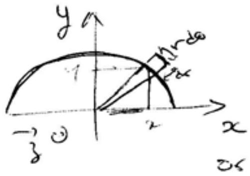
TD de mécanique des solides N°3

(Cinétique du solide)

Exercice 1

Déterminer le centre d'inertie *G* d'un demi-disque de rayon *R* et de masse *m*.

Correction exercice 1



$$m\vec{OG} = \int_{P\in S} \vec{OP}\,dm$$

or $dm = \rho_s\,dx\,dy$ et $\rho_s = cte = \frac{m}{S} = \frac{2m}{\pi R^2}$

$$mG_x = \rho_s \iint_S x\,dx\,dy = \rho_s \int_{-R}^{+R} x \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \dots$$

$$mG_y = \rho_s \iint y\,dx\,dy = \dots \qquad \int_{-R}^{+R} x\sqrt{R^2-x^2}$$

Si on prend les coordonnées polaires

$$mG_x = \rho_s \iint_D \underbrace{x}_{r\cos\theta}\, r\,dr\,d\theta = \rho_s \iint_D r^2\cos\theta\,dr\,d\theta \quad (r \text{ et } \theta \text{ indépendant})$$

$$= \rho_s \int_0^R r^2\,dr \int_0^\pi \cos\theta\,d\theta = \rho_s \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \cancel{\left[\sin\theta\right]_0^\pi}$$

$$\boxed{mG_x = 0}$$

$$mG_y = \rho_s \iint_D r\sin\theta \; r\,dr\,d\theta = \rho_s \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta$$

$$mG_y = \rho_s \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \rho_s \frac{R^3}{3}\left[1+1\right] = \frac{2}{3}\rho_s R^3 = \frac{2}{3}\frac{2m}{\pi R^2} R^3$$

$$= \frac{4}{3\pi} Rm$$

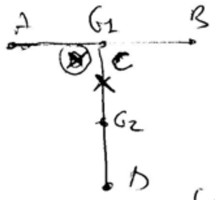
$$\Rightarrow \boxed{G_y = \frac{4R}{3\pi}}$$

Exercice 2

On considère un solide (S) ayant la forme de la lettre T formé de deux barres homogènes identiques AB et CD, la deuxième étant soudée en C au milieu de AB et orthogonale à AB. On donne la longueur commune des deux barres *l* et de masse *m*.

1) **Déterminer le centre d'inertie *G* de (S).**
2) **Déterminer la matrice d'inertie en *G* dans le repère central d'inertie à préciser.**

Correction exercice 2



1/ pour une réunion finie de solides (S_i) de masses $(m_i, \ldots)$ G_i

$$\sum_i m_i \vec{OG} = \sum m_i \vec{OG_i}$$

$$(m_1+m_2)\vec{OG} = m_1 \vec{OG_1} + m_2 \vec{OG_2}$$

or $m_1 = m_2$ et $AB = CD = l$

$m_1\vec{OG_1} + m_2\vec{OG_2}$

$$2m\vec{OG} = m\vec{OG_1} + m\vec{OG_2}$$

prenons $O \equiv C$ $\rightarrow$ $2m\vec{CG} = m\cancel{\vec{CG_1}} + m\vec{CG_2}$
$C \equiv G_1$

$\Rightarrow \vec{CG} = \frac{\vec{CD}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\vec{CD}}{4}$

2°/ matrice d'inertie en G ds le repère central d'inertie

on définit l'application linéaire $I(O) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
$\vec{u} \rightarrow I(O)\vec{u} = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP})\, dm$

$I(O)$ linéaire symétrique $\rightarrow$ matrice symétrique ds une base orthonormée en O

$$I(O) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(O\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = R}$$

$A = I/_{Ox} = \int (y^2+z^2)\, dm$ $\quad F = \int xy\, dm$

$B = I/_{Oy} = \int (x^2+z^2)\, dm$ $\quad E = \int xz\, dm$

$C = I/_{Oz} = \int (x^2+y^2)\, dm$ $\quad D = \int yz\, dm$

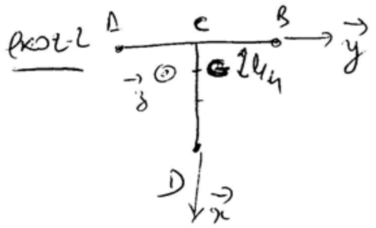
Repère principal d'inertie

$I(O)$ symétrique $\Rightarrow \exists$ base orthonormée $\rightarrow I(O)$ diagonalisable

$$I(O) = \begin{pmatrix} I/_{O\vec{X}} & & 0 \\ & I/_{O\vec{Y}} & \\ 0 & & I/_{O\vec{Z}} \end{pmatrix}_{R'}$$

$R' = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ repère d'inertie

NB : le repère d'inertie est un repère de symétrie géométrique



(m, l)

il y a symétrie de révolution $/G\vec x$

$\rightarrow$ repère ppal d'inertie $R_p(G, \vec x, \vec y, \vec z)$

$$I_G(\text{système}) = \begin{pmatrix} I_{/G\vec x} & & 0 \\ & I_{/G\vec y} & \\ 0 & & I_{/G\vec z} \end{pmatrix}_{(G, \vec x, \vec y, \vec z)}$$

solide plan $\Rightarrow$ $\underline{z = 0}$ $\Rightarrow$ $\underline{I_{/G\vec z} = I_{/G\vec x} + I_{/G\vec y}}$

$\rightarrow$ $I_{/G\vec x}(AB \cup CD) = I_{/G\vec x}(AB) + I_{/G\vec x}(CD)$

$\rightarrow$ $I_{/G\vec x}(AB \cup CD) = I_{/G\vec x}(AB) + I_{/G\vec x}(CD)$

$I_{/G\vec x}(CD) = 0$, $I_{/G\vec x}(AB) = I_{/C\vec x}(AB) = \dfrac{m(l/2)^2}{3} = \dfrac{ml^2}{12}$

$\rightarrow$ $I_{/G\vec y}(AB \cup CD) = I_{/G\vec y}(AB) + I_{/G\vec y}(CD)$

$\dfrac{ml^2}{12} + \dfrac{ml^2}{16} =$

$$\left.\begin{aligned} I_{/G\vec y}(CD) &= \frac{m(l/2)^2}{3} + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 \\ I_{/G\vec y}(AB) &= 0 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_{/G\vec y}(AB \cup CD) = \frac{5ml^2}{24}$$

$I_{/G\vec z}(AB \cup CD) = I_{/G\vec x}(\;) + I_{/G\vec y}(\;) = \dfrac{ml^2}{12} + \dfrac{5ml^2}{24} = \dfrac{7ml^2}{24}$

$$\Rightarrow I_G(AB \cup CD) = \begin{pmatrix} ml^2/12 & & 0 \\ & \frac{5ml^2}{24} & \\ 0 & & \frac{7ml^2}{24} \end{pmatrix}_{R_p}$$

repère principal

Exercice 3

Déterminer la matrice d'inertie au centre d'un disque homogène de rayon R et de masse m dans un repère central d'inertie à préciser.

Exercice 4

On considère un solide (S), de masse m, constitué par un cône de révolution plein homogène de sommet O, de hauteur $OH = a$ et de base ayant pour rayon $R = 2$.

1) Déterminer la position du centre d'inertie G de (S).

2) **Montrer que la matrice d'inertie du cône au sommet O est sphérique dans la base (x,y,z) et que le moment d'inertie I par rapport à n'importe quelle droite du repère vaut :**

$$I = \frac{6\, m\, a^2}{5}$$

Exercice 5

Soit $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère orthonormé direct dans lequel on étudié le mouvement d'un solide (S).
(S) est une boule de rayon R, qui reste au contact du plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ et dont un point A de la surface, situé à la distance R du plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ et fixe dans R_0, tel que $\overrightarrow{OA} = R\,\vec{z_0}$.
On appelle G le centre de (S), m sa masse et I le point de contact de la boule et du plan.
Soit $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S) avec $\vec{z} = \frac{\overrightarrow{AG}}{R}$.
On repère la position de (S) dans R_0 par *les angles d'Euler habituelles*.

1) **Calculer, par leurs éléments de réduction en A, *les torseurs cinétiques et dynamiques* de (S).**
   Quelles particularité présente le torseur cinétiques ?
   Calculer $2E_c(S/R_0)$ (E_c est l'énergie cinétique).
2) **Que devienne les résultats précédents dans l'hypothèse où il y a non glissement en I ?**
   Quelle particularité présente alors *le torseurs dynamique* ?

Correction exercice 5

(S) : $B(G, R, m)$, $\vec{OA} = R\vec{z_0}$, $\vec{z} = \frac{\vec{AG}}{R}$

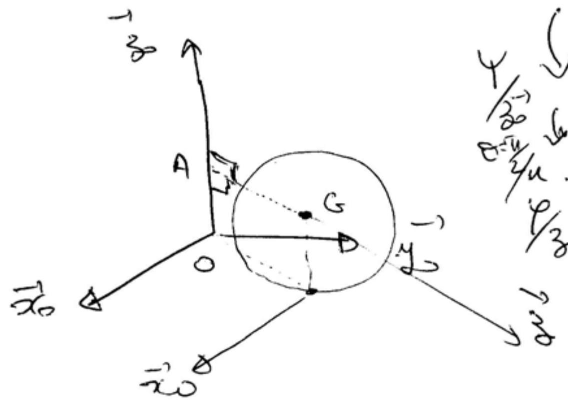
$R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ fixe

$\psi / \vec{z_0}$ R $(O\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$

$(u, w, z) = (\vec{u}, \vec{z_0}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$

$\theta = \pi/2$ $/ u$

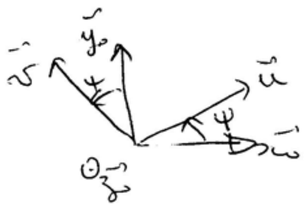
φ / z $R(G, x, y, z)$ lié à (S)

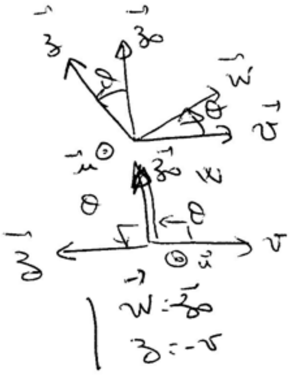


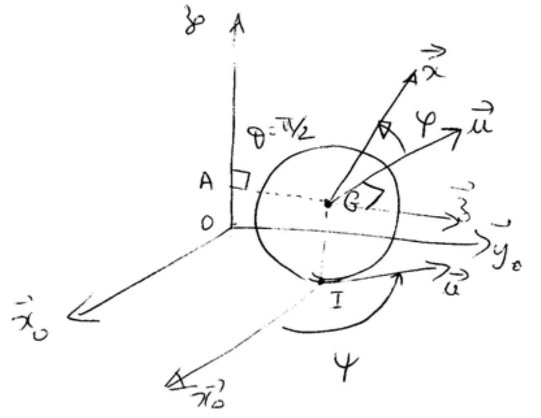
$\theta : (\widehat{\vec{z_0}, \vec{z}}) = \pi/2$

$\vec{z} = -\vec{v}$: $z \to v$

$\Rightarrow \psi = \pi/2$





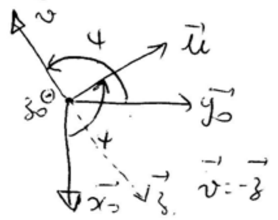


$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ fixe

(u, v, z_0)

$\vec{OA} = R\vec{z}_0$;

$\vec{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide



$\vec{z} = \frac{\vec{AG}}{R}$

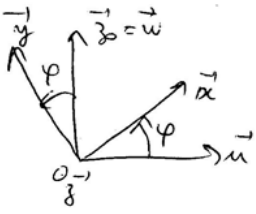
$= (\vec{z}, \vec{z}_0) = \frac{\pi}{2}$

$R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ fixe

ψ ($R_{int}(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$

θ ($\frac{\pi}{2}$) (z

$R(G, x, y, z)$ lié à S



1°) Torseur cinétique de (S) en A

$$[\mathcal{C}]_A = \left| \begin{array}{l} m\vec{V}(G) \\ \vec{\sigma}_A \end{array} \right.$$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$

$$\rightarrow \vec{V}(G/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\Big/_{R_0} = \frac{d}{dt}\Big/_{R_0}(R\vec{z_0} + R\vec{z}) = R\frac{d\vec{z}}{dt}\Big/_{R_0}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{z}}{dt}\Big/_{R_0} = \frac{d\vec{z}}{dt}\Big/_{(\vec{z},\vec{u},\vec{z_0})} + \dot{\psi}\vec{z_0} \wedge \vec{z} = \dot{\psi}\vec{u} \quad \boxed{= m\vec{V}(G) = mR\dot{\psi}\vec{u}}$$

$(u, v, z_0) = (u, -z, z) = (\vec{z}, \vec{u}, \vec{z_0})$

$$\rightarrow \vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_G + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G) = I_G(S)\vec{\Omega} + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G)$$

(u, v, z_0) R.r

x, y, z

$$I_G(S) = \frac{2}{5}mR^2\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_R, \quad \vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{z_0} + \dot{\varphi}\vec{z}$$

$$\vec{\sigma}_A = \frac{2}{5}mR^2(\dot{\psi}\vec{z_0} + \dot{\varphi}\vec{z}) + mR\vec{z} \wedge R\dot{\psi}\vec{u} \qquad \vec{z} \wedge \vec{u} = \vec{z_0}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_A = \frac{mR^2}{5}(7\dot{\psi}\vec{z_0} + 2\dot{\varphi}\vec{z})}$$

Th(n)

$$I_\Delta = \underbrace{m\vec{V}(G)}_{\vec{R}} \cdot \underbrace{\vec{\sigma}_A}_{m(A)} = \frac{m^2R^3}{5}\dot{\psi}\vec{u}\,(7\dot{\psi}\vec{z_0} + 2\dot{\varphi}\vec{z}) = 0 \qquad 3:5$$

- $\dot{\psi} \neq 0 \rightarrow$ glisseur
- $\dot{\psi} = 0 \rightarrow$ couple
- $\dot{\psi} = 0$ et $\varphi = 0$ torseur nul.

Rappel $I = \vec{R} \cdot \vec{\mathcal{M}}(M)$ | Torseur glisseur ... $I = 0$

- Torseur nul $\vec{R} = \vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{0}$
- couple $\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{\mathcal{M}}(N)$ ...
- glisseur $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\exists\, M$ $\vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{0}$

2°) $$[\mathcal{A}]_A \left| \begin{array}{l} m\vec{\Gamma}(G)/R_0 \\ \vec{\delta}_A \end{array} \right.$$

$$\frac{dV_G}{dt}\Big/_{R_0} = \frac{dV_G}{dt}\Big/_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V} \quad \dot{\psi}\vec{z_0} \wedge R\dot{\psi}\vec{u} \quad \vec{v}$$

$\rightarrow m\vec{\Gamma}_{(G)/R_0} = m\frac{d\vec{V}_G}{dt}\Big|_{R_0} = mR\ddot{\psi}\vec{u} - mR\dot{\psi}^2\vec{z}$; $\left(\frac{d\vec{u}}{dt} = -\dot{\psi}\vec{z}\right)$

$\rightarrow \vec{\delta}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{mR^2}{5}\left(7\ddot{\psi}\vec{z}_0 + 2\ddot{\varphi}\vec{z} + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\vec{u}\right)$; $\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\Big|_{R_0} = \dot{\psi}\vec{u}\right)$

pt fixe

$\frac{d\vec{z}}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\vec{z}}{dt}\Big|_{R} + \dot{\psi}\vec{z}_0\wedge\vec{z} = \dot{\psi}\vec{u}$

$I_\Delta = m\vec{\Gamma}_{(G)}\cdot\vec{\delta}_A$

$2T(S)/R_0 = \vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}_A(S)$ (A pt fixe)

$= \frac{mR^2}{5}(\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z})(7\dot{\psi}\vec{z}_0 + 2\dot{\varphi}\vec{z}) = \frac{mR^2}{5}(7\dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}^2)$

Non glissement : $\vec{V}_{g(B/R_0)} = \vec{V}(I\in B)/R_0 - \vec{V}(I\in \text{plan})/R_0$

$= \vec{V}(G)/R_0 + \vec{\Omega}_{B/R_0}\wedge\vec{GI}$

$= R\dot{\psi}\vec{u} + (\dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z}_0)(-R\vec{z}_0)$

$= R\dot{\psi}\vec{u} + R\dot{\varphi}\vec{u} = R(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\vec{u}$

$\dot{\psi} = -\dot{\varphi}$

$\Rightarrow \dot{\psi}^2 = \dot{\varphi}^2$

$\Rightarrow 2T = \frac{mR^2}{5}\, 9\dot{\varphi}^2$

$(\vec{z}, (A), \vec{z}_0)$

RSG $\rightarrow \dot{\psi} = -\dot{\varphi}$

$m\vec{\Gamma}_{G/R_0} = mR\ddot{\psi}\vec{u} - mR\dot{\psi}^2\vec{z}$

$\vec{\delta}_A = \frac{mR^2}{5}\left(7\ddot{\psi}\vec{z}_0 - 2\ddot{\psi}\vec{z} - 2\dot{\psi}^2\vec{u}\right)$

$\frac{d\vec{S}}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\vec{z}}{}$ ... $\Rightarrow 2T =$