TD de mécanique des solides N°4

(Dynamique du solide)

Exercice 1

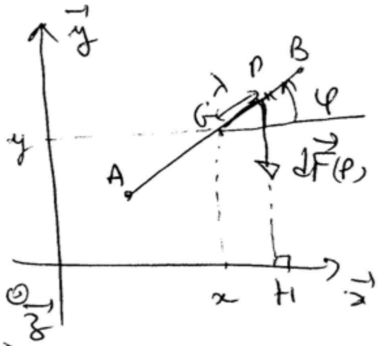
Une tige rectiligne homogène de masse m, de longueur $2a$, peut se déplacer sur une table horizontale fixe repérée par $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Chaque élément de la tige est attiré par la droite fixe $O\vec{x}$ suivant une force élémentaire $d\vec{F}$ proportionnelle à la masse dm de l'élément et à sa distance à la droite $O\vec{x}$.

On posera $\overrightarrow{OG} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

1) **Déterminer par ses éléments de réduction en G *le torseur des forces extérieurs* à la tige.**
2) **Écrire les équations du mouvement de la tige à l'aide des paramètres : (x, y, φ).**
3) **En déduire le mouvement de la tige dans le repère R.**

Correction exercice 1

tige $(m, 2a)$, $\overline{GP} = \lambda$



1°/ $\overrightarrow{dF}(P) = k\,\overrightarrow{PH}\,dm$, $k > 0$

$\overrightarrow{PH} = -(\lambda\sin\varphi + y)\,\vec{y}$

$dm = \frac{m}{2a}\,d\lambda$

$\rho_\ell = \frac{m}{\ell} = \frac{dm}{d\lambda}$, $\ell = 2a$

$\overrightarrow{dF}(P) = -k(y + \lambda\sin\varphi)\frac{m}{2a}\,d\lambda\,\vec{y}$

$\Rightarrow \vec{F} = \int_{P\in(AB)} \overrightarrow{dF}(P) = -\frac{km}{2a}\left[\int_{-a}^{a}(y + \lambda\sin\varphi)\,d\lambda\right]\vec{y}$

soit $\boxed{\vec{F} = -kmy\,\vec{y}}$

$$\vec{\mathcal{M}}_G \overset{Déf}{=} \int_{P\in AB} \vec{GP} \wedge d\vec{F}(P) = \int_{P\in AB} (\lambda\cos\varphi\,\vec{x} + \lambda\sin\varphi\,\vec{y}) \wedge d\vec{F}$$

$$= \left[-k\int_{-a}^{a} \frac{m}{2a}\lambda\cos\varphi\,(y + \lambda\sin\varphi)\,d\lambda\right]\vec{z}$$

$$= -\frac{km}{2a}\sin\varphi\cos\varphi\; 2\frac{a^3}{3}\,\vec{z}$$

or

$$(\lambda\cos\varphi\,\vec{x} + \lambda\sin\varphi\,\vec{y}) \wedge -\frac{km}{2a}(y + \lambda\sin\varphi)\,d\lambda\,\vec{y}$$

$$= -\frac{km}{2a}\left[\lambda\cos\varphi\,(y + \lambda\sin\varphi)\,d\lambda\right]\vec{z}$$

soit $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_G = -\frac{kma^2}{3}\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{z}} = -\frac{kma^2}{6}\sin 2\varphi$

2°) Théorème de la résultante

$$m\vec{\Gamma}(G) = \vec{F}$$

$$m(\ddot{x}\vec{x} + \ddot{y}\vec{y}) = -kmy\vec{y} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -kmy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} + ky = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \\ y(t) = a\cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad \omega^2 = k,\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

si $\dot{x} \neq 0$: $\quad t = \frac{x - x_0}{\dot{x}_0}, \quad y = a\cos\left(\frac{\omega x}{\dot{x}_0} - \beta\right)$

si $\dot{x}_0 = 0$: $\quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = a\cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$

Théorème du mt cinétique

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G(\mathcal{F}_e) \qquad \text{or } \vec{\sigma}_G(AB) = \frac{ma^2}{3}\dot{\varphi}\,\vec{z}$$

$$\Rightarrow \frac{ma^2}{3}\ddot{\varphi} = -\frac{kma^2}{3}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{k}{2}\sin 2\varphi = 0}$$

3°/ 1/ mvt oscillatoire périodique
2/ mvt révolutif : $\varphi \nearrow$ ou $\searrow$

Exercice 2

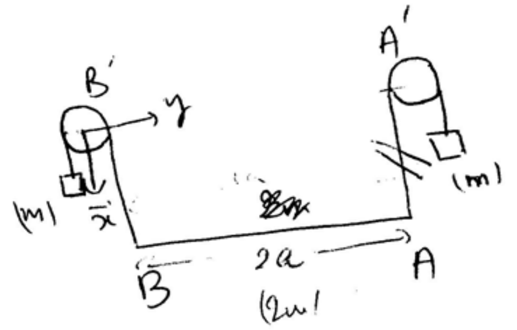
Une tige rectiligne, homogène AB de masse 2*m*, de longueur 2*a* est maintenue horizontale par deux fils inextensibles, sans masse, attachés en A et B en passant par deux polies libres A′ et B′ de masse négligeable, placées sur les verticales de A et B à la distance 2*a*.
À la seconde extrémité de chaque fil pend une masse *m*. Le fil AA′ est subitement sectionné.
α=($O\vec{x}$, $\overrightarrow{OB}$), β=($B\vec{x}$, $\overrightarrow{BA}$) et $\lambda = OB$.
On appellera *T* la tension du fil, et *g* l'accélération de la pesanteur.

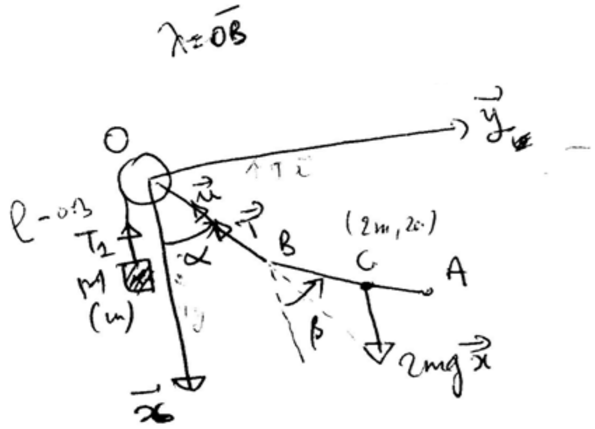
1) **Écrire le théorème de la résultante et celui du moment cinétique en *G* pour la barre AB.**
2) **Écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse *m*.**
3) **À l'aide des conditions initiales, calculer : $\ddot{\alpha}_0$, $\ddot{\beta}_0$, $\ddot{\lambda}_0$ et T_0.**
4) **En déduire la trajectoire de *G*, au voisinage de *t*=*0*, à l'ordre 4 près.**

Correction exercice 2

$OA = l \cdot \lambda$

$l = \lambda + OM$





$\overline{BM} = l = \overline{AM'}$

1°) <u>Effort ext à la barre AB</u>

$(G, 2mg\vec{x})$ glisseur poids de AB

$(B, \vec{T})$: glisseur tension du fil en B

$T > 0$

$\vec{T} = T\vec{u}$, $\vec{u} = \dfrac{-\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|} = \dfrac{\overrightarrow{BO}}{\|\overrightarrow{BO}\|}$

$\vec{T} = \vec{T_x} + \vec{T_y} = -T\sin\alpha\,\vec{y} - T\cos\alpha\,\vec{x}$

1°) <u>Théorème de la résultante</u>

$2m\,\vec{\Gamma}(G)_{/R_0} = 2mg\vec{x} + \vec{T}$

proj$/\overrightarrow{Ox_0}$: $\boxed{2m\ddot{x} = 2mg - T\cos\alpha}$ (1)

proj$/\overrightarrow{Oy}$: $\boxed{2m\ddot{y} = -T\sin\alpha}$ (2)

2°) Théorème du m$^{\text{t}}$ cinétique

$m_G(T) = m_B(T) + \vec{T}\wedge\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GB}\wedge\vec{T}$

$\dot{\vec{\sigma}}_G = \vec{M}_G(\text{Fe à AB})$

$\dfrac{d}{dt}\vec{J}(G)_{/R_0} = \vec{M}_G(\text{poids}) + \vec{M}_G(\text{tension}) = \overrightarrow{GB}\wedge\vec{T}$ (4)

$\vec{M}_G(\text{poids}) = 0$

$\vec{M}_G(\text{tension}) = \vec{M}_B + \overrightarrow{GB}\wedge\vec{T}$, $\vec{M}_B = 0$

or $\vec{\sigma}_{G\,AB} = \frac{(2m)a^2}{3}\dot{\beta}\,\vec{z}_0$, $\vec{\Omega}(AB/R_0) = \dot{\beta}\,\vec{z}_0$

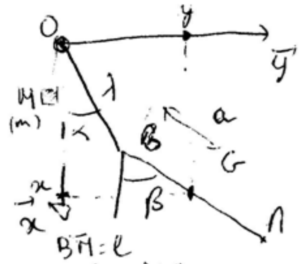
$$\vec{GB}\wedge\vec{T} = \begin{vmatrix} -a\cos\beta \\ -a\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} \wedge \begin{vmatrix} -T\cos\alpha \\ -T\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} = aT(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)\,\vec{z}_0 = aT\sin(\alpha-\beta)\,\vec{z}_0$$

(*) $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\Big/_{R_0} = \vec{GB}\wedge\vec{T}$

$\frac{2ma^2}{3}\ddot{\beta} = aT(\sin(\alpha-\beta))$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{2ma}{3}\ddot{\beta} = T\sin(\alpha-\beta)}$ (3)

paramètres α, β, λ

G : $\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda\cos\alpha + a\cos\beta \\ y = \lambda\sin\alpha + a\sin\beta \end{array}}$



BM = l
OB = λ(t)
OM = l − λ(t)

2°) Équation diff^{elle} du mvt de la masse m

$m\vec{\Gamma}_{/R_0}(M) = mg\vec{x} + \vec{T}_1$, $\vec{T}_1 = -T\vec{x}$

$\vec{OM} = (l-\lambda)\vec{x}$

$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = -\ddot{\lambda}\,\vec{x}_0$

OB = λ l = OB + OM

OM = l − λ

(λ = l + OM)

$\Rightarrow \boxed{-m\ddot{\lambda} = mg - T}$ (4)

3°) calcul de $\ddot{\alpha}_0$, $\ddot{\beta}_0$, $\ddot{\lambda}_0$ et T_0 à l'aide des cond initiales

CI $\begin{cases} \alpha_0 = \alpha(t=0) = 0 \\ \beta_0 = \pi/2 \\ \lambda_0 = 2a \end{cases}$ $\begin{array}{l} \dot{\alpha}_0 = 0 \\ \dot{\beta}_0 = 0 \\ \dot{\lambda}_0 = 0 \end{array}$ car le système est abandonné sans vitesse initiale.

(1) $2m\ddot{x}_0 = 2mg - T_0$

(2) $2m\ddot{y}_0 = 0$

(3) $\frac{2ma}{3}\ddot{\beta}_0 + T_0 = 0$

(4) $-m\ddot{\lambda}_0 = mg - T_0$

$x = \lambda\cos\alpha + a\cos\beta$

$\dot{x} = \dot{\lambda}\cos\alpha - \lambda\dot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\beta}\sin\beta$

$\ddot{x} = \ddot{\lambda}\cos\alpha - 2\dot{\lambda}\dot{\alpha}\sin\alpha - \lambda\ddot{\alpha}\sin\alpha - \lambda\dot{\alpha}^2\cos\alpha - a\ddot{\beta}\sin\beta - a\dot{\beta}^2\cos\beta$

$\boxed{\ddot{x}_0 = \ddot{\lambda}_0 - a\ddot{\beta}_0}$ (5)

$\boxed{\ddot{y}_0 = \lambda_0\ddot{\alpha}_0}$ (6)

(1) $\Rightarrow 2m\ddot{x}_0 = 2mg - T_0$

(3) $\Rightarrow 2ma\ddot{\beta}_0 = 3T_0$

(4) $\Rightarrow -2m\ddot{\lambda}_0 = 2mg - 2T_0$

Somme des 3 éq (1, 3, 4)

$\longrightarrow 2m\underbrace{(\ddot{x}_0 + a\ddot{\beta}_0 - \ddot{\lambda}_0)}_{0 \text{ (d'après (5))}} = -6T_0 + 4mg$

$\Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{2}{3}mg}$

$T_0 = \frac{2}{3}mg$, $\ddot{\beta}_0 = \frac{-g}{a}$, $\ddot{\alpha}_0 = 0$, $\ddot{\lambda} = \frac{-g}{3}$

$\ddot{x}_0 = \frac{2}{3}g$, $\ddot{y}_0 = 0$

4°) Trajectoire de G au voisinage de $t=0$ à l'ordre 4 près

dériver les équations (1), (2), (3) et (4) faire à l'instant

$t=0$ on trouve :

$\dddot{\alpha}_0 = \dddot{\beta}_0 = \dddot{\lambda}_0 = \dddot{x}_0 = \dddot{y}_0 = 0$, $\dot{T}_0 = 0$

au voisinage de $t=0$, dév de Taylor

$$\begin{cases} x = 2a + g\dfrac{t^2}{3} + o(t^4) \\ y = a + o(t^4) \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{g t^2}{2a} + o(t^4) \\ \alpha = 0 + o(t^4) \\ \lambda = 2a - \dfrac{g}{6}t^2 + o(t^4) \end{cases}$$

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + o(t^4)$$
$$= 2a + 0 + \frac{2}{3}g\frac{t^2}{2} + \dots$$

Exercice 3

Un cylindre de révolution C_1, creux, homogène, de masse M, de rayon R, peut tourner librement autour de son axe $O\vec{z}_0$, supposé horizontale. Soit θ, l'angle qui mesure la rotation de C_1 autour de son axe.
Un second cylindre C_2 de révolution, plein, pesant, homogène, de masse m, de rayon r ($r<R$), roule sans glisser à l'intérieur du premier cylindre.
Soit φ l'angle que fait la droite qui contient les axes des deux cylindres avec la verticale descendance, et soit ψ l'angle qui mesure la rotation du cylindre C_2 autour de son axe.
Les actions de C_2 sur C_1 sont schématisées par le glisseur (I, -$\overrightarrow{R}$).
On pourra poser $\overrightarrow{R} = T\vec{v} + N\vec{u}$ (T et N sont en valeurs algébriques). La liaison entre C_1 et son axe est supposée parfaite.

1) **Préciser les éléments de réduction en O, du torseur des actions sur C_1 de son axe $O\vec{z}_0$.**
2) **Traduire la condition de roulement sans glissement (équation E_1).**
3) **À l'aide du théorème de la résultante appliquée à C_2 en projection $\vec{v}$, écrire une équation (E_2) contenant T.**
4) **Écrire le théorème du moment cinétique en G, pour C_2, et obtenir une équation (E_3) pour T.**
5) **Écrire le théorème du moment cinétique en O, pour C_1, et déduire en projection sur $\vec{z}_0$ une équation (E_4)**
6) **Écrire une équation différentielle pour les variables θ, φ en utilisant (E_1), (E_2) et (E_3) en éliminant T.**
7) **Déduire de (E_1), (E_2) et (E_3) une équation différentielle ne contenant pas T.**
8) **Dans le cas de petits mouvements, calculer la période des variations périodiques de φ.**

   En déduire le mouvement de C_1. (Conditions initiales : $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = \omega$)

Correction exercice 3

Rappel Puissance des efforts ext.

$$\mathcal{P}_{/R_0}(\mathcal{F}_e) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{M\in S} \vec{V}(M) \cdot d\vec{F}(M) = \int_{M\in S} \vec{V}(M\in S)_{/R_0} \cdot \vec{f}(M)\, dm$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}e_{/R_0}) = [\mathcal{F}e][\mathcal{V}] = \begin{vmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}(A\in S)_{R_0} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{F}e_{/R_0}) = \underbrace{\vec{R} \cdot \vec{V}(A\in S_{/R_0})}_{\text{force}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{S/R_0} \cdot \vec{\mathcal{M}}(A)}_{\text{couple}}} \quad A\in(S)$$

* Glisseur $(I, \vec{R})$ on prendra $A = I$ $\quad \mathcal{P}(\mathcal{F}e_{/R_0}) = \vec{R} \cdot \vec{V}_{I/R_0}$

$\vec{\Omega} \cdot \vec{M}(I) = 0$

* Couple $\vec{C}$: $\quad \mathcal{P}(\mathcal{F}e_{/R_0}) = \vec{C} \cdot \vec{\Omega}$

$$\mathcal{T}(O\vec{z}_0 \to \mathcal{C}_1) = \begin{vmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(O) \end{vmatrix} \quad ? \text{ liaison parfaite}$$

$$\mathcal{P}(\text{eff de liaison})_{/R_0} = \mathcal{P}_{/R_0}(\mathcal{T}(O\vec{z}_0 \to \mathcal{C}_1)) + \mathcal{P}_{/R_0}\mathcal{T}(\mathcal{C}_1 \to O\vec{z}_0) = 0 \quad (E)$$

or $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1 \to O\vec{z}_0) = (\vec{0}, \vec{0})$ car $O\vec{z}_0$ est fixe $/R_0$ et immobile

$$\text{donc } \mathcal{P}_{/R_0}[\mathcal{T}(O\vec{z}_0 \to \mathcal{C}_1)] = \vec{R}_1 \cdot \vec{V}(O) + \vec{\Omega}_{\mathcal{C}_1/R_0} \cdot \vec{M}(O) = 0 \quad (E')$$

$$\begin{vmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(O) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{C}_1/R_0} \\ \vec{V}(O) \end{vmatrix}$$

$\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ $(I, \vec{R})$

Bilan des efforts : sur $\mathcal{C}_2$
- poids propre de $\mathcal{C}_2$
- action de $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$ en I $(I, \vec{R})$

$$\begin{cases} \text{pds propre de } \mathcal{C}_1 \\ \text{action de } O\vec{z}_0 \text{ sur } \mathcal{C}_1 \quad \mathcal{T}(O\vec{z}_0, \mathcal{C}_1) \left|\begin{matrix} \vec{R}_1 \\ \vec{m}(O) \end{matrix}\right._O \\ \text{action de } \mathcal{C}_2 \text{ sur } \mathcal{C}_1 \text{ en } I \ (I, -\vec{R}) \end{cases}$$

sur $\mathcal{C}_1$

$(E') = 0 = \vec{R}_1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\vec{V}(O)}} + \dot{\theta}\vec{z}_0 \cdot \vec{m}(O)$, or $\dot{\theta} \neq 0$ $\forall$ le mvt

$\Rightarrow \boxed{\vec{m}(O) \cdot \vec{z}_0 = 0}$

donc $\mathcal{T}_0 \ (O\vec{z}_0 \to \mathcal{C}_1) : \left| \begin{matrix} \vec{R} \text{ qque} \\ \vec{m}(O) \perp \text{ axe de rotation de } \mathcal{C}_1 \end{matrix}\right.$

20/ $(E_1) \Leftrightarrow \vec{V}_g(\mathcal{C}_{2/\mathcal{C}_1}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_{R_0}(I \in \mathcal{C}_1) = \vec{V}_{/R_0}(I \in \mathcal{C}_2)$

or $\theta = (\vec{Ox}_0, \vec{OM})$ $M \in \mathcal{C}_1$ $\vec{\Omega}_{\mathcal{C}_1/R_0} = \dot{\theta}\vec{z}_0$

$\varphi = (\vec{Gx}_0, \vec{GM'})$ $M' \in \mathcal{C}_2$ $\vec{\Omega}_{\mathcal{C}_2/R_0} = \dot{\varphi}\vec{z}_0$

$I \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow \vec{V}_{/R_0}(I \in \mathcal{C}_1) = \dfrac{d\vec{OI}}{dt}\Big/_{R_0} = R\dot{\theta}\vec{v}$

$I \in \mathcal{C}_2 \Rightarrow \underline{\vec{V}_{/R_0}(I \in \mathcal{C}_2) = \dfrac{d\vec{OG}}{dt} + \dfrac{d\vec{GI}}{dt}} = \vec{V}(G) + r\dot{\varphi}\vec{v}$

$\underline{\text{Cm}}$ $\quad \vec{V}_{/R_0}(I \in \mathcal{C}_2) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega}(\mathcal{C}_2/R_0) \wedge \vec{GI}$

$*)\ \vec{V}(G) = \dfrac{d\vec{OG}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R-r)\vec{u} = \underline{(R-r)\dot{\varphi}\vec{v}}$

$*)\ \vec{\Omega}(\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_1{}_{R_0}) \overset{déf}{=} \vec{\Omega}(\text{Rlie à } \mathcal{C}_2/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 = \vec{\Omega}_{\mathcal{C}_2/R_0}$

$*)\ \vec{GI} = r\vec{u}$ $\quad (*)\ \dfrac{d\vec{GI}}{dt}_{/R_0} = \dfrac{d}{dt} r\vec{u} = \underline{r\dot{\psi}\vec{v}}$

$$\vec{V}_{/R_0}(I \in \mathcal{C}_2) = (R-r)\dot{\varphi}\vec{v} + r\dot{\psi}\vec{v}$$

$$\vec{V}_{/R_0}(I \in \mathcal{C}_1) = \cancel{\vec{V}(O)} + \vec{\Omega}(\mathcal{C}_1/R_0) \wedge \vec{OI}$$

$$\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge R\vec{u} = R\dot{\theta}\vec{v}$$

donc $(E1) \Longleftrightarrow \boxed{R\dot{\theta} + (r-R)\dot{\varphi} - r\dot{\psi} = 0}$

3/ $\underline{\text{on isole } \mathcal{C}_2}$

$\vec{P}_2 = -mg\sin\varphi\,\vec{v} + mg\cos\varphi\,\vec{u}$

$\vec{R}_2 = \vec{R}(\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2) = \vec{R} = T\vec{v} + N\vec{u}$

$\underline{\text{TRC}} \Rightarrow m\vec{\gamma}_{/R_0}(G) = \sum \vec{F}$

$$m\vec{\gamma}(G)_{/R_0} = (mg\cos\varphi + N)\,\vec{u} + (T - mg\sin\varphi)\,\vec{v}$$

$$\vec{\gamma}(G)_{/R_0} = (R-r)\ddot{\varphi}\vec{v} - (R-r)\dot{\varphi}^2\vec{u}$$

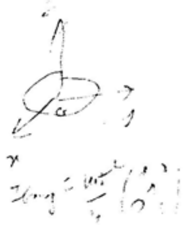
donc
$$\begin{cases} m(R-r)\ddot{\varphi} = T - mg\sin\varphi & (\vec{v}) \\ m(R-r)\dot{\varphi}^2 = -N - mg\cos\varphi & (\vec{u}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} E_2 & \boxed{m(R-r)\,\ddot{\varphi} = T - mg\sin\varphi} \\ E_2' & \boxed{m(R-r)\,\dot{\varphi}^2 = -N - mg\cos\varphi} \end{array}$$

4°/ Thé du m^t cinétique en G pour C.

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\Big/_{R_0} = \vec{M}_G(\Sigma\vec{F}) \qquad ; \quad \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{M}_I(\vec{R}) + \vec{R}\wedge\vec{IG} \quad + \vec{GI}\wedge\vec{R}$$



$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\Big/_{R_0} = \vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{GI}\wedge\vec{R} = r\vec{u}\wedge T\vec{v} = rT\vec{z}$$

$$\text{or } \vec{\sigma}_G = \underbrace{\frac{mr^2}{2}}_{C\ \text{plein}}\underbrace{\dot{\psi}\,\vec{z}_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = \frac{mr}{2}\ddot{\psi}} \quad (E_3)$$

5°/ $$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\Big/_{R_0} = \underbrace{\cancel{\vec{M}_O(\vec{P}_1)}}_{0} + \underbrace{\vec{M}_O(-\vec{R})}_{\vec{OI}\wedge-\vec{R}} + \underbrace{\cancel{\vec{M}_O(\vec{Oz})}}_{0}$$

$$= R\vec{u}\wedge(-T\vec{v} - N\vec{u}) = -RT\vec{z}_0$$

$$\vec{\sigma}_O = \underbrace{MR^2}_{\text{cylindre creux}}\dot{\theta}\,\vec{z}_0 \Rightarrow \boxed{T = -MR\ddot{\theta}} \quad (E_4)$$

6°/
$$\begin{array}{ll} (E_1) \to R\ddot{\theta} + (r-R)\ddot{\varphi} - r\ddot{\psi} = 0 \quad (1) & \xrightarrow{E_1 - E_2} R\ddot{\theta} + g\sin\varphi - \frac{T}{m} - r\ddot{\psi} = 0 \\ (E_2)\ (r-R)\ddot{\varphi} = g\sin\varphi - T/m \quad (2) & T/m = \frac{r}{2}\ddot{\psi} \\ (E_3)\ T = \frac{mr}{2}\ddot{\psi} & \end{array}$$

$f(\theta,\varphi)$

$$\Rightarrow \boxed{R\ddot{\theta} + g\sin\varphi - \frac{3}{2}r\ddot{\psi} = 0} \quad (1) \quad (*)$$

7°/ $\underline{E_3 \text{ et } E_4}$ $\quad \ddot{\psi} = -\frac{M}{m}\,\frac{2R}{r}\,\ddot{\theta} \quad (2)$

$$\frac{dE_1}{dt} \Rightarrow R\ddot{\theta} + (r-R)\ddot{\varphi} - r\ddot{\psi} = 0 \quad (3) \quad (**)$$

or (2) $\ddot{\psi} = -\frac{M}{m}\,\frac{2R}{r}\,\ddot{\theta} \quad \overset{(**)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} \quad R\ddot{\theta} + (r-R)\ddot{\varphi} + \frac{2M}{m}R\ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{2M+m}{m}\right)R\ddot{\theta} + (r-R)\ddot{\varphi} = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\left(\frac{2M+m}{m}\right)\frac{R}{r-R}\,\ddot{\theta}}$$

$\underset{\Longrightarrow}{\ddot{\psi} = \ldots}$ $\quad (*) \quad R\ddot{\theta} + g\sin\varphi + \cancel{\frac{3}{2}}\cancel{r}\,\frac{M}{m}\,\frac{2R}{\cancel{r}}\ddot{\theta}$

soit $\boxed{R\ddot{\theta}\left(1 + 3\frac{M}{m}\right) + g\sin\varphi = 0}$

8°/

E_1 : $R\dot{\theta} + (r-R)\dot{\varphi} - r\dot{\psi} = 0$

E_2 $\quad m(R-r)\ddot{\varphi} = T - mg\sin\varphi$

E_3 : $\quad T = \frac{mr}{2}\ddot{\psi}$

E_4 : $\quad T = -MR\ddot{\theta}$

2 eq diff.
var (θ, φ)

$\underline{E_2 \text{ et } E_4}$ $\quad \boxed{m(R-r)\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi - MR\ddot{\theta}} \quad (1)$

$\frac{dE_1}{dr}$: $R\ddot{\theta} + (r-R)\ddot{\varphi} - r\ddot{\psi} = 0$

$\Rightarrow r\ddot{\psi} = R\ddot{\theta} - (R-r)\ddot{\varphi}$

$E_1 E_3, E_4 \rightarrow m\,[R\ddot{\theta} - (R-r)\ddot{\varphi}] = -2MR\ddot{\theta}$

$\Leftrightarrow \boxed{(2M+m)R\ddot{\theta} - m(R-r)\ddot{\varphi} = 0}$ (2)

$\downarrow$

$R\ddot{\theta} = \frac{m(R-r)\ddot{\varphi}}{2M+m}$

(1) et (2) 2 eq diff couplés -

$(2) \rightarrow R\ddot{\theta} = m(R-r)\ddot{\varphi}/(2M+m)$

$(1) \rightarrow (R-r)(3M+m)\ddot{\varphi} + (2M+m)\,g\,\sin\varphi = 0$

pour les petits mvt $\sin\varphi \simeq \varphi \Rightarrow (R-r)(3M+m)\ddot{\varphi} + (2M+m)g\varphi = 0$

$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \qquad \omega^2 = (2M+m)g/(3M+m)(R-r)$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(3M+m)(R-r)}{(2M+m)g}}$

$\theta = A\varphi$
$\theta = A\varphi + \theta_0$
$\theta = A\varphi + \theta_0 t, \theta_0 = 0$

$\underline{\varphi(t) = A\cos(\omega t - \varphi)}$

$\underline{CI}$: $\varphi_0 = 0,\ \dot{\varphi}_0 = \omega,\ \theta_0 = 0,\ \dot{\theta}_0 = \omega$

$\underline{\text{Après calcul}}$: $\boxed{\varphi(t) = \sin\omega t}$, $\boxed{\theta(t) = \frac{m(R-r)}{(2M+m)R}\varphi(t) + Ct + D}$ le mvt de E_1 oscille en tournant

$C = \frac{2MR + mR}{(2M+m)R}$, $D = 0$