordre est une équation différentielle du type:*

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \tag{2.13}$$

où f est une fontion réelle.

Pour résoudre une telle équation, le changement de variable $y(x) = x\alpha(x)$ où α est une fonction réelle à déterminer, permet de transformer l'égalité (2.13) en une équation différentielle à variables séparables de premier degé, donc facile à intégrer.

Exemple 2.1

$$x^2 y'(x) = y^2(x) + xy(x) + x^2 \tag{2.14}$$

se transforme en

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x} + 1 \tag{2.15}$$

qui est bien de la fotme $y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ où $f(t) = t^2 + t + 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Posons $y(x) = x\alpha(x)$, par dérivation ($y'(x) = x\alpha'(x) + \alpha(x)$) et par substitution dans (2.15) on aura

$$\begin{aligned}
(2.14) \quad & \Leftrightarrow \quad x\alpha'(x) + \alpha(x) = \alpha^2(x) + \alpha(x) + 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x)+1} = \frac{1}{x} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\alpha^2+1}{x} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{d\alpha}{\alpha^2+1} = \frac{dx}{x} \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de (2.16) on trouve

$$\arctan(\alpha) = \ln|x| + \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$

qui signifie que

$$\alpha = \tan\left(\ln|x| + \kappa\right), \kappa \in \mathbb{R}$$

Par quencéconce, la solution génrale de (2.14)est:

$$y(x) = x\tan\left(\ln|x| + \kappa\right), \kappa \in \mathbb{R}$$

3 Équation de Bernoulli

Définition 3.1 *Une équation de Bernoulli dordre $n \geqslant 2$ est une équation différentielle du type:*

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^n(x) = 0 \tag{3.17}$$

où n est un entier naturel plus grand que deux, a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Il est évident que la fonction nulle est solution de (3.17). Pour déterminer les solutions (non triviales ie les $y \neq 0$) de cette équation, on divise les deux membres de son égalité par y^n ce qui nous conduit à:

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)}) + \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)}) + b(x) = 0 \tag{3.18}$$

En éffectuant ensuite le changement de variable $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$, on se ramène à la suivante:

$$\frac{1}{1-n}z'(x) + a(x)z(x) + b(x) = 0 \tag{3.19}$$

dont la solution générale est relativement facile à déterminer, mais il ne faut pas oublier de revenir à la variable $y(x) = z^{-\frac{1}{n-1}}(x)$ qui sera la solution générale (non identiquement nulle) de (3.17).

Exemple 3.1

$$y'(x) + x^2 y(x) + x^5 y^2(x) = 0 \tag{3.20}$$

est une équation de Bernoulli dordre $n = 2$ qui se transforme en posant $z(x) = \frac{1}{y(x)}$

$$\begin{aligned}(3.20) \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{1-2} z'(x) + x^2 z(x) + x^5 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -z'(x) + x^2 z(x) + x^5 = 0 \qquad (3.21)\end{aligned}$$

qui a pour équation homogène

$$\begin{aligned}(H_z) \quad : \quad & -z'(x) + x^2 z(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{dz}{dx} = z x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{dz}{z} = x^2 dx \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Par intégration on obtient la solution générale de (H_z):

$$z_0(x) = \kappa \exp(\frac{x^3}{3}); \ \kappa \in \mathbb{R}$$

Faixant varier la constante; on suppose donc que $\kappa = \kappa(x)$ ainsi:

$$z'(x) = \kappa'(x) \exp(\frac{x^3}{3}) + \kappa(x) x^2 \exp(\frac{x^3}{3})$$

Par substitution dans (3.21) on aura:

$$\begin{aligned}(3.21) \quad \Rightarrow \quad & -\kappa'(x) \exp(\frac{x^3}{3}) - \kappa(x) x^2 \exp(\frac{x^3}{3}) + \kappa(x) x^2 \exp(\frac{x^3}{3}) + x^5 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\kappa'(x) \exp(\frac{x^3}{3}) + x^5 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\kappa'(x) \exp(\frac{x^3}{3}) = -x^5 \\ \Leftrightarrow \quad & \kappa'(x) = x^5 \exp -(\frac{x^3}{3}) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d\kappa}{dx} = x^5 \exp -(\frac{x^3}{3}) \\ \Leftrightarrow \quad & d\kappa = x^5 \exp -(\frac{x^3}{3}) dx \qquad (3.23)\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de (3.23) on arrive à

$$\kappa = \int d\kappa = \int x^5 \exp -(\frac{x^3}{3}) dx$$

Des intégrations par parties prouvent que

$$\kappa = \left(-x^3 - 3\right) \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right) + cte$$

pour $cte = 0$ on obtient une solution particulière de (3.21)

$$z_p(x) = \kappa \exp(\frac{x^3}{3}) = -x^3 - 3$$

Donc la solution géntale de (3.21) est

$$z(x) = \kappa \exp(\frac{x^3}{3}) - x^3 - 3, \ \ \kappa \in \mathbb{R}$$

On en déduit que les solutions non triviales de (3.20) sont

$$y(x) = \frac{1}{\kappa \exp(\frac{x^3}{3}) - x^3 - 3}, \ \kappa \in \mathbb{R}$$

Remarquer que la solution triviale (la fonction identiquement nulle) est obtenue en faisant tendre κ vers l'infini ($\kappa \to +\infty$)

4 Équations de Recatti

Définition 4.1 *On appelle équation de Recatti toute équation différentielle de la forme:*

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x) \tag{4.24}$$

où a,b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Quand on connait une solution particulière $x \mapsto y_p$ de (4.24)n alors le changement de variable $z = y - y_p$ transforme cette équation de Recatti en l'équation de Bernoulli d'ordre $n = 2$ suivante

$$z'(x) = a(x)z^2(x) + (2a(x)y_p(x) + b(x))\, y(x) \tag{4.25}$$

Qu'on a traité dans le paragraphe trois précédent.

Pour clore l'étude des équations différentielles d'ordre un, on donne le ptoblème de Caucgy suivant:

Proposition 4.1 *Considérons une équation différentielle*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \tag{4.26}$$

sur un intervalle I où la fonction a ne s'annule pas. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule solution y de (4.26) sur I telle que $y_0(x_0) = y_0$. Trouver cette solution c'est résoudre le problème de Cauchy relatif aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$.

5 Équations differetielle linéaire d'ordre deux

Dans sette section on ne considérera que les équations différentielles d'ordre deux à cœfficients constants.

Définition 5.1 *Une équation différentielle d'ordre deux à cœfficients constants est une équation de la forme*

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \tag{5.27}$$

sachant que a et b sont des nombres réels et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'équation (5.25) est dite avec second membre (on écrira (EASM)). On lui associe l'équation sans second membre (ESSM)

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \tag{5.28}$$

et l'équation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{5.29}$$

Exemple 5.1 Considérons (EASM) suivante

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = -3\cos(x) - \sin(x) \tag{5.30}$$

dont l'équation homogène est

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0 \tag{5.31}$$

qui a pour équation caractéristique

$$r^2 + r - 2 = 0 \tag{5.32}$$

Le théorème suivant permet de trouver toutes les solutions de l'équation homogène. Pour chercher les solutions de l'EASM on va déterminer directement ou avec la méthode de la variation des constantes une solution particulière.

Théorème 5.1 *On garde les notations de la définition5.1 ci-dessus et on note $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (5.29).*
(i) Si $\Delta > 0$ et si $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ sont les racines de l'équation caractéristique (5.29) alors la solution générale de l'équation sans second memmbre (5.28) est:

$$y_0(x) = A\exp(\lambda_1 x) + B\exp(\lambda_2 x) : \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.33}$$

(ii) Si $\Delta = 0$ et si $\lambda_0 = \frac{-a}{2}$ est la racine double de l'équation caractéristique (5.29) alors la solution générale de l'équation sans second memmbre (5.28) est:

$$y_0(x) = (Ax + B)\, exp(\lambda_0 x) : \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.34}$$

(iii) Si $\Delta < 0$ et si $\lambda_1 = \frac{-a+i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \frac{-a-i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\omega$ sont les racines de l'équation caractéristique (5.29) alors la solution générale de l'équation sans second memmbre (5.28) est:

$$y_0(x) = (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\exp(\alpha x) : \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.35}$$

Preuve. Dans chacun des trois cas de ce théoème, les vecteurs y_1 et y_2 tels que $y_0 = Ay_1 + By_2$ sont évidement linéairement indépendants donc ils forment une base de l'espace vectoriel S_H.

■

De ce théorème on conclut le suivant.

Corollaire 5.1 *Avec les notations de la définition5.1 ci-dessus, l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre (5.28) est un espace vectoriel réel de dimension deux dont une base esr $\beta = \{y_1, y_2\}$ avec:*
1) $y_1 = \exp(\lambda_1 x), y_2 = \exp(\lambda_2 x)$, si $\Delta > 0$
2) $y_1 = \exp(\lambda_0 x), y_2 = x\exp(\lambda_0 x)$, si $\Delta = 0$
3) $y_1 = \cos(\omega x)\exp(\alpha x), y_2 = \sin(\omega x)\exp(\alpha x)$, si $\Delta < 0$

Exemple 5.2 1) Pour cette première équation diférentielle

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0 \tag{5.36}$$

l'équation caractéristique est $r^2+3r+2=0$ donc $\Delta=1$ et $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$ ainsi la solution générale de cette ESSM est:

$y_0(x)=A\exp(-x)+B\exp(-2x)\,,\,(A,B)\in\mathbb{R}^2$

2) l'équation caractéristique de

$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0 \tag{5.37}$$

est $r^2-4r+4=0$ donc $\Delta=0$, $\lambda_0=2$ et la solution générale de (5.37) est:

$y_0(x)=(Ax+B)\exp(2x)\,,\,(A,B)\in\mathbb{R}^2.$

3) L'équation diférentielle

$$y''(x)-2y'(x)+2y(x)=0 \tag{5.38}$$

admet pour équation caractéristique $r^2-2r+2=0$ dont les racines sont $\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=1-i$, de sorte que la solution générale de (5.38) est:

$y_0(x)=(A\cos(x)+B\sin(x))\exp(x)\,,\,(A,B)\in\mathbb{R}^2.$

Il est donc facile de déterminer les racines de l'ESSM (5.28). Le problème est donc de chercher une solution particulière de l'EASM (5.27). Nous allons donner deux méthodes pour le faire.

- **Cas où le second membre $f(x)$ possède une forme spécifique**

(i) Si $f(x)=P(x)\exp(\alpha x)$ où $P(x)$ est un polynôme à cœfficiants réels de degré $n\geqslant 0$, alors une solution particulière de (5.27) est $y_p(x)=Q(x)\exp(\alpha x)$ avec $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ et:

$\star$ $\deg(Q)=\deg(P)=n$ au cas où α n'est pas eacine de l'équation caractéristique (5.29).

$\star$ $\deg(Q)=\deg(P)+1=n+1$ au cas où α est une eacine simple de l'équation caractéristique (5.29).

$\star$ $\deg(Q)=\deg(P)+2=n+2$ au cas où α est une eacine double de l'équation caractéristique (5.29).

Deux cas particuliers de cette situation sont à signaler:

lorsque $f(x) = P(x)$ $(\alpha = 0)$ ou $f(x) = e^{\alpha x}$ $(P(x) = 1$ de degré zéro).

(ii) Cas où $f(x) = M\cos(\omega x) + N\sin(\omega x)$, $(M, N) \in \mathbb{R}^2$. Deux situations se présentent:

$*$ Si ω n'est pas une racine de l'équation caractéristique (5.39) on cherchera alors y_p sous la forme $y_p(x) = K_1\cos(\omega x) + K_2\sin(\omega x)$, $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

$*$ Si ω est racine de l'équation caractéristique (5.39) alors y_p sera de la forme $y_p(x) = x\,(K_1\cos(\omega x) + K_2\sin(\omega x))$, $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

Quand le second membre n'est pas de l'une de ces formes on utilisera:

- **La méthode de la variation des constantes**

On suppose que l'ensemble S_H des solutions de l'équation sans second membre (5.28) vérifie $S_H = \mathbb{R}y_1 \oplus \mathbb{R}y_2$ c'est-à-dire que la solution générale de(5.28) est

$$y_0(x) = Ay_1(x) + By_2(x)\,,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

alors faire varier les constantes c'est considérer A et B des fonctions de la variable x, ie. $A = A(x)$ et $B = B(x)$ et chercher une solution particulière y_p sous la forme:

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$

A et B sont deux fonctions qui vérifient

$$A'y_1 + B'y_2 = 0$$

de sorte que $y_p' = Ay_1' + By_2'$ et l'EASM (5.27) devient

$$A'y_1' + B'y_2' = f(x)$$

car y_1 et y_2 vérifient l'ESSM (5.28). Donc A' et B' sont solution du système

$$(S)\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = f(x) \end{cases}$$

En résolvant (S) par la méthode des déterminants on obtient A' et B' par intégration on obtiendra A et B et donc y_p.

Exemple 5.3 Intégrons l'équation differentielle suivante

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)} \tag{5.39}$$

d'équation homogène

$$y''(x) + y(x) = 0 \tag{5.40}$$

et d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. Ainsi la solution générale de l'ESSM (5.40) est

$$y_0(x) = A\cos(x) + B\sin(x)\,,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Dans ce cas $y_1(x) = \cos(x)$ et $y_2(x) = \sin(x)$. Si $A = A(x)$ et $B = B(x)$ alors les fonctions dérivées A' et B' sont donné par le système

$$(S)\left\{\begin{array}{l} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \dfrac{1}{\sin(x)} \end{array}\right.$$

qui n'est rien d'autre que

$$(S)\left\{\begin{array}{l} A'\cos(x) + B'\sin(x) = 0 \\ -A'\sin(x) + B'\cos(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système est:

$$\Lambda_S = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

De même les déterminants de A' et B' sont:

$$\Lambda_{A'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \dfrac{1}{\sin(x)} & \cos(x) \end{vmatrix} = 0 \times \cos(x) - \sin(x) \times \frac{1}{\sin(x)} = -1.$$

et

$$\Lambda_{B'} = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \dfrac{1}{\sin(x)} \end{vmatrix} = \cos(x) \times \frac{1}{\sin(x)} + 0 \times (-\sin(x)) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

On en déduit que

$$A' = \frac{\Lambda_{A'}}{\Lambda_S} = -1 \Rightarrow A = \int -dx = -x + \kappa\,,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

et

$$B' = \frac{\Lambda_{B'}}{\Lambda_S} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow B = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln|\sin(x)| + \kappa\,,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

Pour $\kappa = 0$ on obtient une solution particulière y_p de l'EASM (5.39)

$$y_p(x) = -x\cos(x) + \ln|\sin(x)| \times \sin(x)$$

Ainsi la solution générale de l'EASM (5.39) est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_p(x) \\ &= A\cos(x) + B\sin(x) - x\cos(x) + \ln|\sin(x)| \times \sin(x)\,,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

• **Principe de superposition :**

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière de l'EASM (5.27) est donnée par $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$, où $y_{p,i}$ est une solution de l'EASM:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f_i(x)\ ,\ i = 1, 2$$

(Conséquence de la linéarité de $L : y \mapsto y'' + ay' + by$.)

---

[0] **Tout(e) étudiant(e) n'ayant pas compris un (ou des) passage(s) dans le cours ce chapitre 2 peuvent me rédiger leurs questions via Whatsapp au N° 0694583317. Je vous enverrai (in chaa allah) les réponses par Whatsapp. Quant aux TD, faites d'abord des éfforts personnels après je mettrai (in chaa allah) à votre disposition sur le site de la FSTE les corrections après quoi j'attendrai vos questions (sur les TD). Tournez la page SVP**

Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2019-2020
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Série n^{o}4

Exercice1 Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$(E_{1.1}) : \; 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = x^2$$

$$(E_{1.2}) : \; \left(y - x^2y\right) y' + xy^2 = x$$

$$(E_{1.3}) : \; x^2y' - y^2 = -2x^2$$

$$(E_{1.4}) : \; \left(1 - x^2\right) y' - xy - xy^2 = 0$$

Exercice2 Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$(E_{2.1}) : \; y' + y = \cos x$$

$$(E_{2.2}) : \; y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(E_{2.3}) : \; ch\,(x)\, y' + sh\,(x)\, y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(E_{2.4}) : \; 6y' - 2y = xy^4$$

Exercice3: Résoudre les équations différentielles d'ordre deux suivantes,

$$(E_{3.1}) : \; y'' + 3y' + 2y = x^2 + e^{-x} + \sin(x)$$

$$(E_{3.2}) : \; y'' + 4y' + 5y = x\sin(x)\, e^{-2x}$$