Chapitre 4

Théorème de Hahn-Banach

4.1 Axiome du choix

Rappelons d'abord **l'axiome du choix** *:*

"Etant donné une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides d'un ensemble E, il existe une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telle que pour tout $i \in I$,$a_i \in A_i$".

Ou, ce qui revient au même :

"Tout produit d'ensembles non vides est non vide ".

On montre que l'axiome du choix est équivalent au **Lemme de Zorn**. *Pour énoncer celui-ci, donnons d'abord quelques définitions :*

Définition 4.1.1 *Soit A un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle) notée "$\leq$".*

(1) On dit qu'un sous-ensemble B de A est **totalement ordonné** *si pour tout $a, b \in B$, on a "$a \leq b$ ou $b \leq a$".*

(2) Soit B un sous-ensemble de A, on dit que $c \in A$ est un **majorant** *de B si pour tout $a \in B$, $a \leq c$.*

(3) On dit que $m \in A$ est un élément **maximal** *de A si pour tout $a \in A$ tel que $m \leq a$, on a $m = a$.*

(4) On dit que A est **inductif** *si tout sous-ensemble totalement ordonné de A admet un majorant.*

Lemma 4.1.2 **(Zorn)**

Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.

Remarque 4.1.3 *Le Lemme de Zorn, bien qu'il soit algébrique, a de nombreuses applications en Analyse.*

4.2 Forme analytique du Théorème de Hahn-Banach

Définition 4.2.1 *Soit E un espace vectoriel. On dit que $P : E \to \mathbb{R}$ est une* **sous-norme** *sur E si P vérifie :*
(1) $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$, $\forall x, y \in E$
(2) $P(\lambda x) = \lambda P(x)$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall x \in E$.

Théorème 4.2.2 **(Hahn-Banach, cas réel)**
Soit E un espace vectoriel réel. Soit P une sous-norme sur E.
Soit M un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur M telle que pour tout $x \in M$, on a $f(x) \leq P(x)$.

Alors, il existe une forme linéaire F sur E qui prolonge f, c'est à dire :

$$F(x) = f(x),\ \forall x \in M \quad \textit{et telle que} \quad F(x) \leq P(x),\ \forall x \in E.$$

Corollaire 4.2.3 **(Hahn-Banach, cas complexe)**
Soit E un espace vectoriel complexe et P une semi-norme sur E.
Soit M un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur M telle que pour tout $x \in M$, on a $|f(x)| \leq P(x)$.

Alors, il existe une forme linéaire F sur E qui prolonge f, c'est à dire :

$$F_{|M} = f \quad \textit{et telle que} \quad F(x) \leq P(x),\ \forall x \in E.$$

Corollaire 4.2.4 *Soit E un espace vectoriel normé. Soit M un sous-espace vectoriel de E. Alors toute forme linéaire continue f sur M, admet un prolongement en une forme linéaire continue F sur E de même norme. C'est à dire :*

$$F_{|M} = f \quad \textit{et} \quad \|F\| = \|f\|.$$

Remarque 4.2.5

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in M, \|x\| \leq 1\} \quad \textit{et} \quad \|F\| = \sup\{|F(x)|;\ x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

Notons par $E^* = L(E, \mathbb{K}) = \{f : E \to \mathbb{K}$ linéaire continue$\}$, le dual topologique de E (voir le paragraphe 4).

Théorème 4.2.6 *Soit E un espace vectoriel normé. Alors :*

(1) Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E. Soit $x_0 \in E$ tel que $d(x_0, M) = d > 0$ (en particulier si M est fermé et $x_0 \notin M$), alors, il existe $f \in E^*$ tel que $\|f\| = 1$, $f(M) = 0$ et $f(x_0) = d$.

(2) Si $x_0 \neq 0$, alors il existe $f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.

(3) E^* **sépare les points** *de E*
(c'est à dire, si $x, y \in E$, $x \neq y$ alors il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq f(y)$).

(4) Si $x_0 \in E$, tel que $\forall f \in E^*$, $f(x_0) = 0$ alors $x_0 = 0$.

Remarque 4.2.7 *Le Théorème précédent (2), implique que :*

$$\text{si un espace normé } E \neq \{0\} \text{ alors } E^* \neq \{0\}.$$

Attention *cette affirmation n'est plus vraie si E n'est pas un espace normé.*
Exemple : *Si $E = L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, muni de la distance $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt$, alors E est un espace métrique complet, $E \neq \{0\}$ par contre $E^* = \{0\}$.*

Exercice 4.1 **Montrer que si $0 < p < 1$ et $E = L^p([0,1])$, alors $E^* = \{0\}$.**

Solution *Soit $\varphi \in E^*$. Alors $\varphi : L^p([0,1]) \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue.*
Supposons que $\varphi \neq 0$.
On a alors que $Im(\varphi) = \mathbb{R}$. Donc il existe $f_0 \in E$ telle que $|\varphi(f_0)| \geq 1$.
Soit $F(x) = \int_0^x |f_0(t)|^p dt$ alors F est continue.
Puisque $\frac{1}{2}F(1) \in [0, F(1)]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $F(x_0) = \frac{1}{2}F(1)$ c'est à dire

$$\int_0^{x_0} |f_0(t)|^p dt = \frac{1}{2}\int_0^1 |f_0(t)|^p dt > 0$$

Soit $g_1 = f_0 \chi_{[0,x_0]}$ et $g_2 = f_0 \chi_{]x_0,1]}$. Alors $g_1 + g_2 = f_0$ et $|f_0|^p = |g_1|^p + |g_2|^p$, et de plus on a :

$$\int_0^1 |g_1(t)|^p dt = \int_0^{x_0} |f_0(t)|^p dt = \frac{1}{2}\int_0^1 |f_0(t)|^p dt$$

et donc

$$\int_0^1 |g_2(t)|^p dt = \frac{1}{2}\int_0^1 |f_0(t)|^p dt.$$

Puisque $|\varphi(f_0)| \geq 1$ *alors* $|\varphi(g_1)| \geq \frac{1}{2}$ *ou* $|\varphi(g_2)| \geq \frac{1}{2}$.
En effet, si $|\varphi(g_1)| < \frac{1}{2}$ *et* $|\varphi(g_2)| < \frac{1}{2}$ *alors*

$$1 \leq |\varphi(f_0)| = |\varphi(g_1) + \varphi(g_2)| \leq |\varphi(g_1)| + |\varphi(g_2)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ce qui est donc absurde.

Supposons donc que $|\varphi(g_1)| \geq \frac{1}{2}$ *et posons* $f_1 = 2g_1$. *On a alors* $|\varphi(f_1)| \geq 1$ *et de plus*

$$\int_0^1 |f_1(t)|^p dt = 2^p \int_0^1 |g_1(t)|^p dt = 2^{p-1} \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

De la même façon, par itération, on construit $f_n \in E$ *telle que*

$$|\varphi(f_n)| \geq 1 \text{ et } d(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)|^p dt = (2^{p-1})^n \int_0^1 |f_0(t)^p| dt$$

De plus comme $p < 1$ *on a alors* $2^{p-1} < 1$. *On en déduit donc que*

$$\lim_{n \to +\infty} d(f_n, 0) = 0$$

De plus φ *est continue donc*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(f_n) = 0$$

Ce qui est absurde car $|\varphi(f_n)| \geq 1$.
Donc $\varphi = 0$. *Par conséquent* $(L^p([0,1]))^* = \{0\}$.

Remarque 4.2.8 *D'autres remarques concernant l'espace* $E = L^p[0,1], \ \ 0 < p < 1$ *;*

(1) Les seuls ouverts convexes de E *sont le vide et* E *;*

(2) tous les hyperplans de $L^p[0,1], \ \ 0 < p < 1$ *sont denses.*

Corollaire 4.2.9 **(Base duale)**

Soit $\{x_1 ... x_n\}$ *une famille libre de* E, *alors il existe* $f_1 ... f_n$ *dans* E^* *tels que* $f_j(x_k) = \delta_{jk}, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n$.
Et de plus, si $x \in vect(x_1 ... x_n)$ *alors* $x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j$.

Corollaire 4.2.10 *Tout sous-espace de dimension finie de* E *admet un supplément topologique dans* E.
Autrement dit : Si M *est un sous-espace de* E *avec* $dim M < \infty$ *(donc fermé), alors* $\exists W$ *sous-espace fermé de* E *tel que* $E = M \oplus W$.

Corollaire 4.2.11 *Pour tout $x \in E$, on a :*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|;\ f \in E^* \text{ et } \|f\| \leq 1\}.$$

Remarque 4.2.12 *Soit E un espace normé et M un sous-espace de E. Nous dirons que $F : E \to \mathbb{K}$ forme linéaire continue est une extention (ou prolongement) Hahn-Banach de $f : M \to \mathbb{K}$ forme linéaire continue si $F_{|M} = f$ et $\|F\| = \|f\|$. Alors, cette extention, en général, n'est pas unique. Par contre elle est unique dans le cas des espaces de Hilbert. Comme le montre les Exercices suivants.*

Exercice 4.2 *(1) Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$ et $M = \{(x_n)_n \in E;\ \ x_{2n+1} = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.*
Montrer que toute forme linéaire continue sur M admet une infinité d'extention Hahn-Banach sur E.
(2) Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ et $M = c_0(\mathbb{N})$. Alors $c_0(\mathbb{N})$ est sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ pour la norme $\|.\|_\infty$.
Montrer que toute forme linéaire continue sur $c_0(\mathbb{N})$ admet une unique d'extention Hahn-Banach sur $\ell^1(\mathbb{N})$.
(3) Soit E un espace normé et M un sous-espace de E. Soit $f : M \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Supposons qu'il existe F_1, F_2 deux extentions Hanh-Banach de f.
Montrer que $\forall t \in [0,1],\ \ F_t = tF_1 + (1-t)F_2$ est aussi une extention Hahn-Banach de f. Autrement dit l'ensemble des extentions Hahn-Banach de f forme un convexe dans E^*.

4.3 Formes géométriques du Théorème de Hahn-Banach

Définition 4.3.1 *Soit H un sous-espace vectoriel de E, on dira que H est un* **hyperplan** *si $codim(H) = 1$.*
Où $codim(H) = dim(E/H)$.

Remarque 4.3.2 *H est un hyperplan si et seulement si $\exists a \notin H$ tel que $E = H \oplus vect\{a\}$.*

Théorème 4.3.3 *Soit E un espace vectoriel normé. Alors :*
(1) H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire f, non identiquement nulle, telle que $H = \{x \in E;\ f(x) = 0\} = f^{-1}(0) = ker(f)$ (noyau de f).
(2) Un hyperplan H est ou bien fermé ou bien dense dans E.
(3) Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 4.3 *En utilisant l'Exemple 3.2.6, montrer que si on note* $\Lambda = \{f \in C([0,1]);\ \ f(1) = 0\}$*, alors*

(a) Λ *est fermé dans* $C([0,1])$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *;*

(b) Λ *est dense dans* $L^p([0,1]), \quad 1 \leq p < \infty$.

Exercice 4.4 *Montrer que* $c_0(\mathbb{N})$ *est un hyperplan fermé de* $c(\mathbb{N})$*, l'espace des suites convergents.*

Définition 4.3.4 *Un* **hyperplan affine** *est le translaté d'un hyperplan. Une* **forme affine** *est la translatée d'une forme linéaire.*

Remarque 4.3.5 *H est un hyperplan affine si et seulement si il existe une forme linéaire f et il existe* $c \in \mathbb{K}$ *tel que :*

$$H = \{x \in E;\ f(x) = c\}.$$

Définition 4.3.6 *Soit E un espace vectoriel et A un ensemble de E.*

A est dit **convexe** *si* $\forall x, y \in A,\ \ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A$

A est dit **équilibré** *si* $\forall x \in A,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\ \ \lambda x \in A$.

Théorème 4.3.7 **(1$^{\text{ère}}$ forme géométrique de Hahn-Banach)**

Soit E un espace vectoriel réel normé, A un ouvert convexe non vide, B un convexe non vide tel que $A \cap B = \varnothing$*. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$A \subset \{x \in E;\ f(x) < \alpha\} \quad \text{et} \quad B \subset \{x \in E;\ f(x) \geq \alpha\}.$$

Dans ce cas, on dit que f sépare au sens large A et B.

Corollaire 4.3.8 *Soit E un espace vectoriel complexe normé, A un ouvert convexe équilibré non vide, B un convexe non vide tel que* $A \cap B = \varnothing$*. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E et* $\alpha > 0$ *tels que*

$$A \subset \{x \in E;\ |f(x)| < \alpha\} \quad \text{et} \quad B \subset \{x \in E;\ |f(x)| \geq \alpha\}.$$

Théorème 4.3.9 **(2$^{\text{ème}}$ forme géométrique de Hahn-Banach)**

Soit E un espace vectoriel normé réel (resp. complexe). Soit A et B deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé (resp. équilibré) et que B est compact. Alors il existe une forme linéaire continue sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ *(resp.* $\alpha > 0$*) et* $\varepsilon > 0$ *tels que*

$$A \subset \{x \in E;\ f(x) \leq \alpha - \varepsilon\} \quad \text{et} \quad B \subset \{x \in E;\ f(x) \geq \alpha + \varepsilon\}.$$

$$(\text{resp. } A \subset \{x \in E;\ |f(x)| \leq \alpha - \varepsilon\} \quad \text{et} \quad B \subset \{x \in E;\ |f(x)| \geq \alpha + \varepsilon\}).$$

Dans ce cas on dit que f sépare au sens strict A et B.

Remarque 4.3.10 *Dans les Théorèmes 4.3.7 et 4.3.9 ainsi que le Corollaire 4.3.8, les hypothèses sur A et B sont optimales, comme le montre l'exercice suivant*

Exercice 4.5 *Soit $E = \mathcal{P}$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$, muni le la norme du sup sur $[0,1]$.Soit*

$$\mathcal{P}_+ = \{P \in E;\ \ P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i, \quad avec \quad a_n > 0\};$$

et

$$\mathcal{P}_- = \{P \in E;\ \ P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i, \quad avec \quad a_n < 0\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$ sont convexes et disjoints.
(2) Montrer qu'il n'existe pas d'hyperplan qui sépare $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$.

Solution. *(1) facile à vérifier.*
(2) Supposons qu'il existe $f \in E^*$ non nulle et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(P) \geq c \geq f(Q); \quad \forall\ P \in \mathcal{P}_+ \ \ et\ \forall\ Q \in \mathcal{P}_-$$

Soit $P_0(X) = 1 \in \mathcal{P}_+$, et $a = f(P_0)$, alors

$$\forall \alpha > 0,\ \ f(\alpha P_0) = \alpha a \geq c \geq f(-\alpha P_0) = -\alpha a.$$

D'où $c = 0$. D'autre part, $\forall t \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ P_n(X) = X^{n+1} - tX^n \in \mathcal{P}_+$. Donc $f(P_n) = f(X^{n+1}) - tf(X^n) \geq 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, $f(X^n) = 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ et donc $f(P) = 0,\ \ \forall P \in \mathcal{P}$. Contradiction car $f \neq 0$.

4.4 Espace dual

Définition 4.4.1 *Soit E un espace normé. On apelle le* **dual topologique** *de E, l'espace $L(E, \mathbb{K})$ et sera noté E^*, i.e.*

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{K},\ linéaire\ et\ continue\}$$

Remarque 4.4.2 *Puisque $L(E,F)$ est complet si F est complet et comme $\mathbb{K}$ est complet, E^* est toujours complet même si E est seulement un espace normé.*

Définition 4.4.3 *Considérons le dual de E^* : $(E^*)^* = E^{**} = L(E^*, \mathbb{K})$. E^{**} est appelé le* **bidual** *de E.*

Il existe une injection naturelle de E dans son bidual : $\Phi : E \to E^{**}$ *tel que* $\Phi(x) = \varphi_x = \delta_x$*, c'est à dire :* $\forall f \in E^*,\ \varphi_x(f) = f(x)$

Théorème 4.4.4 *L'application linéaire Φ définie ci-dessus est une isométrie, c'est à dire, $\|\Phi(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in E$. En particulier, Φ est injective et continue.*
De plus, si E est complet alors Φ est à image fermée.

Remarque 4.4.5 *(1) On identifit E est son image par Φ dans E^{**}. Autrement dit on regarde $x \in E$ comme une forme linéaire continue sur E^*. Plus précisement :*

$$x : E^* \to \mathbb{K}, \quad x(f) = f(x), \quad f \in E^*.$$

Donc, E sera considèré comme un sous-espace vectoriel de E^{**}.

(2) En général Φ n'est pas surjectif (dans ce cas $E \neq E^{**}$). En effet, si par exemple, E n'est pas complet alors Φ ne peut pas être surjectif.
D'où la définition suivante :

Définition 4.4.6 *Si $E = E^{**}$, alors on dit que E est* **réflexif**.

Remarque 4.4.7 *Un espace réflexif est forcement complet.*

Exemple 4.4.8 *(1) Tous les espaces $L^p(\Omega)$ et $\ell^p(\mathbb{N})$ (pour $1 < p < +\infty$) sont réflexifs et on a :*

$$(L^p)^* = L^q \quad \textit{et} \quad (\ell^p)^* = \ell^q \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(2) Les espaces L^1, ℓ^1, L^∞ et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs et on a :

$$(\ell^1)^* = \ell^\infty, \ \ (L^1)^* = L^\infty.$$

Soit $c_0 = \{x \in \ell^\infty;\ x_n \to 0\}$, $(c_0)^* = \ell^1$ *donc* $(c_0)^{**} = \ell^\infty$ *mais* $(\ell^\infty)^{**} \neq \ell^\infty$.

Exercice 4.6 *(1) Montrer que l'injection $\Phi : \ell^1 \hookrightarrow (\ell^\infty)^*$ n'est pas surjective.*

(2) En déduire que ℓ^1 n'est pas réflexif.

Solution *(1) Si $a = (a_n)_n \in \ell^1$ et $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ alors $\Phi(a)(x) = \sum_n a_n x_n \in \mathbb{K}$. On a, c est un sous-espace de ℓ^∞. Soit la forme linéaire $f_0 : c \to \mathbb{K}$ définie par $f_0((x_n)_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Alors f_0 est continue et on a $\|f_0\| = 1$. Par le Théorème de Hahn-Banach, $\exists f : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ continue tel que $f_{|c} = f_0$. Soit*

$$(x_k^n)_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ 1 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Alors $\forall n \geq 1,\ \lim_k x_k^n = 1$. *D'où* $\forall n \geq 1,\ f((x_k^n)_k) = 1$. *D'autre part,*

$$\forall a = (a_n)_n \in \ell^1,\ \ \Phi(a)((x_k^n)_k) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i \to 0, \quad quad\ \ n \to +\infty.$$

Par conséquent, $\forall a \in \ell^1,\ f \neq \Phi(a)$ *et donc* $f \notin Im(\Phi)$ *et* Φ *n'est pas surjective.*

(2) Conséquence directe de (1), puisque $\ell^1 \subsetneqq (\ell^\infty)^* = (\ell^1)^{**}$.

Théorème 4.4.9 *Tout espace normé admet un* **complété**, *c'est à dire il existe un espace complet* $\hat{E}$ *tel que* $E \subset \hat{E}$ *et* E *dense dans* $\hat{E}$.
(voir Chapitre 1 Théorème 1.2.8)

Remarque 4.4.10 *Si on considère* $E = C[0.1]$ *munit de la norme* $\|.\|_p$ *avec* $p \geq 1$ *alors son complété est* $L^p[0,1]$.

Définition 4.4.11 *Un espace normé E est dit* **séparable** *si il existe une suite* $(x_n)_n \subset E$ *dense dans E.*

Proposition 4.4.12 *Soit E un espace normé. Alors*
E est séparable si et seulement si $\exists\ (x_n)_n$ *une suite dans E tel que* $vect\{x_n;\ \ n \in \mathbb{N}\}$ *est dense dans E.*

Remarque 4.4.13 *(1)* $c_0, \ell^p, \quad 1 \leq p < +\infty$, *sont séparables.*
Montrons que c_0, $\|.\|_\infty$ *est séparable. Soit* $x = (x_n)_n \in c_0$ *et* $e_n = (\delta_{kn})_k \in c_0$ *alors* $\|x - \sum_{j=1}^n x_j e_j\|_\infty = \sup_{j \geq n}\{|x_{j+1}|\} \to 0$ *quad* $n \to +\infty$.

Pour ℓ^p, *on a* $\|x - \sum_{j=1}^n x_j e_j\|_p^p = \sum_{j \geq n+1} |x_j|^p \to 0$ *quad* $n \to +\infty$.

(2) ℓ^∞ *n'est pas séparable.*
En effet, soit $x^n = (x_1^n, x_2^n, ...)$ *une suites d'éléments de* ℓ^∞. *Définissons la suite* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ *par*

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_k^k| \geq 1 \\ 1 + |x_k^k| & \text{si } |x_k^k| < 1 \end{cases}$$

Alors la suite $\alpha \in \ell^\infty$ *et on a,* $\|\alpha - x^n\| \geq 1$.

Théorème 4.4.14 *Soit E un espace normé. Alors :*
si E^* *est séparable alors E est séparable.*

Pour la démonstration du Théorème, on a besoin du Lemme suivant :

Lemma 4.4.15 *Soit* $f \in E^*$. *Alors il existe* $x \in E$ *tel que* $\|x\| = 1$ *et* $|f(x)| \geq \frac{1}{2}\|f\|$.

Remarque 4.4.16 *(1)* **Attention.** *La réciproque du Théorème précédent est fausse !*
En effet, ℓ^1 *est séparable mais son dual* $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ *n'est pas séparable.*
(2) Comme conséquence du Théorème précédent, on a $(\ell^\infty)^* \neq \ell^1$.

Exercice 4.7 *Soit* E, F *deux espaces normés.*
Montrer que $L(E,F)$ *est complet si et seulement si* F *est complet.*

Solution. *Si* F *est complet alors* $L(E,F)$ *est complet (voir TD).*
Supposons que $L(E,F)$ *est complet et soit* $(y_n)_n$*, une suite de Cauchy dans* F.
Soit $x_0 \in E$ *tel que* $||x_0|| = 1$*. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe* $f \in E^*$ *tel que* $||f|| = 1 = f(x_0) = ||x_0||$.
On pose $T_n : E \to F$*, définie par* $T_n(x) = f(x)y_n$*. Alors* $T_n \in L(E,F)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *et de plus on a :*

$$||T_n - T_m|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||f(x)(y_n - y_m)|| = ||y_n - y_m|| \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)|$$

D'où $||T_n - T_m|| = ||y_n - y_m||$*. Donc la suite* $(T_n)_n$ *est une suite de Cauchy dans* $L(E,F)$*. Puisque* $L(E,F)$ *est de Banach, la suite* $(T_n)_n$ *converge vers* $T \in L(E,F)$*. Posons* $y = Tx_0$*. Alors*

$$||y_n - y|| = ||T_n(x_0) - T(x_0)|| = ||(T_n - T)x_0|| \leq ||T_n - T||.||x_0|| \to 0$$

D'où $||y_n - y|| \to 0$ *et donc la suite* $(y_n)_n$ *converge vers* y *dans* F.
Par conséquent F *est complet.*

Exercice 4.8 *Soit* E *un espace normé et* M *un sous-espace de* E.
Montrer que $\overline{M}$ *l'adhérence de* M *est donnée par :*

$$\overline{M} = \cap\{Ker(f);\ \ f \in E^* \ \text{ et } \ M \subset Ker(f)\}.$$

Exercice 4.9 *Soit* E *un espace normé et* M *un sous-espace de* E.
Montrer que M *est dense dans* E *si et seulement si* $\forall f \in E^*,\ f(M) = \{0\}$ *implique que* $f = 0$ *sur* E.

Exercice 4.10 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in L(E, \ell^1(\mathbb{N}))$ *surjective.*
(1) Montrer qu'il existe M *sous-espace fermé de* E *tel que* $T_{|M} = T : M \to \ell^1(\mathbb{N})$ *soit un isomorphisme.*
(On pourra utiliser le Théorème de l'application ouverte).
(2) Montrer que $Ker(T) \oplus M = E$.

Exercice 4.11 *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ et $S : E^* \to E^*$ deux applications linéaires (bien définies mais pas nécessairement continues). Supposons que*

$$\forall f \in E^*, \forall x \in E, \quad f(Tx) = (Sf)(x).$$

Montrer que T et S sont continues.
(On pourra utiliser le Théorème du graphe fermé).

Exercice 4.12 *Soit E un espace normé et $M \subset E$ sous espace fermé.*
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe $(f_n) \subset E^*$ tel que $M = \bigcap\limits_n ker(f_n)$;

(2) il existe $(g_n) \subset \left(E/_M\right)^*$ qui sépare les points de $E/_M$.

Solution. (1) $\Longrightarrow$ (2) *Supposons que $M = \bigcap\limits_n ker(f_n)$ alors $M \subset ker(f_n)$, pour tout n. Soit l'application $\widetilde{f_n} : E/_M \to \mathbb{K}$ définie par $\widetilde{f_n}(\widetilde{x}) = f_n(x)$. Alors $\widetilde{f_n}$ est bien définie. En effet si $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ alors $x - y \in M \subset ker(f_n)$ et donc $f_n(x) = f_n(y)$. D'autre part, si $\widetilde{x} \in E/_M$, on a alors $\forall y \in M$,*

$$|\widetilde{f_n}(\widetilde{x})| = |f_n(x+y)| \leq ||f_n||.||x+y||$$

Ce qui implique que :

$$|\widetilde{f_n}(\widetilde{x})| \leq ||f_n|| \inf\{||x+y||, y \in M\} = ||f_n||.N(\widetilde{x})$$

Donc $\widetilde{f_n}$ est continue.
De plus si $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$ alors $x - y \notin M$ donc il existe m tel que $x - y \notin ker(f_m)$.
On en déduit que $f_m(x) \neq f_m(y)$ donc finalement que $\widetilde{f_m}(\widetilde{x}) \neq \widetilde{f_m}(\widetilde{y})$.
Donc $g_n = \widetilde{f_m}$ convient.

(2) $\Longrightarrow$ (1) *supposons que il existe $(g_n) \subset \left(E/_M\right)^*$ qui sépare les points.*
Soit $\pi : E \to E/_M$ la surjection canonique. Posons $f_n = g_n \circ \pi$.
On a bien $f_n \in E^*$ et de plus : soit $x \in E$,
Si $x \in M$ alors $f_n(x) = g_n(\widetilde{x}) = g_n(\widetilde{0}) = 0$
Si $x \notin M$ alors $\pi(x) \neq \widetilde{0}$ donc il existe m tel que $g_m(\pi(x)) \neq g_m(\widetilde{0})$ c'est à dire, il existe m tel que $f_m(x) \neq 0$.
Donc $M = \bigcap\limits_n ker(f_n)$

Exercice 4.13 *Montrer que c est isomorphe à c_0*

Solution. *On note $l(x) = \lim\limits_n x_n$. Posons $T : c \to c_0$ défini par : $y = Tx$, avec $y_1 = l(x)$ et pour $n \geq 2$, $y_n = x_{n-1} - l(x)$.*
Comme $|l(x)| \leq ||x||$, $\forall x \in c$, $||Tx|| \leq 2||x||$.

Montrons que $||Tx|| \geq \frac{1}{2}||x||$.
Si $|l(x)| \geq \frac{1}{2}||x||$ *alors* $||Tx|| \geq |y_1| \geq \frac{1}{2}||x||$.
Si $|l(x)| \leq \frac{1}{2}||x||$ *alors* $||Tx|| \geq |y_{n+1}| = |x_n - l(x)| \geq |x_n| - |l(x)| \geq |x_n| - \frac{1}{2}||x||, \forall n$. *Donc pour tout* n, *on a* $||Tx|| + \frac{1}{2}|l(x)| \geq |x_n|$ *donc* $||Tx|| + \frac{1}{2}||x|| \geq ||x||$ *d'où* $||Tx|| \geq \frac{1}{2}||x||$.
Donc pour tout x, $||Tx|| \geq \frac{1}{2}||x||$. *On en déduit donc que* T *est injective à image fermée.*
Montrons que T *est surjective.*
Soit $y \in c_0$. *Posons* $x_n = y_1 + y_{n+1}$. *Alors* $(x_n) \in c$ *et* $Tx = y$.