Travaux dirigés N°1 avec solution de mécanique des solides

(Les Torseurs)

Exercice 1

L'espace $\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{V}_t$, qui pour tout t réel fixé, associe à tout point P de $\mathbb{R}^3$ le vecteurs $\vec{V}_t(P)$ de composantes :

$$\begin{cases} X=1+3y-tz \\ Y=-3x+2tz \\ Z=-4/3+tx-t^2y \end{cases}$$

où (x,y,z) est le triplet de coordonnés de P.

1) **Pour quelles valeurs de t, $\vec{V}_t$ est-il un torseurs ?**
2) **Lorsque $\vec{V}_t$ est un torseur, calculer son vecteur et préciser si ce torseur est éventuellement un glisseur ou un couple.**
3) **Préciser le torseur $\tau = \tau_0 - \tau_2$, on notera τ_0 le torseur obtenu pour $t=0$ et τ_2 celui correspondant à la valeur $t=2$.**
4) **Déduire que la somme deux glisseurs n'est pas toujours un glisseurs.**

Correction exercice 1

on considère le champ de vecteurs $\vec{V}$, qui pour tout $t \in \mathbb{R}$, associe à tout point P de $\mathbb{R}^3$ le vecteur

$$\vec{V}(P) \left| \begin{array}{l} X = 1+3y-tz \\ Y = -3x+2tz \\ Z = -\frac{4}{3}+tx-t^2y \end{array} \right. , \quad P \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

1°) $t = ?$ $\vec{V}_t$ est-il un torseur

équiprojectivité du champ de vecteurs $\vec{V}_t$

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^3, \quad (\vec{V}(P)-\vec{V}(Q))\,\vec{PQ} = 0 \quad ; \quad P \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. , \quad Q \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 3(y'-y) - t(z'-z) \\ -3(x'-x) + 2t(z'-z) \\ t(x'-x) - t^2(y'-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = 0 \quad (E)$$

on pose $x'-x=\alpha$, $y'-y=\beta$, $z'-z=\gamma$

(E) : $\underline{3\alpha\beta} - \underline{t\alpha\gamma} - \underline{3\alpha\beta} + 2t\gamma\beta + \underline{t\alpha\gamma} - t^2\beta\gamma = 0$

$\Leftrightarrow (2t - t^2)\gamma\beta = 0 \Leftrightarrow t(2-t)\gamma\beta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ \text{ou} \\ t=2 \end{cases}$

$\underline{t=0}$ $\quad P \to \vec{V}_0(P) \left| \begin{array}{l} X = 1+3y \\ Y = -3x \\ Z = -4/3 \end{array} \right.$

$\underline{t=2}$ $\quad P \to \vec{V}_2(P) = \left| \begin{array}{l} X = 1+3y-2z \\ Y = -3x+4z \\ Z = -\frac{4}{3} + 2x - 4y \end{array} \right.$

autre méthode : $\vec{v}_t(P) = \vec{v}_t(0) + \mathcal{L}(\vec{OP}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y - tz \\ -3x + 2tz \\ tx - t^2 y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -t \\ -3 & 0 & 2t \\ t & -t^2 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{V}_t(P)$ est un torseur ssi $\mathcal{L}$ est antisymetrique

$\Rightarrow 2t = t^2 \Leftrightarrow \underline{t=0}$ ou $\underline{t=2}$

2°) Nature du torseur V_t :

$\vec{V}(P) = \vec{V}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}$, $\vec{R} \left| \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right.$, $\vec{OP} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$

a) $\vec{R}_0$ le vecteur de $\vec{V}_0$: $\vec{R}_0 \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} 3y \\ -3x \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} Yz - Zy \\ Zx - Xz \\ Xy - Yx \end{array} \right.$

par identification des termes on obtient $-Z = 3$, $X = Y = 0$

$\Rightarrow \vec{R}_0 = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -3 \end{array} \right.$

b) $\vec{R}_2$ le vecteur de $\vec{V}_2$: $\vec{R}_2 \wedge \vec{OP} = \left| \begin{array}{l} 3y - 2z \\ -3x + 4z \\ 2x - 4y \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} Yz - Zy \\ Zx - Xz \\ Xy - Yx \end{array} \right.$

identification des termes $\Rightarrow X = -4, Y = -2, Z = -3 \Rightarrow \vec{R}_2 = \left| \begin{array}{l} -4 \\ -2 \\ -3 \end{array} \right.$

<u>Calcul de l'Invariant scalaire</u> : $I = \vec{R}\,\vec{V}(O)$

* $I_0 = \vec{R}_0 \vec{V}_0(O) = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -3 \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ -4/3 \end{array} \right. = 4 \neq 0$

donc $\vec{V}_0$ ni couple ni glisseur ni torseur nul

* $I_2 = \vec{R}_2 \cdot \vec{V}_2(O) = \left| \begin{array}{l} -4 \\ -2 \\ -3 \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ -4/3 \end{array} \right. = -4 + 4 = 0$

donc $\vec{V}_2$ est un glisseur.

Equation de l'axe Δ du glisseur : $\Delta = \{ M \in \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{V}_2(M) = \vec{0} \}$

$\begin{cases} 1 + 3y - 2z = 0 \\ -3x + 4z = 0 \\ -\frac{4}{3} + 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 3y - 2z = 0 \\ z = \frac{3}{4} x \end{cases}$: ∩ de deux plans

AC∆ $\quad \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}_2 = (A, \vec{R}_2) \quad / \ \vec{V}_2(A) = \vec{0}$.

3°) $\tau = \tau_0 - \tau_2$

$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{V}(P) = (\vec{V}_0 - \vec{V}_2)(P) = \begin{pmatrix} 2z \\ -4z \\ -2x + 4y \end{pmatrix}$

$I = \vec{R} \cdot \vec{V}(O) = 0$ car $\vec{V}(O) = \vec{0}$

$\Rightarrow \tau$ est un glisseur $(O,$

Eq cartesienne de l'axe : $z = 0$, $x - 2y = 0$ $(\Leftarrow \vec{V}(P) = \vec{0})$

4°) $\tau_0 = \tau + \tau_2 = (O, \vec{R}) + (A, \vec{R}_2)$ et τ_0 n'est pas un glisseur

Exercice 2

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les cinq points suivants A(1 ,0, 0) ; B(0, 1, 1) ; C(1, 1, 0) ; D(1, 1, 1) et E(1, 0, 1).

Soient g_1, g_2, et g_3 les glisseurs associés aux vecteurs liés suivants $g_1(O, p\overrightarrow{OA})$; $g_2(B, q\overrightarrow{BD})$, et $g_3(C, r\overrightarrow{CE})$ où p, q et r appartiennent $\mathbb{R}$.

Soit $T = g_1 + g_2 + g_3$

1) **Calculer le moment en O de T ainsi que sa résultante R.**
2) **Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que T=0.**
3) **Calculer l'invariant scalaire I de T.**
4) **Si p+q=0 et r≠0, trouver l'axe central △ de T.**
   Donner une représentation cartésienne.
5) **Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un glisseur.**
6) **Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un couple.**

Correction exercice 2

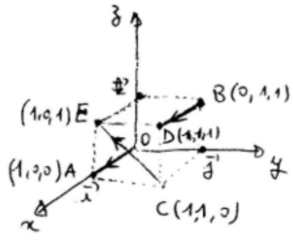
Exercice n°2

$g_1(O, p\overrightarrow{OA})$

$g_2(B, q\overrightarrow{BD})$

$g_3(C, r\overrightarrow{CE})$

$\tau = g_1 + g_2 + g_3$



1°) $\vec{V}(O)$ et $\vec{R}$

$\vec{V}(O) = \vec{V}_1(O) + \vec{V}_2(O) + \vec{V}_3(O)$

$\vec{V}_1(O) = \vec{0}$, $\vec{V}_2(O) = \cancel{\vec{V}_2(B)} + \overrightarrow{OB} \wedge q\overrightarrow{BD}$, $\vec{V}_3(O) = \cancel{\vec{V}_3(C)} + \overrightarrow{OC} \wedge r\overrightarrow{CE})$

$\Rightarrow \vec V(O) = \vec{OB}\wedge q\vec{BD} + \vec{OC}\wedge r\vec{CE}$

$$\left|\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}q\\0\\0\end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}0\\-r\\r\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}r\\q-r\\-q-r\end{matrix}\right.$$

$$\vec R = p\vec{OA} + q\vec{BD} + r\vec{CE} = \left|\begin{matrix}p+q\\-r\\r\end{matrix}\right.$$

2°) $\mathcal{T} = 0 \Leftrightarrow \vec R = \vec 0$ et $\vec V(O) = \vec 0 \Leftrightarrow p = q = r = 0$

3°) $I = \vec R\cdot\vec V(O) = r(p-q)$

4°) $p+q=0$ et $r \neq 0$, soit $\tilde\Delta$ l'axe central de $\mathcal{T}$

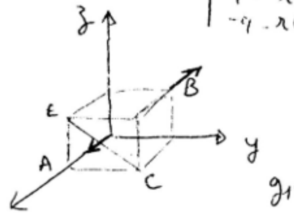
Déf. $\tilde\Delta = \{ m \in \mathbb{R}^3 / \vec{V}(m)\wedge\vec R = \vec 0 \}$ le champ et le vecteur sont colinéaires

$\mathcal{T} = g_1 + g_2 + g_3 \;\left|\begin{matrix}\vec R\\ \vec V(O)\end{matrix}\right.$

$$\vec V(m) = \vec V(O) + \vec R\wedge\vec{OM} = \left|\begin{matrix}r\\q-r\\-q-r\end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix}0\\-r\\r\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}r - rz - ry\\ q - r + rx\\ -q - r + xr\end{matrix}\right.$$

$$\vec V(m)\wedge\vec R = \vec 0 \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}r(1-z-y)\\ q - r(1-x)\\ -q-r(1-x)\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}0\\-r\\r\end{matrix}\right. = \vec 0 \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}-2r^2+2xr^2\\ -r^2(1-z-y)\\ -r^2(1-z-y)\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1-z-y = 0 \end{cases} \text{ droite EC}$$



$g_1 + g_2 =$ couple $\Rightarrow$ pas d'axe central !

5°) CNS pour que T soit un glisseur : $\underline{I = 0}$ et $\underline{R \neq 0}$ $\qquad I = r(p-q)$

$$\vec V(O) = \left|\begin{matrix}r\\q-r\\-q-r\end{matrix}\right. \qquad \vec R \left|\begin{matrix}p+q\\-r\\r\end{matrix}\right.$$

$I = 0 \Leftrightarrow r(p-q) = 0$

1°) $r = 0$ et $p+q \neq 0$

2°) $p = q \neq 0$

3°) $p = q = 0$, $r \neq 0$

6°) $\vec R = \vec 0$ et $\vec V(O) \neq \vec 0$ (condition pour que T soit un couple)

$p+q = 0$ et $r = 0$

$$\vec V(O) = \begin{pmatrix}0\\q\\-q\end{pmatrix}, \quad q \neq 0$$

5°) T Glisseur $I = 0$ et $\vec R \neq \vec 0$

$I_0 = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $p - q = 0 \Rightarrow \underline{r = 0}$ ou $\underline{p = q}$

$\underline{I_0 = r(p-q)}$ $\qquad \vec R = \left|\begin{matrix}p+q\\-r\\r\end{matrix}\right.$

$I = 0$
- $r = 0$, $p - q \neq 0$ $(p \neq q)$ $\qquad \vec R = \left|\begin{matrix}p+q\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\qquad p+q \neq 0$ $\;p \neq -q$ $\;p \neq 0$ ou $q \neq 0$
- $r \neq 0$, $p - q = 0$ $(p = q)$ $\qquad \vec R \left|\begin{matrix}2p\\r\\r\end{matrix}\right.$ $\qquad r \neq 0$ ou $p \neq 0$
- $r = 0$, $p - q = 0$ $\qquad R\left|\begin{matrix}2p\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\qquad \underline{p \neq 0}$

Exercice 3

Dans un repère euclidien $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs liés suivants :

$\vec{V}_1(1,0,-1)$ d'origine A(1,0,0),

$\vec{V}_2(1,2,2)$ d'origine B(0,1,0),

$\vec{V}_3(\lambda,\mu,\nu)$ d'origine C(0,0,1).

Soit $[T]$ la somme de ces glisseurs.

1) **Déterminer λ,μ,ν, pour que $[T]$ soit un couple et trouver son moment.**
2) **Quelle relation doit lier λ,μ,ν, pour que $[T]$ soit un glisseur ?**
   Déterminer λ,μ,ν pour que le support du glisseur $[T]$ passe par D(1/3,1,4/3).
3) **Dans le cas le ou $(\lambda,\mu,\nu)=(-2,0,-1)$, trouver les équations de l'axe central $[T]$.**
   Que peut-on dire de la direction de cet axe central ?

Correction exercice 3

Exercice n°3

On considère trois glisseurs définis par 3 vecteurs liés

$\vec{V}_1\ (1,0,-1)$ d'origine $A\ (1,0,0)$

$\vec{V}_2\ (1,2,2)$ " $B\ (0,1,0)$

$\vec{V}_3\ (\lambda,\mu,\nu)$ " $C\ (0,0,1)$

soit T la somme de ces glisseurs

1°) λ,μ,ν pour que T soit un couple

$$T = (A,\vec{V}_1) + (B,\vec{V}_2) + (C,\vec{V}_3)$$

éléments de réduction en O

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 2+\mu \\ 1+\nu \end{pmatrix}$$

$$\vec{m}(O) = \vec{m}_1(O) + \vec{m}_2(O) + \vec{m}_3(O)$$

or
$$\vec{m}_1(O) = \underset{=0}{\vec{m}_1(A)} + \vec{OA}\wedge\vec{V}_1$$
$$\vec{m}_2(O) = \underset{=0}{\vec{m}_2(B)} + \vec{OB}\wedge\vec{V}_2$$
$$\vec{m}_3(O) = \underset{=0}{\vec{m}_3(C)} + \vec{OC}\wedge\vec{V}_3$$

$$\Rightarrow \vec{m}(O) = \vec{OA}\wedge\vec{V}_1 + \vec{OB}\wedge\vec{V}_2 + \vec{OC}\wedge\vec{V}_3$$
$$= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\mu \\ 1+\lambda \\ -1 \end{vmatrix}$$

T couple ssi $R = 0 \iff \lambda = -2,\ \mu = -2$ et $\nu = -1$

$\vec{m}(M) = \vec{m}(N) = \vec{m}(O) \quad \forall M, N$

$\Rightarrow \vec{m}(M) = \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$

2°/ $I = 0,\ R \neq 0$

$$I = \vec{R}\cdot\vec{m}(O) = \begin{vmatrix} 2+\lambda \\ 2+\mu \\ 1+\nu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\mu \\ \lambda+1 \\ -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et } R \neq 0$$

$\iff 5 - \mu - \nu + 4\lambda = 0$ et $R \neq 0$

soit Δ l'axe du glisseur

$D \in \Delta \quad \vec{m}(D) = \vec{0}$

$\vec{m}(D) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OD}$

$$\vec{m}(D) = \begin{pmatrix} 2-\mu \\ 1+\lambda \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 2+\mu \\ 1+\nu \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\mu + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\mu - 1 - \nu \\ 1+\lambda + \frac{1}{3} + \mu/3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda \\ -1 + 2 + \lambda - \frac{2}{3} - \mu/3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m}(D) = 0 \iff \begin{pmatrix} \mu/3 - \nu + \frac{11}{3} \\ \nu/3 - \lambda/3 - \frac{4}{3} \\ \lambda - \mu/3 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mu = 3\lambda + 1 \\ \nu = \lambda + 4 \end{cases}$$

3°/ $(\lambda, \mu, \nu) = (-2, 0, -1)$

axe central de T

$\vec{m}(M) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OM}$

$M \ / \ \vec{m}(M) \wedge \vec{R} = 0$

$$\vec{m}(M) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2z \\ -1 \\ -1-2x \end{pmatrix}$$

$$\vec{m}(M) \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} 2(1+z) \\ -1 \\ -1-2x \end{bmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(1+2x) \\ 0 \\ 4(1+z) \end{vmatrix}$$

$\Delta = \left\{ x = -1/2,\ z = -1 \right\}, \quad \Delta \parallel O\vec{y}$

Exercice 4

Par rapport à un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $A(1,0,\alpha)$ et le torseur τ de résultante $\vec{R}(1,2,-1)$ et de moment en O $\vec{m}(O)=(\beta, 0, 1)$, α et β étant deux constantes.

1) **Quelle relation doivent vérifier α et β pour qu'il existe $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :**

   $\tau=(O,\vec{u})+(A,\vec{v})$

   Déterminer l'ensemble de ces torseurs.

2) **A quelle condition τ est-il un glisseur ? Déterminer son axe.**

   Quelle propriété possède cet axe par rapport aux axes $(O,\vec{u})$ et $(A,\vec{v})$ (lorsqu'ils existent).

Correction exercice 4

Exercice n°4

$$\tau = (O,\vec{u}) + (A,\vec{v})$$

$A(1,0,\alpha)$, $\tau \begin{vmatrix} \vec{R}(1,2,-1) \\ \vec{m}(O)=(\beta,0,1) \end{vmatrix}$ α, β deux constants

$\vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$ $\quad \mathcal{B}(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ base orthonormée

$\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{m}(O) = m_1(O) + m_2(O)$

or $\vec{m_2}(O) = \vec{m_2}(A) + \vec{OA} \wedge \vec{v}$

$\Rightarrow \underline{\vec{m}(O)} = \vec{m_1}(O) + \vec{m_2}(A) + \vec{OA} \wedge \vec{v} = \underline{\vec{OA} \wedge \vec{v}}$

$\vec{OA} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$ $\quad \Rightarrow \vec{OA} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha v_2 \\ \alpha v_1 - v_3 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ v_3 = \alpha v_1 \\ v_2 = 1 \end{cases}$$

$\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$ $\quad \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_3 + v_3 = -1 \end{cases}$

2°/ Cons de hors pour que $\mathcal{T}$ soit un glisseur

$I = \vec{m}.\vec{R} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta = 1$

$\Rightarrow \alpha = -1$

l'axe du glisseur $\Delta : \{ M \in \mathbb{R} / \vec{m}(M) = \vec{0} \}$

soit $A \in \Delta$; $\vec{m}(A) = \vec{m}(O) + \vec{AO} \wedge \vec{R}$

$\vec{m}(A) = 0 \Rightarrow \vec{m}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$

$\vec{m}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} -y - 2z = 1 \\ z + x = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x = -z \\ z = -x \\ y = 2x - 1 \end{vmatrix}$

$\Delta = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{cases} x + z = 0 \\ 1 + y - 2x = 0 \end{cases} \right\}$ et $\Delta = (A, \vec{R})$ avec $A \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

<u>propriété de l'axe Δ /</u> aux axes $O\vec{u}$ et $A\vec{v}$

Montrons que les axes sont coplanairs

$(\vec{OA}, \vec{u}, \vec{v})$ coplanairs ssi $(\vec{OA}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

$\mathcal{T} = [O, \vec{u}] + [A, \vec{v}]$

$\mathcal{T} = [O, \vec{u}] + [A, \vec{v}]$

$\begin{cases} \vec{R} = \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{M}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{v} \end{cases}$

$\mathcal{T}$ est un glisseur si $\vec{R} \cdot \vec{M}(O) = 0$

$\Rightarrow (\vec{u} + \vec{v})(\vec{OA} \wedge \vec{v}) = 0$

$\Rightarrow \vec{u}(\vec{OA} \wedge \vec{v}) + \underbrace{\vec{v}(\vec{OA} \wedge \vec{v})}_{0} = 0$

$\Rightarrow \vec{u}(\vec{OA} \wedge \vec{v}) = 0 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{OA}, \vec{v}) = 0$

donc $\vec{u}$, $\vec{OA}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

Exercice 5

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à un repère orthonormé direct R(O,$\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$), a, b et c sont des paramètres réelles. On donne les trois vecteurs liés (ou pointeurs) ; $\vec{R}_1 = a\vec{x} + b\vec{y}$ d'origine A(1,0,0), $\vec{R}_2 = \vec{y}$ d'origine B(1,1,0) ; $\vec{R}_3 = c\vec{x}$ d'origine C(0,0,1). On leur associe respectivement les glisseurs G_1, G_2, G_3.

1) **Montrer que $G_1 + G_2$ est un glisseur ou un torseur nul.**

   Dans le cas où $G_1 + G_2$ est un glisseur déterminer son axe.

2) **On notera T=[$\vec{R}$, $\vec{H}$], le torseur T=G_1+ G_2+G_3**

   (a) **Déterminer $\vec{H}(x,y,z)$.**

   (b) **Préciser le cas ou T est un couple non réduit à un torseur nul ; illustrer ces cas par un schéma.**

   (c) **Lorsque T n'est pas un couple ni un torseur nul, écrire les équations définissant son axe central.**