Exercice 19. Pour tout $z \in \mathcal{C}(0,r)$, on a :

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z_0}{z}\right)^n.$$

Soit $\varphi : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto re^{it}$. Et soit $\gamma := \varphi([0,2\pi])$

D'après la **formule de Cauchy**, on a :

$$0 = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\left[1+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z_0}{z}\right)^n\right]dz$$

$$\Rightarrow 2\pi i a_0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = -\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z_0}{z}\right)^n dz$$

$$= -i\int_0^{2\pi} f(re^{it})\sum_{n\geq 1} f\left(\frac{z_0}{r}\right)e^{-int}\,dt$$

Et alors, on a :

$$2\pi|a_0| \leq M\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 1}|z_0|^n r^{-n}\,dt = \frac{2\pi M|z_0|}{r-|z_0|}$$

$$\Rightarrow |a_0|(r-|z_0|) \leq M|z_0| \Rightarrow r|a_0| \leq (M+|a_0|)|z_0|.$$

N.B. On va donner une autre méthode dans le chapitre IV en utilisant le principe du maximum.
Voir : Exercice 17 du chapitre IV.

Exercice 20. 1) $g := f^4$ est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{B}(0,1)$ et $g(0)=0$. Et d'après la formule de Cauchy, on a :

$$0 = [f(0)]^4 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}[f(e^{it})]^4 dt$$

2) Posons : $u(t) := P(e^{it})$ et $v(t) := Q(e^{it})$.

D'après 1), on a :

$$\int_0^{2\pi}[u^4(t)+v^4(t)]dt - 6\int_0^{2\pi} u^2(t)v^2(t)\,dt = 0$$

Compte-tenu de l'inégalité de Schwarz, on a :

$$\int_0^{2\pi} v^4(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} u^4(t)\,dt + 6\int_0^{2\pi} u^2(t)v^2(t)\,dt$$

$$\leq 6\int_0^{2\pi} u^2(t)v^2(t)\,dt$$

$$\leq 6\sqrt{\int_0^{2\pi} u^4(t)\,dt}\cdot\sqrt{\int_0^{2\pi} v^4(t)\,dt}.$$

Et alors on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} v^4(t)\,dt \leq 36\int_0^{2\pi} u^4(t)\,dt.$

<u>Exercice 21</u>. Soient $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la formule de Cauchy, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,e^{-int}\,dt.$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-r} = \frac{1}{r^n(1-r)}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a : $0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$.

Prenant $r = \dfrac{n}{n+1}$, on obtient :

$|a_n| \leq (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Pour $x>0$, posons : $\begin{cases} g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\ h(x) = \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \end{cases}$

$g'(x)$ est de signe de $h(x)$ et $h'(x) = \dfrac{1}{1+x}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x}\right) < 0$.

Donc, h est strictement croissante. Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$, on en déduit que g est strictement croissante. Et en particulier on a :

$g(x) < e = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \quad \forall x \geq 1$.

Et alors, on a le résultat.

<u>Exercice 22.</u> Le chemin γ est paramétré par :

$$\varphi : [1,2] \longrightarrow \gamma$$
$$t \longmapsto (t, t^2) \quad (\text{ou } t + t^2 i)$$

Donc : $\displaystyle\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_1^2 \overline{t+t^2 i}\; d(t+t^2 i)$

$$\Rightarrow \int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_1^2 (t - t^2 i)(1+2ti)\,dt$$

$$= \int_1^2 \left(2t^3 + t + t^2 i\right) dt$$

$$= 9 + \frac{7}{3} i$$

<u>Exercice 23.</u> 1) $\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \overline{\int_0^1 f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}$

$$= \int_0^1 \overline{f(\varphi(t))\varphi'(t)}\,dt = \int_0^1 \overline{f\left(\overline{\psi(t)}\right)}\,\psi'(t)\,dt$$

$$= \int_\eta \overline{f(\bar{z})}\,dz.$$

2) $\varphi(t) = e^{2i\pi t} \Rightarrow \psi(t) = e^{-2i\pi t}$

Et d'après 1), on a :

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_\eta \overline{f(\bar{z})}\,dz = -2i\pi \int_0^1 \overline{f\left(e^{2i\pi t}\right) e^{-2i\pi t}}\,dt$$

$$= -2i\pi \int_0^1 f\left(e^{2i\pi t}\right) e^{2i\pi t} \frac{dt}{e^{4i\pi t}}$$

$$= -\int_\gamma \overline{f(z)}\,\frac{dz}{z^2}.$$

<u>Exercice 24.</u> $I = ri \int_0^{2\pi} f(re^{it})\,e^{it}\,dt$ et

$$I_n = ri\left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_0^{2\pi} f\left[r\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{it}\right] e^{it}\,dt$$

Et alors, on a :

$$|I-I_m| \leqslant \frac{r}{m}\int_0^{2\pi}\left|f\left[r(1-\tfrac{1}{m})e^{it}\right]\right| dt \;+$$

$$r\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})-f\left[r(1-\tfrac{1}{m})e^{it}\right]\right| dt$$

Comme f est continue sur le compact $\overline{B}(0,1)$, elle est uniformément continue sur $\overline{B}(0,1)$.

Soit $\varepsilon>0$, alors :

. $\exists M\geqslant 0$ tel que $|f(z)|\leqslant M \quad \forall z\in\overline{B}(0,1)$.

. $\exists \eta>0$ tel que $|f(z)-f(u)|\leqslant\varepsilon$ dès que $z,u\in\overline{B}(0,1)$ et $|z-u|\leqslant\eta$.

On en déduit le résultat puisqu'on a :

$$m\geqslant\frac{r}{\eta} \Rightarrow |I-I_m|\leqslant\frac{2\pi M r}{m}+2\pi r\varepsilon .$$

Exercice 25. D'après la formule de Cauchy :

$I_r = f(z) \quad \forall r\in\,]|z|,R[$.

Il nous suffit donc de prouver que :

$$\lim_{r\to R} I_r = I_R$$

Soit $|u|>|z|$. Posons : $g(u):=\dfrac{u f(u)}{u-z}$.

Fixons $\rho \in]|b|, R[$. Pour tout $r \in [\rho, R[$, on a:

$$2\pi |I_r - I_R| \leq \int_0^{2\pi} |g(re^{it}) - g(Re^{it})| \, dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est uniformément continue sur $\{u \in \mathbb{C} / \rho \leq |u| \leq R\}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$R - r \leq \eta \Rightarrow |g(re^{it}) - g(Re^{it})| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour $R - r \leq \eta$ on a : $2\pi |I_r - I_R| \leq 2\pi\varepsilon$.

Et donc, on a le résultat.

Exercice 26. 1) $\displaystyle\int_\gamma \bar{z}\, dz = \underbrace{\int_{OB} \bar{z}\, dz}_{1} + \underbrace{\int_{BC} \bar{z}\, dz}_{2} + \underbrace{\int_{CO} \bar{z}\, dz}_{3}$

$$1 = \int_0^1 \overline{t(1+i)}\, d[t(1+i)] = \int_0^1 2t\, dt = 1$$

$$2 = \int_0^1 \overline{(1-t)(1+i) - 2t}\, d[(1-t)(1+t) - 2t]$$

$$= \int_0^1 [(2i-4) + 10t]\, dt = (2i-4) + 5 = 2i + 1$$

$$3 = \int_0^1 \overline{-2(1-t)}\, d(-2(1-t)) = \int_0^1 4(t-1)\, dt = 2.$$

Donc : $\displaystyle\int_\gamma \bar{z}\, dz = 2i.$

2) $\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{i+2e^{it}}\, d\left(i+2e^{it}\right)$

$= \int_0^{2\pi} 2i\left(-i+2e^{-it}\right) e^{it}\, dt = 8\pi i.$

3) $\int_\gamma \bar{z}\,dz = \underbrace{\int_{OB} \bar{z}\,dz}_{①} + \underbrace{\int_{BC} \bar{z}\,dz}_{②} + \underbrace{\int_{CO} \bar{z}\,dz}_{③}.$

① $= \int_0^1 \bar{t}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$;

② $= \int_0^1 \overline{(1-t)+ti}\; d\left((1-t)+ti\right) = \int_0^1 (-1+2t+i)\,dt = i.$

③ $= \int_0^1 \overline{(1-t)i}\; d\left((1-t)i\right) = \int_0^1 (t-1)\,dt = \frac{-1}{2}.$

Donc : $\int_\gamma \bar{z}\,dz = i.$

<u>Exercice 27.</u> D'après le théorème intégral de Cauchy $\int_\gamma e^z\,dz = 0$ puisque γ est fermé et e^z est entière.

Alors, on a :

$\int_\gamma (e^z - \bar{z})\,dz = -\int_\gamma \bar{z}\,dz = -\int_{OB} \bar{z}\,dz - \int_{BC} \bar{z}\,dz - \int_{CO} \bar{z}\,dz$

$= -\int_0^1 (-3it)\,d(3it) - \int_0^1 \left[-3i(1-t)-4t\right] d\left[3i(1-t)-4t\right] -$

$\int_0^1 -4(1-t)\, d\left[-4(1-t)\right] = -12i.$

Exercice 28. 1) D'après le théorème intégral de Cauchy

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\,dz = 0$$ si f est holomorphe sur le cercle $\mathcal{C}(0,1)$ et sur son intérieur.

Donc, il suffit de montrer que f est holomorphe sur $\overline{B}(0,1)$.

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2+5z+6}$$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-2,-3\}$.

Et alors, elle est holomorphe sur $\overline{B}(0,1)$.

Et par suite, $$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0.$$

2) De même, $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$ est holomorphe sur

$\{z \in \mathbb{C} / \cos z \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Et comme $|\frac{\pi}{2} + k\pi| > 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Donc, f est holomorphe sur $\overline{B}(0,1)$.

Et par suite, $$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0.$$

Exercice 30. 1) $$I_1 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^4 + t^4 i)\,2t(1+i)\,dt = 2(1+i)^2 \int_0^1 t^5\,dt = \frac{2}{3}i.$$

2) $$I_2 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-it}\,i\,e^{it}\,dt$$

$$\Rightarrow I_2 = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

3) $I_3 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-1}^{1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{-1}^{1}(t+t^2 i - i)(1+2ti)\,dt$

$$= \int_{-1}^{1}(-2t^3+3t^2 i+3t-i)\,dt = 0.$$

Exercice **29**. γ^- est le chemin inverse de γ.

Donc, γ^- est le demi-cercle $z = e^{i\theta}$ orienté dans le sens indirecte, c.à.d: θ varie de π à 0.

Et on a: $\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$.

D'autre part, si γ est paramétré par:

$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, on a:

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

1) $I_1 = \int_{\gamma^-} z^2\,dz = -\int_\gamma z^2\,dz$.

γ est paramétré par: $\varphi : [0,\pi] \longrightarrow \gamma$, $t \longmapsto e^{it}$.

Donc, $I_1 = -\int_0^\pi e^{2it}\, i e^{it}\,dt = -i\int_0^\pi e^{3it}\,dt = \frac{2}{3}$.

2) $I_2 = \int_{\gamma^-} |z^2|\,dz = -\int_\gamma |z|^2\,dz = -\int_0^\pi |e^{it}|^2\, i e^{it}\,dt$

$$\Rightarrow I_2 = -\left[e^{it}\right]_0^{\pi} = (1-e^{i\pi}) = 2.$$

3) $$I_3 = \int_{\gamma^-} z^2 |dz| = -\int_\gamma z^2 |dz| = -\int_0^{\pi} e^{2it} |de^{it}| dt$$

$$= -\int_0^{\pi} e^{2it} |ie^{it}| dt = -\int_0^{\pi} e^{2it} dt = 0.$$

4) $$I_4 = \int_{\gamma^-} |z^2| |dz| = -\int_\gamma |z|^2 |dz| = -\int_0^{\pi} |e^{it}|^2 |(e^{it})'| dt$$

$$= -\int_0^{\pi} dt = -\pi.$$

<u>Exercice 31.</u> 1) Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur γ, alors f est continue sur γ, et on a :

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma \left[f_n(z) - f(z)\right] dz \right|$$

$$\leq \sup_{z\in\gamma} |f_n(z) - f(z)| \int_\gamma dz$$

$$\leq L(\gamma) \sup_{z\in\gamma} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc : $$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

2) Il suffit d'appliquer 1) à la suite $(F_N)_N$ avec

$$F_N := \sum_{n=0}^{N} f_n.$$

Exercice 32. On peut supposer que $z_0 = 0$ en considérant la fonction $\tilde{f}(z) := f(z_0+z)$.
Soit $r \in]0,R[$. D'après la formule de Cauchy, pour tout $z \in B(0,r)$, on a : $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(y)}{y-z}\,dy .$$

Puisque $\left|\frac{z}{y}\right| < 1$, on a :
$$\frac{1}{y-z} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{y}}\right) = \frac{1}{y}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{y}\right)^n .$$
Et puisque la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{y}\right)^n$ est normalement convergente sur $C(0,r)$ (car son terme général est majoré par $\frac{|z|^n}{r^{n+1}}$), il vient que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$
avec $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(y)}{y^{n+1}}\,dy .$$

Exercice 33. Comme f est une fonction entière, on a :
$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$
avec $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(y)}{y^{n+1}}\,dy \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
où $r > 0$ (Voir exercice 32.)

Et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+1}} dy$$

$$\leq \frac{a+br^k}{2\pi r^{n+1}} \left| \int_{\mathcal{C}(0,r)} dy \right|$$

$$\leq \frac{a+br^k}{2\pi r^{n+1}} L\left(\mathcal{C}(0,r)\right)$$

$$\leq \frac{a+br^k}{2\pi r^{n+1}} r 2\pi$$

Donc : $|a_n| \leq \dfrac{a+br^k}{r^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall r > 0$.

Et alors : $a_n = 0$ $\forall n > k$.

Et par suite, f est un polynôme de degré au plus k.

<u>Exercice 34</u>. Soient $z = x+yi \in \mathbb{C}$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$t^z = t^{x+yi} = t^x t^{yi} = t^x e^{yi\log t}$$

$$\Rightarrow |t^z| = t^x |e^{iy\log t}| = t^x$$

Donc : $|t^z| = t^{Re(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$\left|\int_0^1 t^z dt\right| \leq \int_0^1 |t^z| dt = \int_0^1 t^{Re(z)} dt.$$

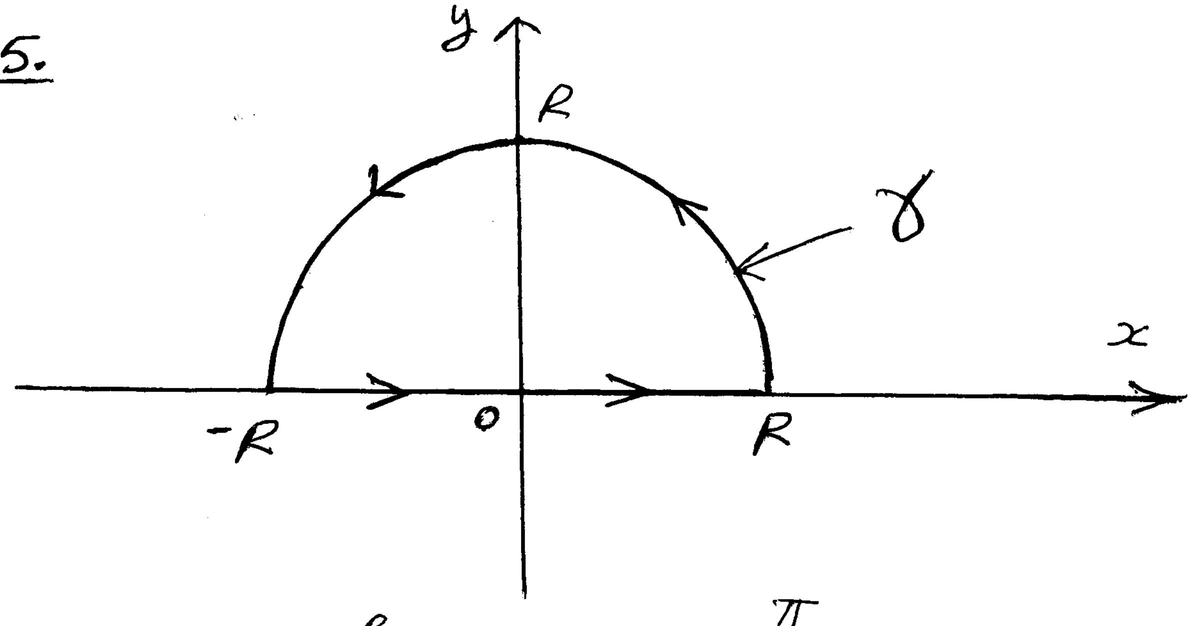
Et alors : $\int_0^1 t^z dt$ existe pour tout z tel que $Re(z) > -1$.

D'autre part, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > -1$:

$$\left|\int_0^1 t^z \, dt\right| \leq \int_0^1 t^{Re(z)} \, dt = \left[\frac{t^{Re(z)+1}}{Re(z)+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 t^z \, dt\right| \leq \frac{1}{1+Re(z)} .$$

Exercice 35.



$$I = \int_\gamma |z| \bar{z} \, dz = \int_{-R}^{R} |x| x \, dx + i \int_0^{\pi} R^3 e^{-it} e^{it} \, dt$$

$$= \int_{-R}^{0} x^2 \, dx + \int_0^{R} x^2 \, dx + i \int_0^{\pi} R^3 \, dt$$

$$\Rightarrow \int_\gamma |z| \bar{z} \, dz = i \pi R^3 .$$

Exercice 36. 1) Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue au voisinage de 0, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|f(re^{it}) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \forall r < \delta \text{ et } \forall t \in [0, 2\pi] .$$

Alors on a :

$$\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,dt - 2\pi f(0)\right| = \left|\int_0^{2\pi}\left[f(re^{it}) - f(0)\right]dt\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = \varepsilon.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,dt = 2\pi f(0)$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que :

$|f(re^{it}) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ $\forall r < \delta$ et $\forall t \in [0, 2\pi]$.

On a pour tous $r < \delta$ et $t \in [0, 2\pi]$:

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz - 2\pi i f(0)\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}}\, i r e^{it}\,dt - i\int_0^{2\pi} f(0)\,dt\right|$$

$$= \left| i\int_0^{2\pi}\left[f(re^{it}) - f(0)\right]dt\right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\left|f(re^{it}) - f(0)\right| dt$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = \varepsilon.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i f(0)$.

__Exercice 37.__ Montrons d'abord que tous les zéros de

$z^{2020} + z^{2019} + z^{2018} + 1 = 0$ sont dans

$\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 2\}$.

Supposons qu'il existe $|z| \geq 2$ tel que z est racine de l'équation ci-dessus. Alors on a :

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^{2020}} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \left| -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^{2020}} \right| \leq \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^{2020}}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{2020}} < 1$$

Ce qui est absurde.

Donc, tous les zéros de l'équation $z^{2020} + z^{2019} + z^{2018} + 1 = 0$ sont dans $B(0,2)$.

Et d'après le théorème intégral de Cauchy, pour tout $R > 2$, on a :

$$\int_\gamma \frac{z^{2020}}{z^{2020} + z^{2019} + z^{2018} + 1}\, dz = \int_{C(0,R)} \frac{z^{2020}}{z^{2020} + z^{2019} + z^{2018} + 1}\, dz$$

D'autre part, on a :

$$\frac{z^{2020}}{z^{2020} + z^{2019} + z^{2018} + 1} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{z^{2018} - z + 1}{z\left(z^{2020} + z^{2019} + z^{2018} + 1\right)}$$

Or $\dfrac{z^{2018}-z+1}{z(z^{2020}+z^{2019}+z^{2018}+1)} \leq \dfrac{R^{2018}+R+1}{R(R^{2020}-R^{2019}-R^{2018}-1)}$

pour tout $z \in \mathcal{C}(0,R)$. Et alors, on a :

$$\left|\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{z^{2018}-z+1}{z(z^{2020}+z^{2019}+z^{2018}+1)}\,dz\right| \leq \frac{2\pi(R^{2018}+R+1)}{R^{2020}-R^{2019}-R^{2018}-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{z^{2018}-z+1}{z(z^{2020}+z^{2019}+z^{2018}+1)}\,dz = 0$$

Et comme $\int_{\mathcal{C}(0,R)} dz = 0$ et $\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$

Alors, on a :

$$\int_\gamma \frac{z^{2020}}{z^{2020}+z^{2019}+z^{2018}+1}\,dz = 2\pi i.$$