جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

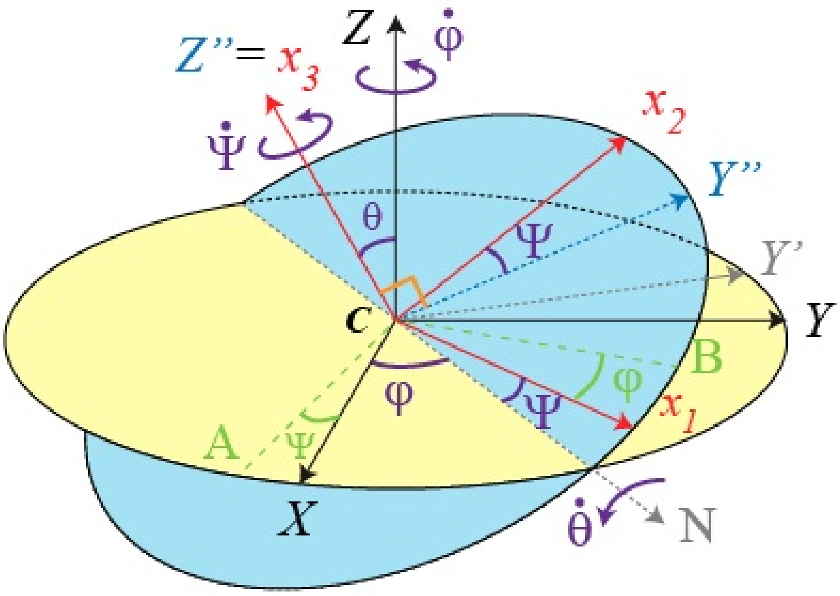
كلية العلوم والتقنيات
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Polycopié de Cours

Mécanique des Solides

Parcours : Maths Informatique Physique (MIP)

Module : P 135   Semestre 3



Responsable : Pr. Amine TILIOUA

Département Sciences de l'Ingénieur

Faculté des Sciences et Techniques -Errachidia

Années universitaires : 2024/2025

Table des matières

Chapitre 1

Géométrie vectorielle

1.1 Les vecteurs :

1.1.1 Les vecteurs liés :

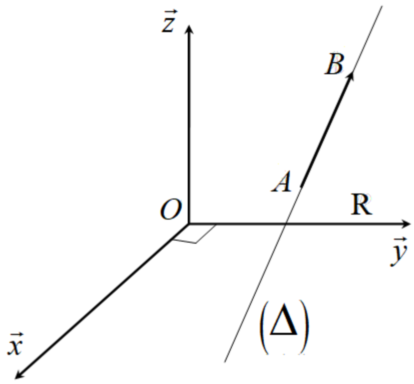
Définition **1.1**

Un vecteur lié est un couple de deux points $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *noté* $\overrightarrow{AB}$*. Ce couple ordonné de deux points est défini par :*

- *son support (droite* Δ*)*
- *son point d'application* $\mathbf{A}$
- *son sens (de* $\mathbf{A}$ *vers* $\mathbf{B}$*)*
- *son module (distance de* $\mathbf{A}$ *à* $\mathbf{B}$*)*
- Composantes de A dans le repère R : $\mathbf{A}\left|\begin{array}{l}\mathbf{x_A}\\ \mathbf{y_A}\\ \mathbf{z_A}\end{array}\right.$
- Composantes de B dans le repère R : $\mathbf{B}\left|\begin{array}{l}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{y_B}\\ \mathbf{z_B}\end{array}\right.$
- Composantes de $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ dans le repère R : $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\left|\begin{array}{l}\mathbf{x_{AB}} = \mathbf{x_B} - \mathbf{x_A}\\ \mathbf{y_{AB}} = \mathbf{y_B} - \mathbf{y_A}\\ \mathbf{z_{AB}} = \mathbf{z_B} - \mathbf{z_A}\end{array}\right.$

Propriété **1.1**

- *Deux vecteurs liés sont équipollents s'ils ont même sens et même module.*
- *Un vecteur nul est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles.*
- *Remarque : l'équipollence est une relation d'équivalence*



- *Réflexivité :* $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}$
- *Symétrie :* $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{CD}} \implies \overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}$
- *Transitivité :* $\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{CD}} \\ \overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{EF}}\end{array}\right\} \implies \overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{EF}}$

L'ensemble des vecteurs liés équipollents à un vecteur lié, c'est à dire la classe d'équivalence définie par un de ces vecteurs liés constitue un vecteur libre $\overrightarrow{\mathbf{V}}$.

Un représentant est défini par :

- Son support,
- Son sens,
- Son module $|\overrightarrow{\mathbf{V}}|$

Expression du vecteur libre dans le repère R :

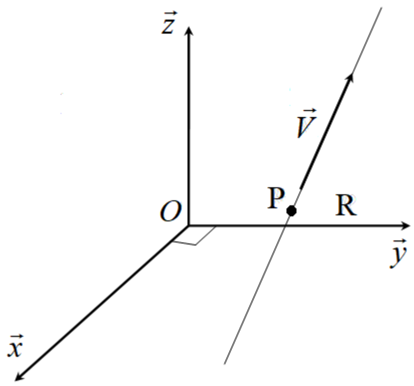
$$\overrightarrow{\mathbf{V}}\left|\begin{array}{l}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\\ \mathbf{c}\end{array}\right. \implies \overrightarrow{\mathbf{V}}=\mathbf{a}\,\overrightarrow{\mathbf{x}}+\mathbf{b}\,\overrightarrow{\mathbf{y}}+\mathbf{c}\,\overrightarrow{\mathbf{z}}$$

1.1.2 Les vecteurs glissants :

Un vecteur glissant est défini par :

- Un vecteur libre $\overrightarrow{\mathbf{V}}$
- Un point du support P

On le note $\overrightarrow{\mathbf{G}}(\mathrm{P},\overrightarrow{\mathbf{V}})$



1.2 Calcul vectoriel :

Le calcul vectoriel porte sur les vecteurs libres

Addition

$$\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2$$

avec

$$\vec{\mathbf{V}}_1 \left| \begin{array}{l} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{y_1} \\ \mathbf{z_1} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{V}}_2 \left| \begin{array}{l} \mathbf{x_2} \\ \mathbf{y_2} \\ \mathbf{z_2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{V}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \\ \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} \\ \mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} \end{array} \right.$$

Propriétés de l'addition :

- Commutativité :$\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2 = \vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_1$
- Associativité : $\vec{\mathbf{V}}_1 + (\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_3) = (\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2) + \vec{\mathbf{V}}_3$
- Élément symétrique : $\forall\ \vec{\mathbf{V}}, \exists(-\vec{\mathbf{V}})$ tel que $\vec{\mathbf{V}} + (-\vec{\mathbf{V}}) = 0$
- Élément neutre : $\forall\ \vec{\mathbf{V}}, \exists(\vec{\mathbf{0}})$ tel que $\vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{V}}$

L'addition donne à l'ensemble des vecteurs libres une structure de groupe commutatif.

Multiplication par un scalaire :

Etant donné un vecteur libre $\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{x}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{y}\vec{\mathbf{y}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{z}}$ et un scalaire λ, le produit du vecteur $\vec{\mathbf{V}}$ par λ est un vecteur libre.

$$\vec{\mathbf{V}}' = \lambda\vec{\mathbf{V}} = \lambda\mathbf{x}\,\vec{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{y}\,\vec{\mathbf{y}} + \lambda\mathbf{z}\,\vec{\mathbf{z}}$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire :

- Associativité : $\alpha(\beta\vec{\mathbf{V}}) = (\alpha\beta)\vec{\mathbf{V}}$
- Elément neutre : $\forall\ \vec{\mathbf{V}}, \exists\mathbf{1}$ tel que $1\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}$
- Distributivité par rapport à la somme vectorielle : $\alpha(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2) = \alpha\vec{\mathbf{V}}_1 + \alpha\vec{\mathbf{V}}_2$
- Distributivité par rapport à la somme scalaire : $(\alpha + \beta)\vec{\mathbf{V}} = \alpha\vec{\mathbf{V}} + \beta\vec{\mathbf{V}}$

Applications géométriques :

- Conditions d'alignement : **A**, **B**, **C** alignés $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\,;\ \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$
- Conditions de parallélisme : $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{V}}'$ sont // $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\,;\ \overrightarrow{\mathbf{V}} = k\overrightarrow{\mathbf{V}}'$

1.2.1 Produit scalaire :

***Définition* 1.2**

Étant donné deux vecteurs libres

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}\left|\begin{array}{l}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\\ \mathbf{z}\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathbf{V}}'\left|\begin{array}{l}\mathbf{x}'\\ \mathbf{y}'\\ \mathbf{z}'\end{array}\right.$$

définis dans la base orthonormée($\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}}$ *) on appelle produit scalaire de* $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ *par* $\overrightarrow{\mathbf{V}}'$ *le réel :*

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{V}}' = \mathbf{xx}' + \mathbf{yy}' + \mathbf{zz}'$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire :

- *Commutativité :* $\overrightarrow{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{V}}' = \overrightarrow{\mathbf{V}}'.\overrightarrow{\mathbf{V}}$
- *Distributivité :* $\overrightarrow{\mathbf{V}}(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1 + \overrightarrow{\mathbf{V}}_2) = \overrightarrow{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{V}}_1 + \overrightarrow{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$
- *Le produit scalaire n'est pas associatif :* $\overrightarrow{\mathbf{V}}(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1.\overrightarrow{\mathbf{V}}_2) \neq (\overrightarrow{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{V}}_1)\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$

***Définition* 1.3**

- *Associativité quand à la multiplication par un scalaire :* $(\alpha\overrightarrow{\mathbf{V}}).\overrightarrow{\mathbf{V}}' = \overrightarrow{\mathbf{V}}.(\alpha\overrightarrow{\mathbf{V}}')$
- *Carré scalaire :* $\overrightarrow{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{V}} = \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} + \mathbf{z^2}$
- *On appelle longueur ou norme d'un vecteur le nombre :* $|\overrightarrow{\mathbf{V}}| = \sqrt{\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} + \mathbf{z^2}}$

Applications :

- *Deux vecteurs non nuls* $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1$ *et* $\overrightarrow{\mathbf{V}}_2$ *sont* $\perp$ *si* $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1.\overrightarrow{\mathbf{V}}_2 = 0$
- *Cosinus de deux vecteurs :*

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{\mathbf{OA}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{OA}}||\overrightarrow{\mathbf{OB}}|}$$

1.2.2 Produit vectoriel :

On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{V}}'$ le vecteur libre $\overrightarrow{\mathbf{G}} = \overrightarrow{\mathbf{V}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}'$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{G}}$ est tel que :

- Direction de $\overrightarrow{\mathbf{G}}$ est $\perp$ à $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ et à $\overrightarrow{\mathbf{V}}'$
- Le sens de $\overrightarrow{\mathbf{G}}$ est tel que le trièdre $\overrightarrow{\mathbf{G}}, \overrightarrow{\mathbf{V}}, \overrightarrow{\mathbf{V}}'$ est direct.
- Le module de $\overrightarrow{\mathbf{G}} = |\overrightarrow{\mathbf{V}}||\overrightarrow{\mathbf{V}}'|\sin\alpha$ avec $\alpha = (\overrightarrow{\mathbf{V}}, \overrightarrow{\mathbf{V}}')$

Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\overrightarrow{\mathbf{V}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}' = -\overrightarrow{\mathbf{V}}' \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}$
- Multiplication par un scalaire : $(\lambda\overrightarrow{\mathbf{V}}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}' = \lambda(\overrightarrow{\mathbf{V}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}')$
- Le produit vectoriel nul :

$$\overrightarrow{\mathbf{V}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}' = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Si} \quad \overrightarrow{\mathbf{V}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\mathbf{V}}' = \overrightarrow{\mathbf{0}} \\ \overrightarrow{\mathbf{V}} / \ / \overrightarrow{\mathbf{V}}' \implies \overrightarrow{\mathbf{V}} = \mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{V}}' \end{cases}$$

- Double Produit vectoriel : $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1 \wedge (\overrightarrow{\mathbf{V}}_2 \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}_3) = \overrightarrow{\mathbf{V}}_2.(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1.\overrightarrow{\mathbf{V}}_3) - \overrightarrow{\mathbf{V}}_3.(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1.\overrightarrow{\mathbf{V}}_2)$
- Distributivité par rapport à la somme vectorielle : $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1 \wedge (\overrightarrow{\mathbf{V}}_2 + \overrightarrow{\mathbf{V}}_3) = \overrightarrow{\mathbf{V}}_1 \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}_2 + \overrightarrow{\mathbf{V}}_1 \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}_3$
- Composantes du produit vectoriel : $\overrightarrow{\mathbf{V}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}' = (\mathbf{yz}' - \mathbf{zy}')\overrightarrow{\mathbf{i}} + (\mathbf{zx}' - \mathbf{xz}')\overrightarrow{\mathbf{j}} + (\mathbf{xy}' - \mathbf{yx}')\overrightarrow{\mathbf{k}}$

Application géométrique :

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OB}}|}{|\overrightarrow{\mathbf{OA}}||\overrightarrow{\mathbf{OB}}|}$$

Aire du parallélogramme :

L'aire du parallélogramme $\mathbf{OABD}$ est donnée par la relation suivante : $\mathbf{OABD} = |\overrightarrow{\mathbf{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OB}}|$

1.2.3 Produit mixte :

***Définition* 1.4**

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1,\overrightarrow{\mathbf{V}}_2,\overrightarrow{\mathbf{V}}_3$ *le nombre réel défini par :*

$$(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1, \overrightarrow{\mathbf{V}}_2, \overrightarrow{\mathbf{V}}_3) = \overrightarrow{\mathbf{V}}_1.(\overrightarrow{\mathbf{V}}_2 \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}_3)$$

***Propriété* 1.2**

- *Si le trièdre* $\overrightarrow{\mathbf{V}}_1,\overrightarrow{\mathbf{V}}_2,\overrightarrow{\mathbf{V}}_3$ *est direct, le produit mixte est positif,*
- *Le produit mixte est invariant par permutation circulaire,*

$$(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1, \overrightarrow{\mathbf{V}}_2, \overrightarrow{\mathbf{V}}_3) = (\overrightarrow{\mathbf{V}}_2, \overrightarrow{\mathbf{V}}_3, \overrightarrow{\mathbf{V}}_1) = (\overrightarrow{\mathbf{V}}_3, \overrightarrow{\mathbf{V}}_1, \overrightarrow{\mathbf{V}}_2)$$

- *Le produit mixte change de signe si on échange deux vecteurs,*

$$(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1, \overrightarrow{\mathbf{V}}_2, \overrightarrow{\mathbf{V}}_3) = -(\overrightarrow{\mathbf{V}}_1, \overrightarrow{\mathbf{V}}_3, \overrightarrow{\mathbf{V}}_2)$$

- *Le produit mixte est nul si :*
  - *Les trois vecteurs son coplanaire*
  - *Deux vecteur sont parallèles*

1.2.4 Interprétation géométrique :

Le module de $(\vec{\mathbf{V}}_1, \vec{\mathbf{V}}_2, \vec{\mathbf{V}}_3)$ représente le volume du Parallélogramme

Division vectorielle

Objectif : résoudre l'équation :

$$\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{B}} \tag{1.1}$$

- Si $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ ne sont pas perpendiculaires : pas de solution
- Si $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}$=0 et $\vec{\mathbf{A}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{B}} \neq \vec{\mathbf{0}}$
  - Soit $\vec{\mathbf{X}}_0 \perp \vec{\mathbf{A}}$ tel que $\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{X}}_0 = \vec{\mathbf{B}} \implies \vec{\mathbf{A}} \wedge (\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{X}}_0) = (\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}})$

$$\vec{\mathbf{A}}.(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{X}}_\mathbf{0}) = \vec{\mathbf{X}}_\mathbf{0}.(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}} \implies \vec{\mathbf{X}}_\mathbf{0} = -\frac{\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{(\vec{\mathbf{A}})^2}$$

  - Soit $\vec{\mathbf{X}}$ quelconque solution d'équation (1.1)

$$\vec{\mathbf{A}} \wedge (\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}_0) = \vec{\mathbf{0}} \tag{1.2}$$

$\vec{\mathbf{A}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{X}} \neq \vec{\mathbf{X}}_\mathbf{0}$, l'équation (1.2) a une solution si : $\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}_0 = \lambda \vec{\mathbf{A}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc la solution générale de (1.1) est :

$$\vec{\mathbf{X}} = -\frac{\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{(\vec{\mathbf{A}})^2} + \lambda \vec{\mathbf{A}}$$

Résumé des solutions :

$\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}} \neq 0 \longrightarrow$ pas de solution

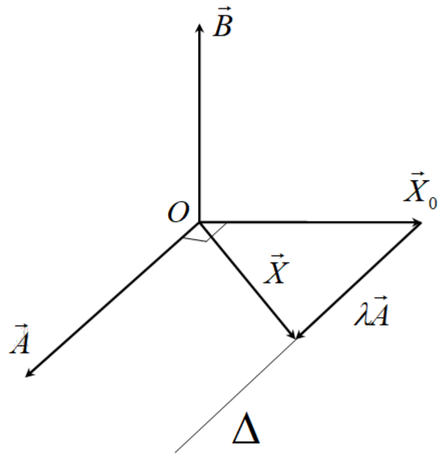
$\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \longrightarrow \vec{\mathbf{A}} = 0$:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{B}} = 0 \longrightarrow \textit{tous les vecteurs de } E_3 \textit{ sont solution} \\ \vec{\mathbf{B}} \neq 0 \longrightarrow \textit{pas solution} \end{cases}$$

$\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \longrightarrow \vec{A} \neq 0$:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{B}} \neq 0 \longrightarrow \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}_0 + \lambda \vec{\mathbf{A}} \\ \vec{\mathbf{B}} = 0 \longrightarrow \vec{\mathbf{X}}_0 = 0.\vec{\mathbf{X}} = \lambda \vec{\mathbf{A}} \end{cases}$$

- **Interprétation géométrique :**


$\vec{B}$
O
$\vec{X}_0$
$\vec{X}$
$\lambda\vec{A}$
$\vec{A}$
Δ

Chapitre 2

Les torseurs

2.1 Rappels mathématiques sur le calcul vectoriel

On se place dans l'espace euclidien $\mathbf{E}$, de dimension 3 et du base $\mathbf{B}(\overrightarrow{\mathbf{e_x}}, \overrightarrow{\mathbf{e_y}}, \overrightarrow{\mathbf{e_z}})$.
Soient $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ deux vecteurs de $\mathbf{E}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i}\overrightarrow{\mathbf{e_i}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{b_i}\overrightarrow{\mathbf{e_i}}$$

***Exemple* 2.1**

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{3}} \mathbf{a_i}\overrightarrow{\mathbf{e_i}} = \mathbf{a_1}\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \mathbf{a_2}\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \mathbf{a_3}\overrightarrow{\mathbf{e_3}}$$

- Somme :

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i}\overrightarrow{\mathbf{e_i}} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{b_i}\overrightarrow{\mathbf{e_i}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{a_i} + \mathbf{b_i})\overrightarrow{\mathbf{e_i}}$$

- Produit par scalaire : soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \lambda\mathbf{a_i}\overrightarrow{\mathbf{e_i}}$$

- Produit de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i}\mathbf{b_i} \qquad \delta_{\mathbf{ij}} = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{e_i}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e_i}} = \mathbf{1} \\ \overrightarrow{\mathbf{e_i}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e_j}} = \mathbf{0} \;\; \mathbf{i \neq j} \end{array} \right.$$

- Produit vectoriel :

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_2 b_3 - a_3 b_2} \\ \mathbf{-a_1 b_3 + a_3 b_1} \\ \mathbf{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{vmatrix}$$

- Produit mixte de 3 vecteurs :

$$(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = \mathbf{det}(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$$

***Propriété* 2.1**

Trilinéaire, antisymétrique totalement ordonné et invariable,
par permutation circulaire $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{0}}$ *si seulement si* $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ *et* $\vec{\mathbf{c}}$ *sont coplanaires*

- *Double produit vectoriel :*

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) \cdot \vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}$$

- *Division vectoriel :*
  soient $\vec{\mathbf{a}}$ *et* $\vec{\mathbf{b}}$ *deux vecteurs orthogonaux* $(\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}})$ *si seulement si* $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$.
  On cherche $\vec{\mathbf{n}}$ *tel que* $\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{b}}$

***Théorème* 2.1**

Si $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ *et* $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$ *alors*

$$\vec{\mathbf{x}} = \frac{\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|} + \lambda \vec{\mathbf{a}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

2.1.1 Notion de repère :

On se place dans l'espace euclidien $\mathbf{E}$, un espace est défini par une origine et 3 vecteurs de base $(\vec{\mathbf{e_1}}, \vec{\mathbf{e_2}}, \vec{\mathbf{e_3}})$

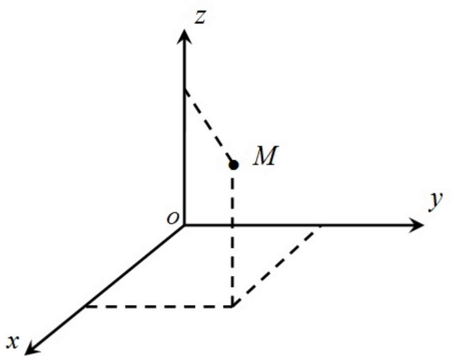
***Notation* 2.1**

$\mathbf{R}(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ *auquel on associe la base* $\mathbf{B}(\vec{\mathbf{e_1}}, \vec{\mathbf{e_2}}, \vec{\mathbf{e_3}})$

***Remarque* 2.1**

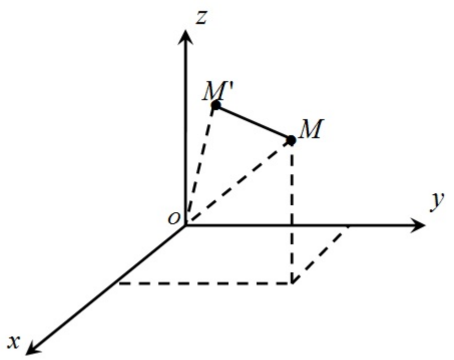
On utilise souvent des repères orthonormés

$$\|\vec{\mathbf{e_i}}\|^2 = \mathbf{1} \qquad \delta_{\mathbf{ij}} = \vec{\mathbf{e_i}} \cdot \vec{\mathbf{e_j}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{i = j} \\ \mathbf{0} & \mathbf{i \neq j} \end{cases}$$



$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{x}\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \mathbf{y}\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \mathbf{z}\overrightarrow{\mathbf{e_3}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \sum \mathbf{x_i}\overrightarrow{\mathbf{e_i}}$$



$$\overrightarrow{\mathbf{MM'}} = \overrightarrow{\mathbf{MO}} + \overrightarrow{\mathbf{OM'}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{MM'}} = \overrightarrow{\mathbf{OM'}} - \overrightarrow{\mathbf{OM}}$$

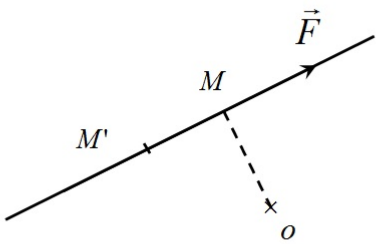
2.2 Notion de moment :

Soit une force $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ d'origine $\mathbf{M}$, le moment de $\mathbf{F}$ par rapport à $\mathbf{O}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathbf{O}}(\overrightarrow{\mathbf{F}}) = \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}}$$

Soit $\mathbf{M'} \neq \mathbf{M}$

$$\overrightarrow{\mathbf{OM'}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}} = (\overrightarrow{\mathbf{OM}} + \overrightarrow{\mathbf{MM'}}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathbf{MM'}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}}}_{=\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathbf{O}}(\overrightarrow{\mathbf{F}})$$



Dans ce cas d'un vecteur glissant on peut choisir arbitrairement l'origine sur le support.

2.3 Ensemble de vecteurs

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble fini de n vecteurs $\mathbf{E} = \{\mathbf{F_i}\}$ $\quad \mathbf{i = 1 \cdots n}$
Chaque $\overrightarrow{\mathbf{F_i}}$ est issu de $\mathbf{M_i}$ $\quad \mathbf{E_i} = \{\overrightarrow{\mathbf{F_i}}, \mathbf{M_i}\}$

2.3.1 Éléments de réduction en O

- Somme :

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{F_i}}$$

- Moment :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathbf{E}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{OM_i}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F_i}}$$

Remarque **2.2**

Il s'agit d'une simplification de l'ensemble des forces $\overrightarrow{\mathbf{F_i}}$ lièes à $(\mathbf{S})$ que l'on rèduit à 6 composants (infinité de composantes)

$$\tau = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{R}} \Rightarrow 3 \text{ comp} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\mathbf{S}) \Rightarrow 3 \text{ comp} \end{array} \right.$$

Cas ou $\mathbf{E}$ a une répartition continue sur un domaine $\mathbf{D}$

- Pour l'arc de courbe :

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) = \int_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})\mathbf{ds} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{O}}(\mathbf{E}) = \int_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})\mathbf{ds}$$

- Pour une surface :

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) = \iint_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})\mathbf{d}\sigma \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{O}}(\mathbf{E}) = \iint_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})\mathbf{d}\sigma$$

- Pour un volume

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) = \iiint_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})\mathbf{dV} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{O}}(\mathbf{E}) = \iiint_{\mathbf{D}} (\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})\mathbf{dV}$$

Propriétés fondamentales **2.1**

- ***Additivité :***
  Si $\mathbf{E_1}$ et $\mathbf{E_2}$ sont disjoints et $\mathbf{E_1} \cap \mathbf{E_2} = \emptyset$

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E_1} \cup \mathbf{E_2}) = \overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E_1}) + \overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E_2})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{O}}(\mathbf{E_1} \cup \mathbf{E_2}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{O}}(\mathbf{E_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{O}}(\mathbf{E_2})$$

Propriétés fondamentales **2.2**

Changement d'origine (élément de vecteur en $\mathbf{O}$*)*

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) = \overrightarrow{\mathbf{S}}'(\mathbf{E})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathbf{O'}}(\mathbf{E}) = \int_{\mathbf{D}} (\overrightarrow{\mathbf{O'M}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m}))\mathbf{d}\omega = \int_{\mathbf{D}} [(\overrightarrow{\mathbf{O'O}} + \overrightarrow{\mathbf{OM}}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})]\mathbf{d}\omega$$

$$= \int_{\mathbf{D}} (\overrightarrow{\mathbf{O'O}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m}))\mathbf{d}\omega + \int_{\mathbf{D}} (\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m}))\mathbf{d}\omega$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{O'O}} \wedge \int_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\mathbf{f}}(\mathbf{m})\mathbf{d}\omega + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathbf{O'}}(\mathbf{E})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathbf{O'}}(\mathbf{E}) = \overrightarrow{\mathbf{O'O}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{E}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{E}) + \overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{O'O}}$$

$$\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\mathbf{a}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{b}} = -(\overrightarrow{\mathbf{b}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{a}}) \\ \overrightarrow{\mathbf{O'O}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) = -\overrightarrow{\mathbf{O'O}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) = \overrightarrow{\mathbf{R}}(\mathbf{E}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{OO'}} \end{array}\right)$$

2.4 Applications et champ antisymétrique

2.4.1 Application antisymétrique

Définition **2.1**

Soit $\mathbf{f}$ *une application de* $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$, $\mathbf{f}$ *est antisymétrique si seulement si*

$$\forall(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{E^2} \qquad \overrightarrow{\mathbf{a}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{b}}) = -\overrightarrow{\mathbf{b}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{a}})$$

- L'application antisymétrique est linéaire

  $\mathbf{f}$ est linéaire $\Longleftrightarrow \forall(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}) \in \mathbf{E^2}$

  $\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2}) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{a_1}) + \alpha_2\mathbf{f}(\mathbf{a_2})$

- Matrice associé à $\mathbf{f}$:

  Relativement à la base ($\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$) de $\mathbf{E}$, $\mathbf{f}$ est entièrement déterminée par les données suivants :

$$\begin{array}{l} \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = \alpha_{\mathbf{11}}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \alpha_{\mathbf{21}}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \alpha_{\mathbf{31}}\overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{j}}) = \alpha_{\mathbf{12}}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \alpha_{\mathbf{22}}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \alpha_{\mathbf{32}}\overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{k}}) = \alpha_{\mathbf{13}}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \alpha_{\mathbf{23}}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \alpha_{\mathbf{33}}\overrightarrow{\mathbf{k}} \end{array}$$

Donc la matrice associée à $\mathbf{f}$ dans la base $\mathbf{B}$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{f}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) & \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{j}}) & \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{k}}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Or $\mathbf{f}$ antisymétrique $\overrightarrow{\mathbf{a}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{b}}) = -\overrightarrow{\mathbf{b}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{a}})$

- $\overrightarrow{\mathbf{i}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) = -\overrightarrow{\mathbf{i}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) \Longrightarrow \alpha_{11} = -\alpha_{11} \Longrightarrow \alpha_{11} = 0$ de même $\alpha_{22} = -\alpha_{33} = 0$
- $\overrightarrow{\mathbf{i}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{j}}) = -\overrightarrow{\mathbf{j}}\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{i}}) \Longrightarrow \alpha_{12} = -\alpha_{21} = -\mathbf{S_3}$

$$\alpha_{23} = -\alpha_{32} = -\mathbf{S_1}$$
$$\alpha_{31} = -\alpha_{13} = -\mathbf{S_2}$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{S_3} & \mathbf{S_2} \\ -\mathbf{S_3} & \mathbf{0} & -\mathbf{S_1} \\ -\mathbf{S_2} & \mathbf{S_1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

2.4.2 Ensemble de vecteurs

Soit $\overrightarrow{\mathbf{a}'} = \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{a}})$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'_2 \\ \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{S_3} & \mathbf{S_2} \\ -\mathbf{S_3} & \mathbf{0} & -\mathbf{S_1} \\ -\mathbf{S_2} & \mathbf{S_1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S_2a_3 - S_3a_2} \\ \mathbf{S_3a_1 - S_1a_3} \\ \mathbf{S_1a_2 - S_2a_1} \end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{\mathbf{f}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{S_1} \\ \mathbf{S_2} \\ \mathbf{S_3} \end{array} \right.$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}'} = \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \left| \begin{array}{l} \mathbf{S_1} \\ \mathbf{S_2} \\ \mathbf{S_3} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{array} \right. = \overrightarrow{\mathbf{f}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{a}}$$

donc $\overrightarrow{\mathbf{a}'} = \overrightarrow{\mathbf{f}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{a}}$

donc l'application antisymétrique est entièrement déterminée par connaissance de $\overrightarrow{\mathbf{f}}$ appelé vecteur de l'application antisymétrique.

2.5 Champ antisymétrique

Soit $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ l'application de $\begin{array}{l} \Sigma \to \mathbf{E} \\ \mathbf{P} \to \overrightarrow{\mathbf{u}}(\mathbf{P}) \end{array}$ définit un champ antisymétrique

Définition **2.2**

Un champ est antisymétrique s'il existe une application $\mathbf{f}$ *antisymetrique telle que :* $\forall(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \in \Sigma^{\mathbf{2}}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}) + \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{PQ}})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}'} = \mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \overrightarrow{\mathbf{f}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{a}} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}) + \overrightarrow{\mathbf{f}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$$

$\mathbf{f}$ *est appelé le vecteur du champ antisymétrique.*

2.6 Définition d'un torseur

Un torseur est par définition constitué d'un champ antisymétrique (champ de moments) et d'un vecteur associé appelé résultante $\overrightarrow{\mathbf{R}}$.

***Définition* 2.3**

On appelle torseur un ensemble de deux vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) *Le champ $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ est uniforme (même champ en tout point)*

(ii) *Le champ $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ vérifie $\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}$*

***Notation* 2.2**

$$[\tau] = [\mathbf{T}] = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}\right]$$

(i) $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ *: Torseur*

(ii) $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ *: Moment*

$$[\tau_\mathbf{A}] = [\mathbf{T}_\mathbf{A}] = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}_\mathbf{A}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_\mathbf{A}\right]$$

***Propriété* 2.2**

Les torseurs définissent un espace vectoriel

- $[\tau_1] + [\tau_2] = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}_1, \overrightarrow{\mathcal{M}}_1\right] + \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}_2, \overrightarrow{\mathcal{M}}_2\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}_1 + \overrightarrow{\mathbf{R}}_2, \overrightarrow{\mathcal{M}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{M}}_2\right]$
- $\lambda [\tau_1] = \left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{R}}_1, \lambda \overrightarrow{\mathcal{M}}_1\right]$

2.6.1 Éléments de réduction d'un torseur

- $[\tau_\mathbf{A}] = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}_\mathbf{A}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_\mathbf{A}\right]$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathbf{R}}_\mathbf{A}$ *et* $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ *définissent les éléments de réduction de* $\tau_\mathbf{A}$
  $\overrightarrow{\mathcal{M}}_\mathbf{B} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_\mathbf{A} + \overrightarrow{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}$
- $[\tau_1] = [\tau_2]$ *si seulement si* $\left[\overrightarrow{\mathbf{R}}_1, \overrightarrow{\mathcal{M}}_1\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}_2, \overrightarrow{\mathcal{M}}_2\right]$ *et* $\overrightarrow{\mathbf{R}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{R}}_2$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathcal{M}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{M}}_2$

2.7 Réduction d'un torseur

2.7.1 Invariant d'un torseur

(a) **Invariant vectoriel** :
Par définition $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ est l'invariant vectoriel du torseur τ.

(b) **Invariant scalaire** : Soit τ un torseur $\left[\overrightarrow{\mathbf{R}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}\right]$

$\forall(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \Sigma \qquad \tau_P = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_\mathbf{P}\right] \qquad \tau_\mathbf{Q} = \left[\overrightarrow{\mathbf{R}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_\mathbf{Q}\right]$

On calcule :

$$\vec{R}\cdot\vec{\mathcal{M}}(P)=\vec{R}(\vec{\mathcal{M}}(Q)+\vec{R}\wedge\vec{QP})=\vec{R}\cdot\vec{\mathcal{M}}(Q)+\underbrace{\vec{R}\cdot(\vec{R}\wedge\vec{PQ})}_{=\vec{R},\vec{R},\vec{PQ}=0}$$

$$\vec{R}\cdot\vec{\mathcal{M}}(P)=\vec{R}\cdot\vec{\mathcal{M}}(Q)=I \qquad \text{"Invariant scalaire"}$$

Par définition $\vec{R}\cdot\vec{\mathcal{M}}(Q)=I$ est **l'invariant scalaire du torseur** $\tau\left[\vec{R},\vec{\mathcal{M}}\right]$

2.7.2 Cas particulier I=0

(a) $\vec{R}=\vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}=\vec{0}\rightarrow$ **torseur nul**.

(b) $\vec{R}=\vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}\neq\vec{0}\rightarrow$ **torseur est un couple** $\tau=c\left[\vec{0},\vec{\mathcal{M}}(A)\right]$

(c) $\vec{R}\neq\vec{0}\implies\vec{R}\cdot\vec{\mathcal{M}}(A)=0\implies\vec{\mathcal{M}}(A)=\vec{0}$ **le torseur est un glisseur** $\tau=g\left[\vec{R},\vec{0}\right]$

2.7.3 Cas particulier I $\neq 0$

(a) $I\neq 0$ **le torseur n'est ni couple ni glisseur et ni torseur nul**.

Tout torseurs $\tau\left[\vec{R},\vec{\mathcal{M}}_A\right]$ peut être décomposé en la somme d'un torseur couple et un torseur glisseur

$$\tau\left[\vec{R},\vec{\mathcal{M}}_A\right]=\underset{g(A,\vec{R})}{\left[\vec{R},\vec{0}\right]}+\underset{c(\vec{0},\vec{\mathcal{M}}_A)}{\left[\vec{0},\vec{\mathcal{M}}_A\right]}$$

2.8 Axe centrale du torseur

Soit le torseur $\tau\left[\vec{R},\vec{\mathcal{M}}_A\right]$ l'invariant scalaire $I=\vec{R}\cdot\vec{\mathcal{M}}_A$

L'axe centrale du torseur Δ est définit par le fait que $\vec{R}$ et $\vec{\mathcal{M}_A}$ sont **colinéaires** :

$\alpha\in\mathbb{R}^*\quad/\ \vec{\mathcal{M}}_A=\alpha\cdot\vec{R}$

$$\implies\ \vec{\mathcal{M}}_A=\vec{\mathcal{M}}_B+\vec{R}\wedge\vec{BA}=\alpha\cdot\vec{R}$$

$$B=O\qquad\implies\vec{\mathcal{M}}_A=\vec{\mathcal{M}}_O+\vec{R}\wedge\vec{OA}=\alpha\cdot\vec{R}$$

$$\text{Or si}\quad \vec{a}\perp\vec{b}\ \exists x/\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b}\implies\vec{x}=\frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}+\lambda\vec{a}$$

$$\vec{OA}=\frac{\vec{R}\wedge\vec{\mathcal{M}}(O)}{\|\vec{S}\|^2}+\lambda\vec{R}$$

Cette relation définit **l'axe centrale du torseur**

2.9 Exemple de vecteurs particuliers :

2.9.1 Support concourant :

L'ensemble $\mathbf{E} = \{\overrightarrow{\mathbf{F_i}}, \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{B}}\}$ $\quad\quad \mathbf{g} = [\overrightarrow{\mathbf{R}}, \overrightarrow{0}]$

2.9.2 Support parallèle :

La force $\overrightarrow{\mathbf{F_i}} = \mathbf{F_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{u}}$

(a) La résultante

$$\overrightarrow{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{F_i}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{F_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{u}} = \overrightarrow{\mathbf{F_i}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{u}} \qquad (\overrightarrow{\mathbf{F}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{F_i}})$$

(b) Le moment

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{o}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F_i}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{u}}) \implies \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{o}} = (\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{F_i}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM_i}}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{u}}$$

Cas à distinguer

(i) $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{\mathbf{R}} = \overrightarrow{0} \implies$ Le torseur se déduit à un couple

(ii) $\overrightarrow{\mathbf{F}} \neq \overrightarrow{0}$ $\exists \mathbf{G}$ barycentres de $\mathbf{M_i}(\mathbf{i} = \mathbf{1} \cdots \mathbf{n})$

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \sum \overrightarrow{\mathbf{F_i}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM_i}} \implies \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{o}} = \overrightarrow{\mathbf{OG}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}}$$

L'axe centrale du torseur se réduit d'un glisseur, l'axe centrale $(\overrightarrow{\mathcal{M}} = \alpha \overrightarrow{\mathbf{R}})$ qui passe par $\mathbf{G}$ et dont les vecteurs sont parallèles.

2.10 Propriété caractéristique du champ de moment d'un torseur

On dit que le champ des moments est **équiprojectif** si seulement si

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_\mathbf{B}} \times \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Propriété d'équiprojectivité

Réciproquement : Le champ équiprojectif est un champ du non d'un torseur

***Propriétés* 2.1**

Les champs équiprojectifs forment un espace vectoriel

- $\tau_1 + \tau_2$ *est équiprojectif*
- $\lambda\tau$ *est equiprojectif*

2.11 Produit de deux torseurs

Soient τ_1 et τ_2 deux torseurs :

$$\tau_1\left[\overrightarrow{\mathbf{R_1}},\overrightarrow{\mathcal{M}_1}\right]=\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1}\end{array}\right. \qquad \tau_2\left[\overrightarrow{\mathbf{R_2}},\overrightarrow{\mathcal{M}_2}\right]=\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2}\end{array}\right.$$

On appelle **comoment** le produit de deux torseurs :

$$\tau_1\otimes\tau_2=\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1}\end{array}\right.\otimes\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2}\end{array}\right.=\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\times\overrightarrow{\mathcal{M}_2}+\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\times\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$$

Soient :

- $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{B})=\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{B})=\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

On calcule :

$$\mathbf{P_B}=\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{B})\end{array}\right.\otimes\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{B})\end{array}\right.=\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\times\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{B})+\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\times\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{B})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{B})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{B})=\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot(\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot(\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})$$

$$\Longrightarrow\ \mathbf{P_B}=\mathbf{P_A}+\underbrace{(\overrightarrow{\mathbf{R_1}},\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{R_2}})+(\overrightarrow{\mathbf{R_2}},\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{R_1}})}_{=\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{P_B}=\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})$$

$$\mathbf{P_B}=\mathbf{P_A}+\underbrace{(\overrightarrow{\mathbf{R_1}},\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{R_2}})+(\overrightarrow{\mathbf{R_2}},\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{R_1}})}_{=\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{P_B}=\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})$$

$$\mathbf{P_B}=\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_1}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_2}(\mathbf{A})+\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})+\overrightarrow{\mathbf{R_1}}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{R_2}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}})$$

$$\mathbf{P_B}=\mathbf{P_A}+(\overrightarrow{\mathbf{R_1}},\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{R_2}})+(\overrightarrow{\mathbf{R_2}},\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{R_1}})$$

- $\mathbf{P_A} = \mathbf{P_B}$
- $(\overrightarrow{\mathbf{R_1}}, \overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{R_2}}) + (\overrightarrow{\mathbf{R_2}}, \overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{R_1}}) = \mathbf{0}$
- $(\overrightarrow{\mathbf{R_1}}, \overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{R_2}}) = -(\overrightarrow{\mathbf{R_2}}, \overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{R_1}})$

***Propriété* 2.3**

$$[\tau_1] \cdot [\tau_2] = [\tau_2] \cdot [\tau_1]$$

$$[\tau_1] \cdot [\alpha \cdot [\tau_2] + \beta \cdot [\tau_3]] = \alpha \cdot [\tau_2] \cdot [\tau_1] + \beta \cdot [\tau_1] \cdot [\tau_3]$$

***Remarque* 2.1**

$$[\tau]^2 = \mathbf{0} \;\not\Rightarrow\; [\tau] = \mathbf{0}$$

$$\tau\left[\overrightarrow{\mathbf{R}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}\right] \implies \tau^2 = \tau \otimes \tau = \left| \begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}} \end{matrix} \right. \otimes \left| \begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}} \end{matrix} \right. = 2\overrightarrow{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathbf{0} \;\not\Rightarrow\; \tau = \mathbf{0}$$

Chapitre 3

Cinématique du solide

3.1 Introduction

La cinématique étudie les mouvements c'est à dire les déplacements au cours du temps, indépendamment des forces qui en sont la cause.

3.1.1 Rappels mathématiques :

On considère une base orthonormé $\mathbf{B}(\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}, \overrightarrow{\mathbf{k}})$

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{x}\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$$

$$\frac{\mathbf{d}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}}\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a_1}}\left|\begin{array}{l}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{y_1}\\ \mathbf{z_1}\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{\mathbf{a_2}}\left|\begin{array}{l}\mathbf{x_2}\\ \mathbf{y_2}\\ \mathbf{z_2}\end{array}\right.$$

$$\left.\frac{\mathbf{d}(\overrightarrow{\mathbf{a_1}} + \overrightarrow{\mathbf{a_2}})}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}} = \left.\frac{\mathbf{d}\,\overrightarrow{\mathbf{1}}}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}} + \left.\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{a_2}}}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}}$$

$$\left.\frac{\mathbf{d}\lambda\,\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}} = \lambda\left.\frac{\mathbf{d}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}}$$

$$\left.\frac{\mathbf{d}(\overrightarrow{\mathbf{a_1}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{a_2}})}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}} = \left.\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{a_1}}}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{a_2}} + \overrightarrow{\mathbf{a_2}} \wedge \left.\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{a_2}}}{\mathbf{dt}}\right._{/\mathbf{R}}$$

3.1.2 Produit mixte

$$\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{a_2}\wedge\overrightarrow{a_3})=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})$$

$$\frac{d(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})}{dt}_{/R}=(\frac{d\overrightarrow{a_1}}{dt}_{/R},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})+(\overrightarrow{a_1},\frac{d\overrightarrow{a_2}}{dt}_{/R},\overrightarrow{a_3})+(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\frac{d\overrightarrow{a_3}}{dt}_{/R})$$

Soit $\mathbf{B}(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\qquad \overrightarrow{a_{/R}}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$

Soit $\mathbf{B}'(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ $\qquad \overrightarrow{a_{/R'}}=X\,\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}$

$$\frac{d\vec{a}}{dt}_{/R}=\frac{dx}{dt}_{/R'}\vec{i}+\frac{dy}{dt}_{/R}\vec{j}+\frac{dz}{dt}_{/R}\vec{k}+x\frac{d\,\vec{i}}{dt}_{/R}+y\frac{d\,\vec{j}}{dt}_{/R}+z\frac{d\,\vec{k}}{dt}_{/R}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt}_{/R'}=\frac{dX}{dt}_{/R'}\vec{I}+\frac{dY}{dt}_{/R'}\vec{J}+\frac{dZ}{dt}_{/R'}\vec{K}+X\frac{d\,\vec{I}}{dt}_{/R'}+Y\frac{d\,\vec{J}}{dt}_{/R'}+Z\frac{d\vec{K}}{dt}_{/R'}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt}_{/R}=\frac{d\vec{a}}{dt}_{/R'}\text{ si seulement si }\frac{d\vec{I}}{dt}=\frac{d\vec{J}}{dt}=\frac{d\vec{K}}{dt}=0$$

$\Longrightarrow$ $\vec{I},\vec{J},\vec{K}$ sont fixes dans la base $\mathbf{B}'$

3.1.3 Champ d'un vecteur d'un solide :

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}\in(\mathbf{S})$ $\qquad \mathbf{d(A,B)=Cste}$ $\qquad$ Invariant

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{Cste}\quad\Longrightarrow\quad AB=l$$

$$\overrightarrow{AB}^2=l^2\quad\Longrightarrow\quad\frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt}_{/R}=0$$

$$2.\overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}_{/R}=0\quad\Longrightarrow\quad\overrightarrow{AB}\perp\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

Or

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}_{/R}=\frac{d(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})}{dt}_{/R}=\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}_{/R}-\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}_{/R}=\vec{V}(B)_{/R}-\vec{V}(A)_{/R}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{V}(B)-\vec{V}(A))=0\quad\Longrightarrow\quad\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(B)-\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(A)=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(B)-\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(A)=0$$

3.1.4 Propriété d'équiprojectivité

Conclusion **3.1**

Le champ de vitesse est équiprojectif

Or tout champ équiprojectif est antisymétrique

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$\vec{\Omega}_{S/R}$ *vitesse instantanée de rotation de* $\mathbf{S}/\mathbf{R}$

3.1.5 Torseur cinématique :

Le torseur cinématique est défini en un point $\mathbf{A} \in (\mathbf{S})$ par ses deux éléments de réduction et que l'on représente sous la forme suivante :

$$[\mathbf{V}]_{A\in(S)} = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_O} \\ \vec{V}_{A\in(S)/R_O} \end{bmatrix}$$

3.1.6 Cas particuliers :

- **Mouvement de translation**

On dit qu'un solide $(\mathbf{S})$ a **un mouvement de translation** par rapport à R, si les bipoints formés à partir de deux points quelconques restent équipollent au cours du mouvement.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est invariant au cours de temps :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Cste} \Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{/R} = \vec{0}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{/R} - \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{/R} = 0 \Longrightarrow \vec{V}(B)_{/R} = \vec{V}(A)_{/R}$$

Or

$$\vec{V}(B)_{/R} = \vec{V}(A)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

- **Mouvement de translation**

$$\vec{V}(B) = \vec{V}(A) \Longrightarrow \vec{\Omega}_{S/R} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A}$$

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{0}$$

▶ **Rotation autour d'un axe fixe de R :**

***Hypothèse* 3.1**

On suppose que les deux points sur l'axe $\overrightarrow{\mathbf{Oz}}$ *ont une vitesse nulle*

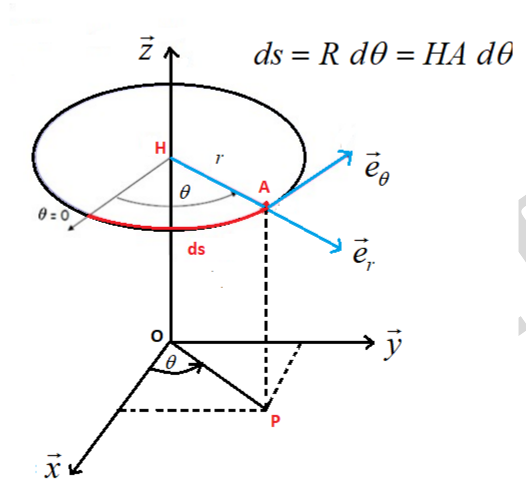
$$\mathbf{A} \in (\mathbf{S}) \qquad \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \underbrace{\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{O})}_{=\mathbf{0}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OA}}$$

Or

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HA}} = \mathbf{OH}\vec{\mathbf{e_z}} + \mathbf{HA}\vec{\mathbf{e_r}}$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \underbrace{\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{O})}_{=\mathbf{0}} + \vec{\Omega}_{\mathbf{S/R}} \wedge (\mathbf{OH}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} + \mathbf{HA}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) \tag{3.1}$$

3.1.7 Rotation autour d'un axe fixe de R :



***Hypothèse* 3.2**

Or le point $\mathbf{A}$ *décrit un cercle de rayon* $\overrightarrow{\mathbf{HA}}$

$$\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{d}\,\vec{\mathbf{s}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R}}\vec{\mathbf{e_r}} = \mathbf{HA}\frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e_r}} = \mathbf{HA}\frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R}}\vec{\mathbf{e_r}} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{d}\,\vec{\mathbf{s}} = \overrightarrow{\mathbf{HA}}\mathbf{d}\theta \quad / \quad \frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e_z}} = \vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{\mathbf{e_z}}$$

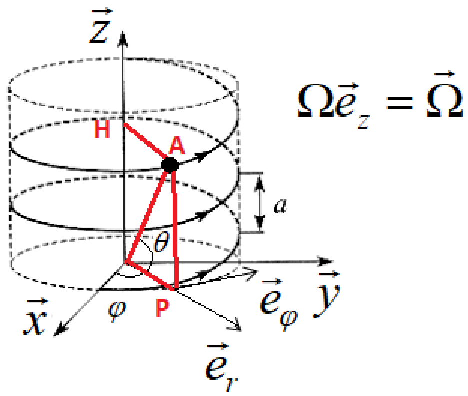
En comparant (3.1) *et* (3.2)

$$\Longrightarrow \vec{\Omega}_{\mathbf{S/R}} = \dot{\Omega}\vec{\mathbf{e_z}} \quad (\vec{\Omega} \parallel \vec{\mathbf{O_z}})$$

Les torseurs cinématique se réduit en un glisseur

3.1.8 Mouvement hélicoïdal :

dont l'axe $\overrightarrow{\mathbf{Oz}}$ $(\overrightarrow{\mathbf{V}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}})$



$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HA}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HP}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{A})_{/\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OA}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OH}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OP}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{H})_{/\mathbf{R}} + \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{P})_{/\mathbf{R}}$$

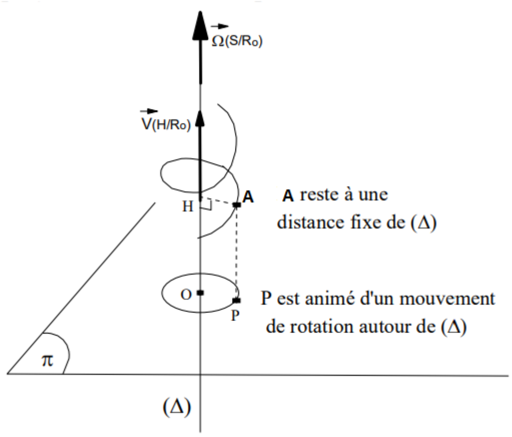
$$\text{Or} \quad \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{P}) = \underbrace{\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O})}_{=\mathbf{0}} + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OP}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{H}) + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{HA}} = \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{H}) + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OP}}$$

Dans ce cas on dit que le trajectoire de **A** est hélicoïdal.

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{x(t)} = \mathbf{R}\cos(\mathbf{\Omega t} + \mathbf{C}) \\ \mathbf{y(t)} = \mathbf{R}\sin(\mathbf{\Omega t} + \mathbf{C}) \\ \mathbf{z(t)} = \frac{\mathbf{d}\lambda}{\mathbf{dt}}\mathbf{t} + \mathbf{z_o} \quad \textbf{avec} \quad (\overrightarrow{\mathbf{OH}} = \lambda(\mathbf{t})\overrightarrow{\mathbf{z}}) \end{array} \right.$$

Dans ce cas on dit que la trajectoire de **A** est hélicoïdale



3.1.9 Cas particuliers :

▶ **Mouvement arbitraire d'un solide :**

Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \in (\mathbf{S})$ $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{A/R}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{B/R}} + \vec{\Omega}_{\mathbf{S/R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{BA}}$

On suppose que le mouvement est quelconque et on cherche le lieu de points tel que $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{H})$ soit colinéaire avec $\vec{\Omega}_{\mathbf{S/R}}$

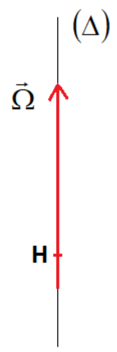
$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{vmatrix} \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \lambda \vec{\Omega}_{\mathbf{S/R}} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AH}} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{H})$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \lambda\mathbf{\Omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{A} \\ \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{A} \\ \dot{\mathbf{z}}_\mathbf{A} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathbf{A} \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_\mathbf{A} \\ \mathbf{z} - \mathbf{z}_\mathbf{A} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}_\mathbf{A} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{A}}{\mathbf{\Omega}} \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathbf{A} - \frac{\dot{\mathbf{y}}_\mathbf{A}}{\mathbf{\Omega}} \\ \lambda\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{z}}_\mathbf{A} \end{vmatrix}$$

Ce lieu est appelé **axe centrale du torseur cinématique** $//\mathbf{\Omega}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$

3.1.10 Cas particuliers :

Soit $\mathbf{H} \in (\mathbf{\Delta})$ $\quad \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{H}) = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AH}} \quad \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{H}) = \lambda\mathbf{\Omega}_{\mathbf{S/R}} + \overrightarrow{\mathbf{AH}} \wedge \vec{\Omega}_{\mathbf{S/R}}$



- Si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{0} \implies$ **mouvement de translation**
- Si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \neq \overrightarrow{0} \implies$ **mouvement de rotation autour de l'axe** (Δ)
- Si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{V}(H) \neq \overrightarrow{0} \implies$ **mouvement hélicoïdale**

3.2 Angles d'Euler

Soit $\mathbf{R_o}(\mathbf{O}, \mathbf{x_o}, \mathbf{y_o}, \mathbf{z_o})$ en repère absolue et $\mathbf{R_1}(\mathbf{O}, \omega, v, \mathbf{z_o})$ en repère lié au solide $(\mathbf{S})$

$$\mathbf{R_o}(\mathbf{O}, \mathbf{x_o}, \mathbf{y_o}, \mathbf{z_o}), \quad \mathbf{R_1}(\mathbf{O}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z_o}), \quad \mathbf{R_2}(\mathbf{O}, \mathbf{u}, \omega, \mathbf{z}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R_3}(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$R_o(O, x_o, y_o, \mathbf{z_o})$

$\xrightarrow{\psi/\mathbf{z_o}}$ Angle de précession

$R_1(O, u, v, \mathbf{z_o})$

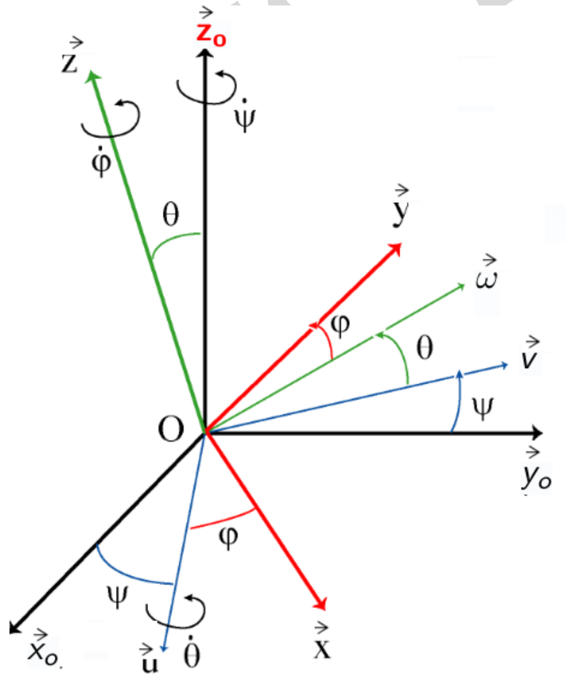
$\xrightarrow{\theta/u}$ Angle de nutation

$R_2(O, u, \omega, \mathbf{z})$

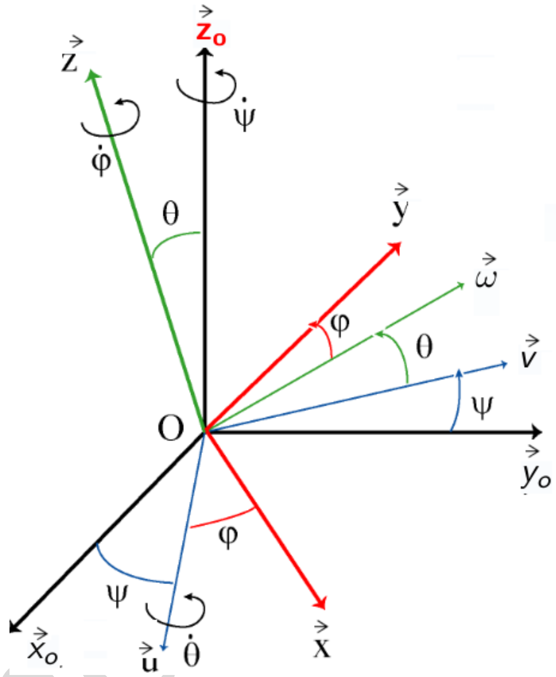
$\xrightarrow{\varphi/\mathbf{z}}$ Angle de rotation propre

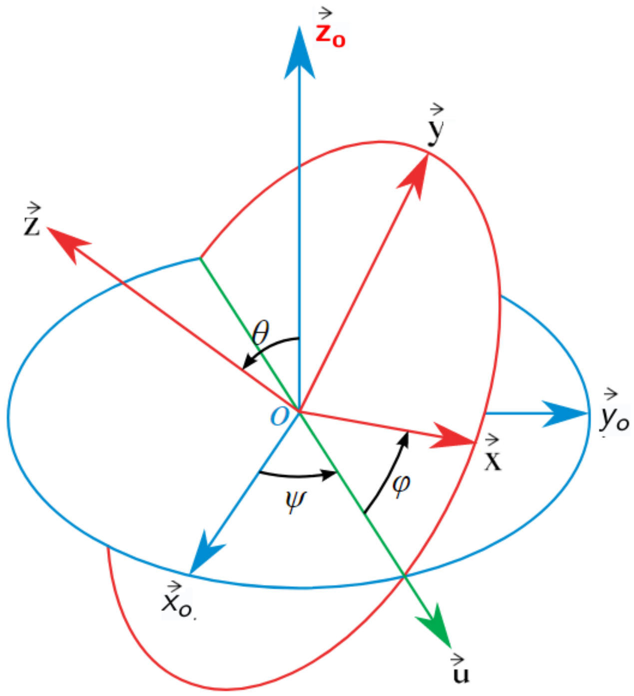
$R_3(O, x, y, \mathbf{z})$

- ψ Angle de précession
- θ Angle de nutation
- φ Angle de rotation propre



- ψ Angle de précession
- θ Angle de nutation
- φ Angle de rotation propre





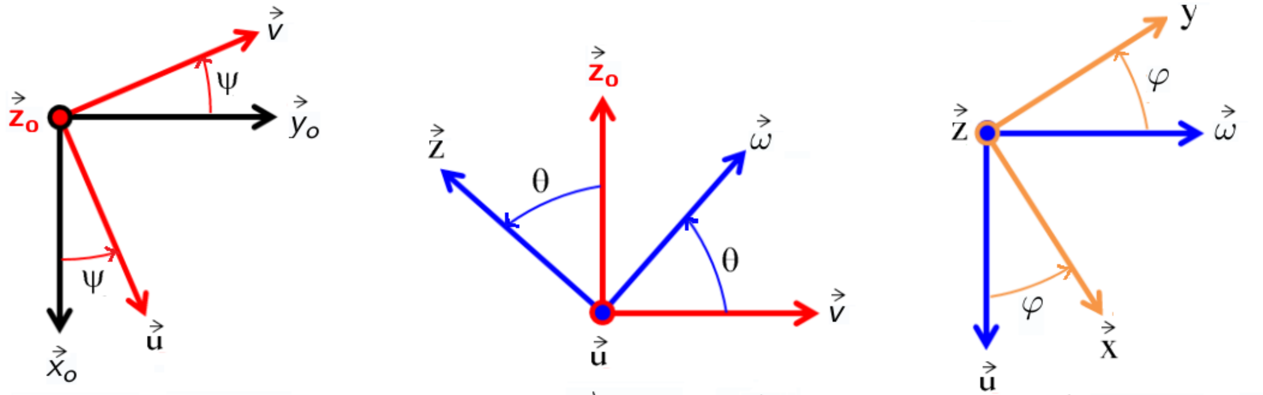
$\vec{u}$ vecteur unitaire dans la direction de $\vec{z_0} \wedge \vec{z}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{z}_0 \wedge \vec{z}}{\|\vec{z}_0 \wedge \vec{z}\|}$$

Le vecteur de vitesse instantané de rotation

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{R_3/R_0} = \vec{\Omega}_{R_3/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0}$$

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi}\vec{Z} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{z}_0$$



$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \qquad \vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\theta}\,\vec{u} \qquad \vec{\Omega}_{R_3/R_2} = \dot{\varphi}\,\vec{z}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{z}_0}$$

Soit **A** un point de (**S**) $\quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}(\psi(t), \theta(t), \varphi(t))$

$$\vec{V}_{A/R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{/R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}\right|_{/R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right|_{/R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right|_{/R_0}$$

$$= \dot{\psi}\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\psi}\right|_{/R_0} + \dot{\varphi}\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\varphi}\right|_{/R_0} + \dot{\theta}\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\theta}\right|_{/R_0}$$

Or

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\psi}\right|_{/R_0} = \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{OA} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\varphi}\right|_{/R_0} = \vec{Z} \wedge \overrightarrow{OA} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\theta}\right|_{/R_0} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$\Longrightarrow$

$$\vec{V}_{A/R_0} = \dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{OA} + \dot{\varphi}\vec{Z} \wedge \overrightarrow{OA} + \dot{\theta}\vec{u} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_{A/R_0} = \underbrace{(\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{Z} + \dot{\theta}\vec{u})}_{=\vec{\Omega}_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_{A/R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}(A) = \vec{V}(O) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

3.3 Dérivé d'un vecteur lié à un solide

Soient A et B deux points de (S)

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \overrightarrow{Cst} \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

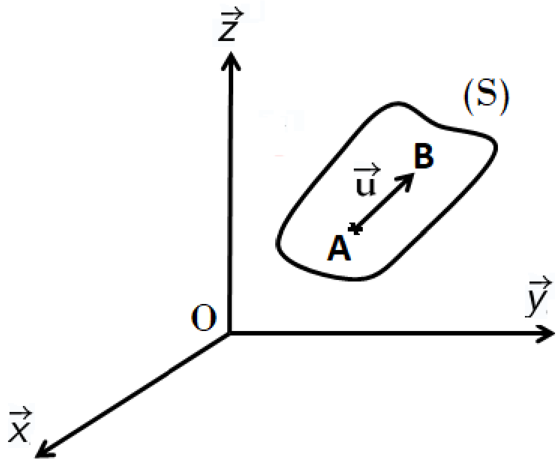
$$\frac{d\vec{u}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}_{/R} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}_{/R}$$

$$= \vec{V}(B)_{/R} - \vec{V}(A)_{/R}$$

Or

$$\vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \forall (A, B) \in (S)$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(B) - \vec{V}(A) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$$



Soit $\vec{\Omega} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k} = \left| \begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array} \right.$

$$\frac{d\vec{i}}{dt}_{/R} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i} \quad \text{de même} \quad \frac{d\vec{j}}{dt}_{/R} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{k}}{dt}_{/R} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}$$

$$\vec{\Omega} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R} = \dot{p}\,\vec{i} + \dot{q}\,\vec{j} + \dot{r}\,\vec{k} + p\frac{d\,\vec{i}}{dt} + q\frac{d\,\vec{j}}{dt} + r\frac{d\,\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R'} + p(\vec{\Omega} \wedge \vec{i}\,) + q(\vec{\Omega} \wedge \vec{j}\,) + r(\vec{\Omega} \wedge \vec{k}\,)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R'} + \vec{\Omega} \wedge \underbrace{(p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k}\,)}_{=\vec{\Omega}}$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R'} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega}}_{=\vec{0}}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R'}$$

Réciproquement :

Si on considère

$$\frac{d\vec{u}}{dt}_{/R} = \frac{d\vec{u}}{dt}_{/R'} \quad / \quad \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}_{/R} = \frac{d\vec{u}}{dt}_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}$$

$\Longrightarrow$ vérifie si seulement si $\vec{\Omega}_{R'/R} = \alpha\,\vec{u}$ $\quad \vec{\Omega}_{R'/R}$ et $\vec{u}$ sont **colinéaires**

***Conséquences* 3.1**

(i) Si $\vec{u}$ est fixe par rapport $\mathbf{R_1}$, il est également fixe par rapport à $\mathbf{R}$.

(ii) Si la direction de $\vec{\Omega}$ est fixe dans $\mathbf{R}$, il est de même par rapport à $\mathbf{R_1}$.

(iii) Si l'axe instantané est fixe par rapport $\mathbf{R}$, il est de même par rapport à $\mathbf{R_1}$.

3.4 Champ des accélérations d'un solide

Soit $\mathbf{R_0}$ un repère orthonormé et soit $\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt}_{/R_0} = \frac{d\vec{V}(A)}{dt}_{/R_0} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}_{/R_0} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}_{/R_0}$$

$$= \vec{a}(A) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega} \wedge \underbrace{(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM})}_{\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}_{/R_0} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}}$$

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(A) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega} - \vec{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

Cas particuliers :

a) Mouvement de translation :

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{a}(M) = \vec{a}(A) \Longrightarrow \quad \text{Le champ est uniforme}$$

b) Mouvement de rotation autour d'une axe fixe

$$\vec{a}(M) = \underbrace{\dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{AM}}_{\text{tangentielle}} - \underbrace{\vec{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}}_{\text{radial}}$$

- L'accélération radiale $f(\vec{\Omega}) \neq 0$
- L'accélération tangentielle $f(\dot{\vec{\Omega}})$

$$\vec{\Omega} \neq \vec{0} \quad \vec{a}(M) = \vec{a}(A) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM})$$

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(A) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{AM} + \underbrace{\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega}}_{=0} - \vec{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(A) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{AM} - \vec{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{\Omega} \left| \begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{AM} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{a_x(M) = a_x(A) + \dot{r}y + \dot{q}z - \dot{r}^2x} \\ \mathbf{a_y(M) = a_y(A) - \dot{p}z + \dot{r}x - \dot{r}^2y} \\ \mathbf{a_z(M) = a_z(A) - \dot{q}x + \dot{p}y - \dot{r}^2z} \end{array}\right| = \vec{0}$$

deux cas possibles :

a/ $\mathbf{\dot{p} + \dot{q} \neq 0} \Longrightarrow \dot{\vec{\Omega}}$ est colinéaire à $\vec{\Omega}$

b/ $\mathbf{\dot{p} + \dot{q} = 0} \Longrightarrow \mathbf{\dot{p} = \dot{q} = 0}$

c) Mouvement hélicoïdal

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}} + \overrightarrow{\mathbf{PA}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HA}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{OP}}$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OA}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R_0}} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R_0}} + \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OP}}}{}\mathbf{dt}_{/\mathbf{R_0}} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})_{/\mathbf{R_0}} + \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{P})_{/\mathbf{R_0}}$$

Or

$$\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})_{/\mathbf{R_0}} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{H})_{/\mathbf{R_0}} \cdot \vec{\mathbf{e_z}} \text{ et } \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{P})_{/\mathbf{R_0}} = \vec{\mathbf{\Omega}}_{/\mathbf{R_0}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OP}}$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A})_{/\mathbf{R_0}} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})_{/\mathbf{R_0}} + \overrightarrow{\mathbf{AH}} \wedge \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{S}/\mathbf{R_0}}$$

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in (\mathbf{S}) \Longrightarrow \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A})_{/\mathbf{R_0}} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{B})_{/\mathbf{R_0}} + \vec{\Omega}_{\mathbf{S}/\mathbf{R_0}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{BA}}$$

On cherche le lieu de point tel que $\vec{\Omega}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

$$\vec{\mathbf{V}} \text{ colinéaire avec } \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{S}/\mathbf{R_0}} \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}^*$$

$$\Longrightarrow \lambda\vec{\Omega} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A})_{/\mathbf{R_0}} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{H})_{/\mathbf{R_0}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{S}/\mathbf{R_0}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{HA}}$$

$$\vec{\Omega}\left|\begin{array}{l} \mathbf{\dot{p}} \\ \mathbf{\dot{q}} \\ \mathbf{\dot{r}} \end{array}\right. \wedge \overrightarrow{\mathbf{HA}}\left|\begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \mathbf{\dot{q}z - \dot{r}y} \\ \mathbf{-\dot{p}z + \dot{r}x} \\ \mathbf{\dot{p}y - \dot{q}x} \end{array}\right.$$

Chapitre 4

Composition de mouvement

4.1 Rappel :

On considère deux repères $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$

$\mathbf{R_1}$: repère fixe ou absolue

$\mathbf{R_2}$: repère mobile (relatif par rapport $\mathbf{R_1}$)

a) Mouvement par rapport $\mathbf{R_1}$: **Mouvement absolu**

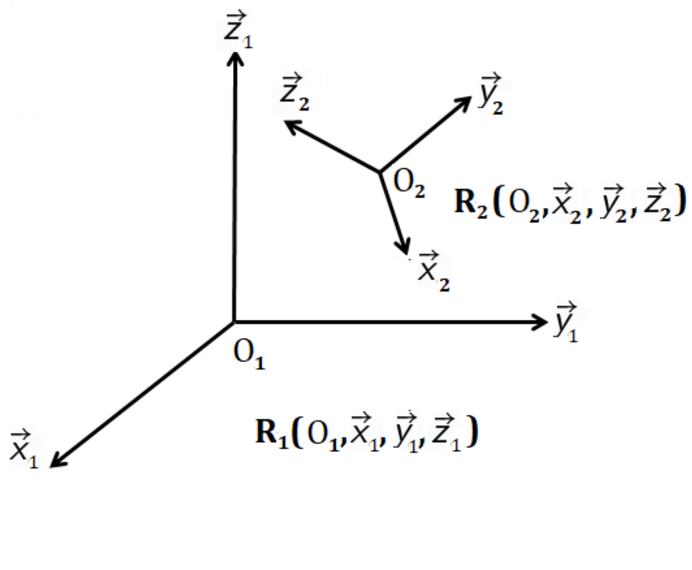
b) Mouvement par rapport $\mathbf{R_2}$: **Mouvement relatif**

Soit $\mathbf{M}$ un point mobile par rapport à $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$ $\quad \mathbf{M(x, y, z)}$

$$\overrightarrow{\mathbf{O_1M}} = \overrightarrow{\mathbf{O_1O_2}} + \overrightarrow{\mathbf{O_2M}}$$

Or

$$\left.\frac{\mathbf{d\vec{V}}}{\mathbf{dt}}\right|_{/\mathbf{R_1}} = \left.\frac{\mathbf{d\vec{V}}}{\mathbf{dt}}\right|_{/\mathbf{R_2}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{R_2/R_1}} \wedge \vec{\mathbf{V}}$$



$$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}_{/R_1} = \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}_{/R_1} + \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_1}$$

$$= \vec{V}(O_2)_{/R_1} + \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_1} \qquad \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_2}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(M) = \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}(O_{2/R_1}) + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \rightarrow O_2M$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \text{ avec } \vec{V}_e = \vec{V}(O_{2/R_1}) + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

4.2 Accélération :

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt}_{/R} = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{V}(M)}{dt}_{/R_1} \qquad \vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt}_{/R_1} \qquad \vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{V}_r$$

$$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Soit $\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}_{/R_1} = \frac{dX}{dt}\vec{i} + \frac{dY}{dt}\vec{j} + \frac{dZ}{dt}\vec{k} + X\frac{d\vec{i}}{dt} + Y\frac{d\vec{j}}{dt} + Z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}_{/R_1} = \frac{d\vec{u}}{dt_{/R_2}} + \underbrace{X.(\vec{\Omega} \wedge \vec{i}) + Y.(\vec{\Omega} \wedge \vec{j}) + Z.(\vec{\Omega} \wedge \vec{k})}_{=\vec{\Omega} \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k})}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}_{/R_1} = \frac{d\vec{u}}{dt}_{/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{u}$$

4.3 Généralisation :

On considère $\mathbf{n}$ repères $\mathbf{R_1} \cdots \mathbf{R_n}$. Soit $\mathbf{R_i}$ un repère absolu et $\mathbf{R_j}$ un repère mobile. Si on introduit un repère intermédiaire $\mathbf{R_k}(\mathbf{O_k}, \mathbf{x_k}, \mathbf{y_k}, \mathbf{z_k})$.

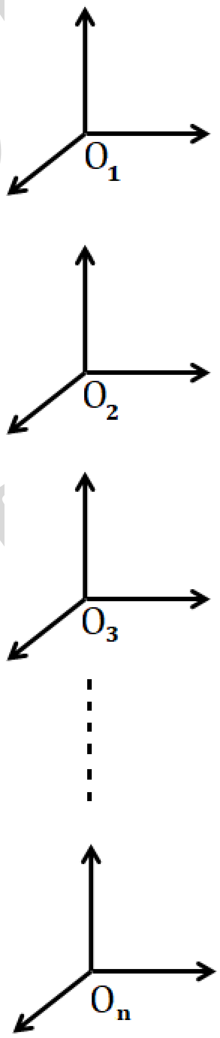
$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}}$$

Récurrence :

$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{3}}$$

$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{4}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{3}} + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}}$$

$$\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i+1}}$$



Si on considère $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$ une vitesse instantanée de rotation du repère $\mathbf{R_i}/\mathbf{R_j}$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{/R_i} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{/R_j} + \vec{\Omega}_{R_j/R_i} \wedge \vec{u}$$

Si on prend $\vec{\Omega}$ lié au repère R_k

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{/R_j} = \left.\frac{\vec{u}}{dt}\right|_{/R_k} + \vec{\Omega}_j^k \wedge \vec{u}$$

de même :

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{/R_j} = \vec{\Omega}_j \wedge \vec{u}$$

$$\Longrightarrow \vec{\Omega}_i^k \wedge \vec{u} = \vec{\Omega}_i^j \wedge \vec{u} + \vec{\Omega}_j^k \wedge \vec{u} = (\vec{\Omega}_i^j + \vec{\Omega}_j^k) \wedge \vec{u}$$

$$\Longrightarrow \vec{\Omega}_i^k = \vec{\Omega}_i^j + \vec{\Omega}_j^k$$

$$\Longrightarrow \vec{\Omega}_i^n = \sum_{i}^{n-1} \vec{\Omega}_i^{i+1}$$

***Exemple* 4.1**

Cas des angles d'Euler : $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$

Composition de l'accélération du point M lié à R_j/R_i

$$\vec{V}_i^k(M) = \vec{V}_i^j(M) + \vec{V}_j^k(M)$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_i^k(M) = \vec{a}_i^j(M) + \vec{a}_j^k(M) + 2\vec{\Omega}_i^j \wedge \vec{V}_j^k$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_i^n = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{a}_i^{i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \vec{\Omega}_j^{j+1} \wedge \vec{V}_i^{i+1}\right)$$

4.4 Mouvements inverses :

On considère deux repères R_1 et R_3

On passe de $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 = R_1$

$$\vec{V}_1^3 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^1 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^1 = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_1^2 = -\vec{V}_2^1 \text{ ou } \vec{V}_i^j = -\vec{V}_j^i$$

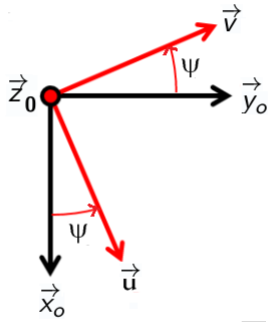
On a une formule analogique pour les accélérations angulaires

$$\vec{\Omega}_1^2 + \vec{\Omega}_2^1 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\Omega}_1^2 = -\vec{\Omega}_2^1$$

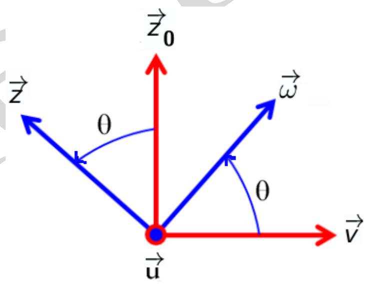
4.5 Cas de rotation d'un solide :

4.5.1 Cas de rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

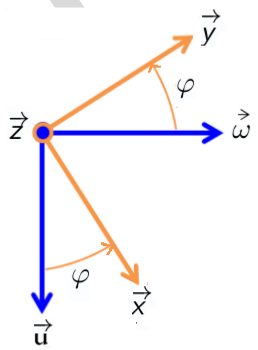
C'est le cas des angles d'Euler



$$\vec{v} = \cos\psi\,\vec{y_0} - \sin\psi\,\vec{x_0}$$
$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{x_0} + \sin\psi\,\vec{y_0}$$



$$\vec{v} = \cos\theta\,\vec{\omega} - \sin\theta\,\vec{z}$$
$$\vec{z_0} = \sin\theta\,\vec{\omega} + \cos\theta\,\vec{z}$$

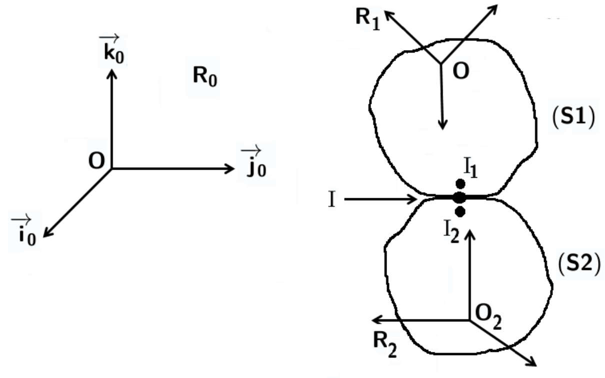


$$\vec{x} = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{\omega}$$
$$\vec{y} = -\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{\omega}$$

4.6 Cinématique des solides en contact :

4.6.1 Définition :

On considére deux solides $(\mathbf{S1})$ et $(\mathbf{S2})$ en mouvement par rapport à un référentiel $\mathbf{R_0}(\mathbf{O},\ \vec{\mathbf{i_0}},\ \vec{\mathbf{j_0}},\ \vec{\mathbf{k_0}})$ de manière à ce que leurs surfaces restent en contact ponctuel.



4.6.2 Définition :

A chaque instant, on doit distinguer 3 points confondus dont les vitesses et les accélérations sont différentes en général :

- le point matériel $\mathbf{I_1}$ $(\mathbf{I_1} \in \mathbf{S_1})$;
- le point matériel $\mathbf{I_2}$ $(\mathbf{I_2} \in \mathbf{S_2})$;
- le point géométrique $\mathbf{I}$ (non lié).

Au cours du temps, le point $\mathbf{I}$ est confondu avec les différents points matériels de contact.

4.6.3 Vitesse de glissement :

Le glissement décrit un mouvement relatif entre deux solides en contact.

Définition **4.1**

On appelle vitesse de glissement de $(\mathbf{S_1})$ *sur* $(\mathbf{S_2})$*, la vitesse de* $(\mathbf{I_1})$ *par rapport à* $(\mathbf{S_2})$*.*

Notation **4.1**

$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}}(\mathbf{S_1}/\mathbf{S_2}) = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I_1}/\mathbf{S_2}) = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_2}) \qquad (\mathbf{I_1} \in \mathbf{S_1}$ et $\mathbf{R_2}$ lié à $\mathbf{S_2})$

Autres expressions de cette vitesse

Nous considérons $\mathbf{R_0}$ absolu et $\mathbf{R_2}$ relatif et cherchons

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_0}) = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{I_1}) + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}(\mathbf{I_1})$$

Or

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{I_1}) = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_2}) = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}}(\mathbf{S_1}/\mathbf{S_2})$$

$$\vec{v}_e(\mathbf{I_1}) = \vec{v}(\mathbf{O_2}/\mathbf{R_0}) + \vec{\Omega}(\mathbf{R_2}/\mathbf{R_0}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{O_2 I_1}} = \vec{v}(\mathbf{I_2}/\mathbf{R_0}) \tag{4.1}$$

$$\vec{v}(\mathbf{O_2}/\mathbf{R_0}) = \vec{v}(\mathbf{I_2}/\mathbf{R_0}) + \vec{\Omega}(\mathbf{R_2}/\mathbf{R_0}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{I_1 O_2}} \tag{4.2}$$

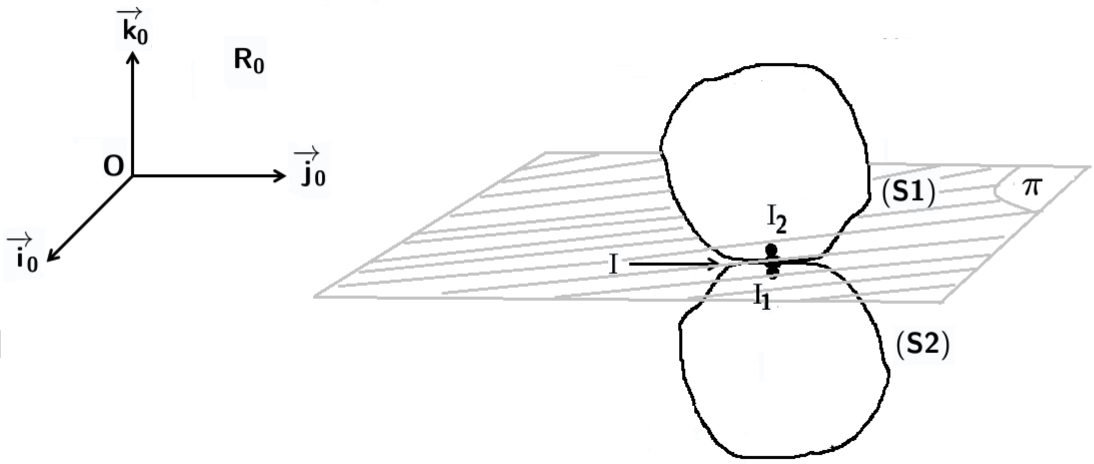
$$(4.1) \text{ et } (4.2) \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}_e(\mathbf{I_1}) = \vec{v}(\mathbf{I_2}/\mathbf{R_0})$$

$$\vec{v}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_0}) = \vec{v}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_2}) + \vec{v}(\mathbf{I_2}/\mathbf{R_0}) \Longrightarrow \vec{v}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_2}) = \vec{v}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_0}) + \vec{v}(\mathbf{I_2}/\mathbf{R_0}) = \vec{v}_g(\mathbf{S_1}/\mathbf{S_2})$$

De manière plus générale ($\forall$ le repère R) :

$$\vec{v}_g(\mathbf{S_1}/\mathbf{S_2}) = \left.\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{I_2 I_1}}}{\mathbf{dt}}\right|_{/\mathbf{R}} = \vec{v}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R}) - \vec{v}(\mathbf{I_2}/\mathbf{R})$$

C'est une vitesse indépendante du repère par rapport auquel **(S1)** et **(S2)** sont en mouvement, et elle est contenue dans le plan tangent (π) commun à **(S1)** et **(S2)**.



4.6.4 Démonstration :

La loi de composition des vitesses nous permet d'écrire :

$$\vec{v}(\mathbf{I}/\mathbf{R_0}) = \vec{v}(\mathbf{I}/\mathbf{R_1}) + \underbrace{\vec{v}(\mathbf{O_1}/\mathbf{R_0}) + \vec{\Omega}(\mathbf{R_1}/\mathbf{R_0}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{O_1 I}}}_{\vec{v}_e(\mathbf{I}) = \vec{v}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_0})}$$

$$\vec{v}(\mathbf{I}/\mathbf{R_0}) = \vec{v}(\mathbf{I}/\mathbf{R_1}) + \vec{v}(\mathbf{I_1}/\mathbf{R_0}) \qquad (\mathbf{R_1} \ \ \text{relatif})$$

$$\vec{v}(\mathbf{I}/\mathbf{R_0}) = \vec{v}(\mathbf{I}/\mathbf{R_2}) + \vec{v}(\mathbf{I_2}/\mathbf{R_0}) \qquad (\mathbf{R_2} \ \ \text{relatif})$$

or

$$\overrightarrow{\mathbf{v_g}}(\mathbf{S_1/S_2}) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(\mathbf{I_1/R_0}) - \overrightarrow{\mathbf{v}}(\mathbf{I_2/R_0})$$

donc

$$\overrightarrow{\mathbf{v_g}}(\mathbf{S_1/S_2}) = \underbrace{\overrightarrow{\mathbf{v}}(\mathbf{I/R_2})}_{\in\pi} - \underbrace{\overrightarrow{\mathbf{v}}(\mathbf{I/R_1})}_{\in\pi}$$

Chapitre 5

Cinétique du solide

5.1 Notion de masse :

Définition **5.1**

Un point matériel est un système matériel reproduit en un point géométrique auquel on associe une masse invariante (masse inerte).
A tout système $(\mathbf{S})$*, on associe un scalaire* $> \mathbf{0}$.

$$\mathbf{m(s)} = \int_{\mathbf{S}} \mathbf{dm}$$

5.1.1 Cas discret :

Soit $(\mathbf{S})$ un système matériel constitue de $\mathbf{n}$ masse $\mathbf{m_i(M_i)}$.
La masse de $(\mathbf{S})$:

$$\mathbf{m(s)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i}$$

Cas d'une ligne :

$$\mathbf{dm} = \rho\mathbf{ds} \quad \rho : \text{densité linéique} \quad \Longrightarrow \mathbf{m(s)} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{dm} = \int_{\mathcal{C}} \rho\mathbf{ds}$$

Cas d'une surface :

$$\mathbf{dm} = \rho\mathbf{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{m(S)} = \iint_{\mathcal{S}} \rho\mathbf{d}\sigma$$

Cas d'un volume :

$$\mathbf{dm} = \rho \mathbf{d}v \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{m(S)} = \iiint_{\infty} \rho \mathbf{d}v$$

Généralisation :

$$\mathbf{m(s)} = \int_{\infty} \rho \mathbf{d}\omega \qquad \rho = \rho(\mathbf{m}, \mathbf{t}) \qquad \textbf{avec} \qquad \mathbf{d}\omega \left| \begin{array}{ll} \mathbf{ds} & \text{ligne} \\ \mathbf{d}\sigma & \text{surface} \\ \mathbf{d}v & \text{volume} \end{array} \right.$$

5.2 Centre d'inertie :

C'est le point $\mathbf{G}$ défini par :

$$\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \mathbf{dm}$$

5.2.1 Cas particulier :

Si $(\mathbf{S})$ est constitué de $\mathbf{n}$ points matériels disjoints $(\mathbf{S_i})$ $[\mathbf{m_i}, \mathbf{M_i}]$;

$$\mathbf{S} = \bigcup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{S_i} \qquad \mathbf{S_i} \bigcap \mathbf{S_j} = \varnothing$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \mathbf{dm}}{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i}} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM_i}} \mathbf{dm_i}}{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i}}$$

Or

$$\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \mathbf{dm} \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i} \overrightarrow{\mathbf{OG_i}}}{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i}}$$

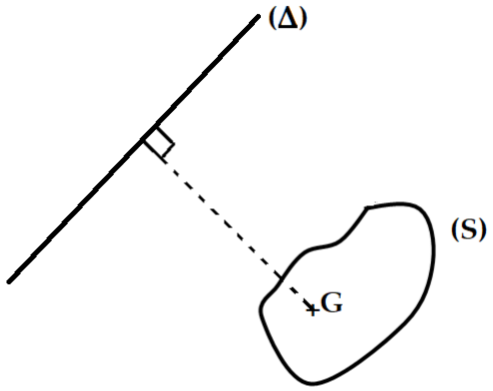
$\mathbf{G}$: **Barycentre des points $\mathbf{G_i}$ affectés des masses $\mathbf{m_i}$**

5.3 Moments d'inertie :

Soit un solide $(\mathbf{S})$ de centre de gravité $\mathbf{G}$ et une droite $(\mathbf{\Delta})$

Le moment d'inertie de $(\mathbf{S})$ par rapport $\mathbf{\Delta}$ est :

$$I_{/\Delta} = \int_{(S)} r^2 dm$$



Exemple :

$$I_{/ox} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{/oy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{/oz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

5.4 Théorème d'Huygens :

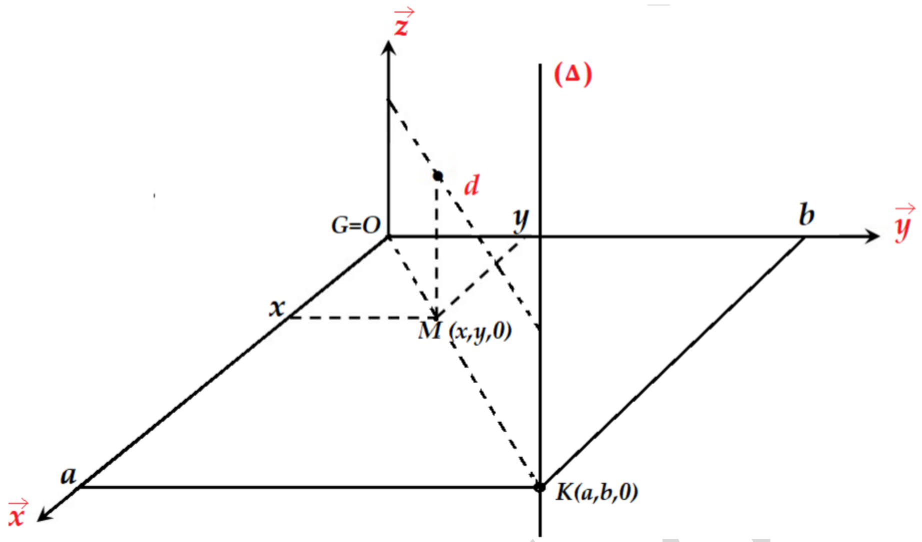
On choisit Δ tel que $\quad \Delta // \vec{z} \quad$ et $\quad \Delta_G$

$$I_{/\Delta} = \int_{(S)} [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm = I_{/\Delta_G} + (a^2 + b^2 \underbrace{-2ax - 2by}_{=0}) dm$$

$$= I_{/\Delta_G} + (a^2 + b^2) dm$$

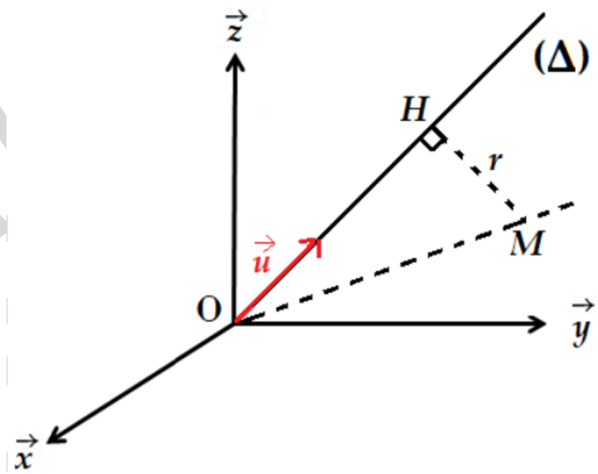
$$\int xdm = \int ydm = 0 \text{ (car } G \text{ est centre d'inertie de (S))}$$

$$I_{/\Delta} = I_{/\Delta_G} + md^2$$



5.5 Variation de I_Δ quant à Δ passe par un point fixe :

Soit $\mathbf{M} \in (\mathbf{S})$ et $\vec{\mathbf{u}} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur unitaire de $\boldsymbol{\Delta}$



$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HM}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{HM}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}} - \overrightarrow{\mathbf{OH}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{HM}}^2 = \mathbf{r}^2 = \overrightarrow{\mathbf{OM}}^2 - \overrightarrow{\mathbf{OH}}^2$$

$$\mathbf{I}_{/\Delta} = \int_{(\mathbf{S})} \mathbf{r}^2 \mathbf{dm} = \int \overrightarrow{\mathbf{OM}}^2 \mathbf{dm} - \int \overrightarrow{\mathbf{OH}}^2 \mathbf{dm}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}} = \mathbf{OH} \times \vec{\mathbf{u}} \quad (\vec{\mathbf{u}} \ \text{ vecteur unitaire de } \ \boldsymbol{\Delta})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}}^2 = \mathbf{OH}^2 \times \vec{\mathbf{u}}^2 = (\mathbf{OH} \times \vec{\mathbf{u}})^2$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \qquad \vec{\mathbf{u}}(\alpha, \beta, \gamma) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{I}_{/\Delta} = \underbrace{1}_{\star} \cdot \int \overrightarrow{\mathbf{OM}}^2 \mathbf{dm} - \int (\overrightarrow{\mathbf{OH}} \cdot \vec{\mathbf{u}})^2 \mathbf{dm}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array} \right. \quad et \quad \vec{\mathbf{u}} \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right.$$

$$(\star) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \mathbf{1}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{S}} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2) \mathbf{dm} - \int_{(\mathbf{S})} (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \gamma \mathbf{z})^2 \mathbf{dm}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{S}} = \alpha^2 \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2) \mathbf{dm}}_{\mathbf{A}} + \beta^2 \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{z}^2) \mathbf{dm}}_{\mathbf{B}} + \gamma^2 \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) \mathbf{dm}}_{\mathbf{C}} -$$

$$2\alpha\beta \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{xydm}}_{\mathbf{F}} - 2\beta\gamma \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{yzdm}}_{\mathbf{D}} - 2\alpha\gamma \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{xzdm}}_{\mathbf{E}}$$

$\mathbf{A} = \int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2) \mathbf{dm}$: s'appelle moment d'inertie de **(S)** par rapport à l'axe $\mathbf{O}\vec{\mathbf{x}}$.

$\mathbf{B} = \int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{z}^2) \mathbf{dm}$: s'appelle moment d'inertie de **(S)** par rapport à l'axe $\mathbf{O}\vec{\mathbf{y}}$.

$\mathbf{C} = \int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) \mathbf{dm}$: s'appelle moment d'inertie de **(S)** par rapport à l'axe $\mathbf{O}\vec{\mathbf{z}}$.

$$\mathbf{D} = \int_{(S)} \mathbf{yzdm}$$: s'appelle produit d'inertie par rapport au plan $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$.

$$\mathbf{E} = \int_{(S)} \mathbf{xzdm}$$: s'appelle produit d'inertie par rapport au plan $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}})$.

$$\mathbf{F} = \int_{(S)} \mathbf{xydm}$$: s'appelle produit d'inertie par rapport au plan $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$.

$$\left[\mathbf{I}\right] = \begin{pmatrix} \int_{S} (\mathbf{y^2 + z^2})\mathbf{dm} & -\int_{S} (\mathbf{xy})\mathbf{dm} & -\int_{S} (\mathbf{xz})\mathbf{dm} \\ -\int_{S} (\mathbf{xy})\mathbf{dm} & \int_{S} (\mathbf{x^2 + z^2})\mathbf{dm} & -\int_{S} (\mathbf{yz})\mathbf{dm} \\ -\int_{S} (\mathbf{xz})\mathbf{dm} & -\int_{S} (\mathbf{yz})\mathbf{dm} & \int_{S} (\mathbf{x^2 + y^2})\mathbf{dm} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}$ s'appelle la matrice d'inertie associée au solide $(\mathbf{S})$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{F} & -\mathbf{E} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{B} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{E} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{/\Delta} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma \end{pmatrix} \left[\mathbf{I}\right] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

***Remarque* 5.1**

On introduit une transformation linéarisé $\vec{\mathbf{v}} = \mathcal{I}(\vec{\mathbf{u}})$

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_{/\Delta} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \mathcal{I}(\vec{\mathbf{u}})$$

à cette application linéaire, on associe un tenseur d'inertie $\mathcal{I}$ *(du second ordre)*

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_{/\Delta} = \int_{(S)} \overrightarrow{\mathbf{OM}}^2 \mathbf{dm} - \int_{(S)} \overrightarrow{\mathbf{OH}}^2 \mathbf{dm} - \int_{(S)} (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \gamma \mathbf{z}) \mathbf{dm}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_{/\Delta} = \int_{(S)} \overrightarrow{\mathbf{OM}}^2 \times \mathbb{1} \times \mathbf{dm} - \int_{(S)} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{OM}} \mathbf{dm}$$

$\mathbb{1}$ tenseur unitaire $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathbf{OM}} \otimes \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x^2} & \mathbf{xy} & \mathbf{xz} \\ \mathbf{xy} & \mathbf{y^2} & \mathbf{yz} \\ \mathbf{xz} & \mathbf{yz} & \mathbf{z^2} \end{pmatrix}$

5.6 Rappel :

$\mathbf{I}$ est une matrice symétrique donc diagonalisable dont **les valeurs propres** λ vérifient :

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{det}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \text{valeur propres} \quad \lambda$$

Pour $\mathbf{n}=\mathbf{3}$, $\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

et

$$\mathbf{P}_\lambda(\mathbf{A})=\mathbf{det}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ 3 valeurs propres qui peuvent être confondues

- **1^er^ cas :** $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$$(\mathcal{I}(\overrightarrow{u_1})=\lambda\overrightarrow{u_1})\cdot\overrightarrow{u_2} \Longrightarrow \lambda\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{u_2}\mathcal{I}(\overrightarrow{u_1})=\lambda\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} \Longrightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0$$

Or

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_2}$$

$\Longrightarrow$ 3 axes principaux :

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \lambda_1=A \\ \lambda_2=B \\ \lambda_3=C \end{pmatrix}$ $\lambda_1=A$, $\lambda_2=B$ et $\lambda_3=C$ soient les moments principaux d'inertie par rapport aux axes $\mathbf{O}\overrightarrow{\mathbf{x}},\mathbf{O}\overrightarrow{\mathbf{y}},\mathbf{O}\overrightarrow{\mathbf{z}}$

- **2^e^ cas :** $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$, c'est le cas d'une symétrie de révolution.
  Si on prend l'axe de $O\overrightarrow{\mathbf{z}}$ associé à λz

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

– 3^e cas : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, c'est le cas de la symétrie :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

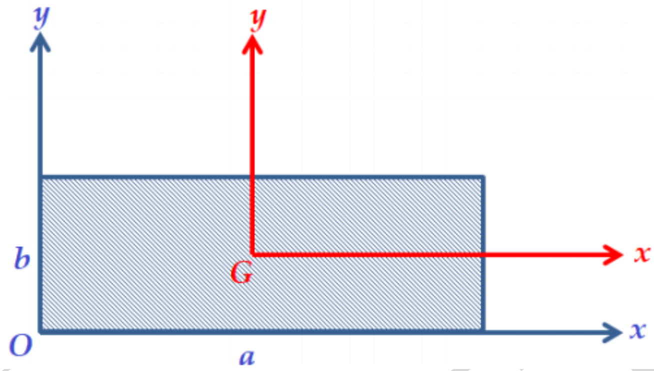
***Remarque* 5.2**

Si on a un axe de symétrie implique axe principale d'inertie

$$\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{yzdm} = \mathbf{0}$$

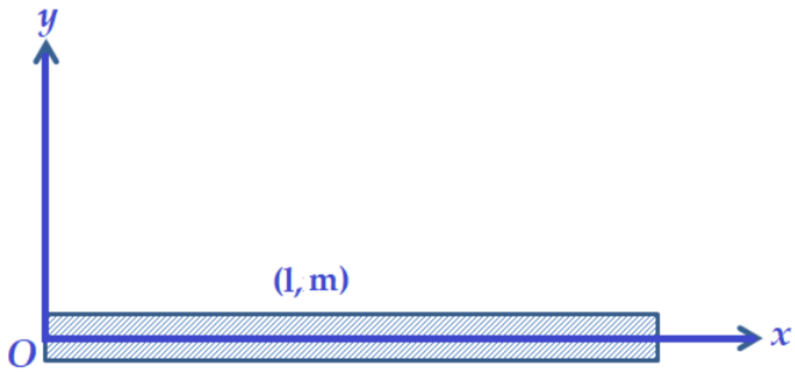
Rappel :

– **Cas d'une plaque plane :**
Si $\overrightarrow{\mathbf{Oz}}$ est l'axe principale d'inertie : $\mathbf{I}_{/\mathbf{Oz}} = \mathbf{I}_{/\mathbf{Ox}} + \mathbf{I}_{/\mathbf{Oy}}$



***Exemple* 5.1**

Barre homogène $(\mathbf{l}, \mathbf{m})$, *soit* $\mathbf{M} \in (\mathbf{S})$



$$\mathbf{I}_{/\mathbf{Oy}} = \int_{(\mathbf{S})} \mathbf{x^2dm} = \int_{(\mathbf{S})} \mathbf{x^2}\rho\mathbf{dx} = \rho \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{l}} \mathbf{x^2dx} = \rho \left[\frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3}}\right]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{l}}$$

$$\rho = \frac{m}{l} \Longrightarrow I_{/Oy} = \frac{m}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

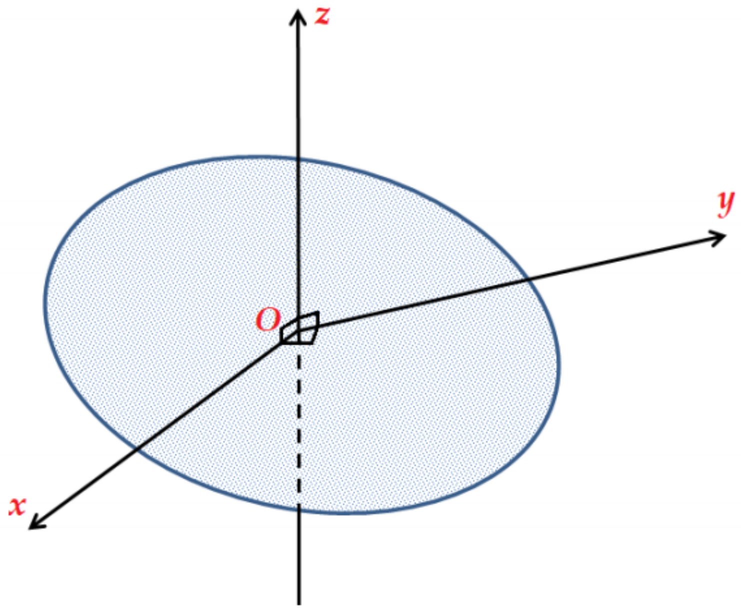
$$I_{/Ox} = \int_{(S)} y^2 dm = \int_{(S)} y^2 \rho dy = \rho \int_{(S)} y^2 dy = 0$$

Barre $(2l, m)$

$$I_{/Oy} = \frac{m}{2l}\frac{(2l)^3}{3} = \frac{4ml^2}{3}$$

5.6.1 Rappel :

– **Cas d'un disque homogène** :



L'axe Oz est axe principale d'inertie.

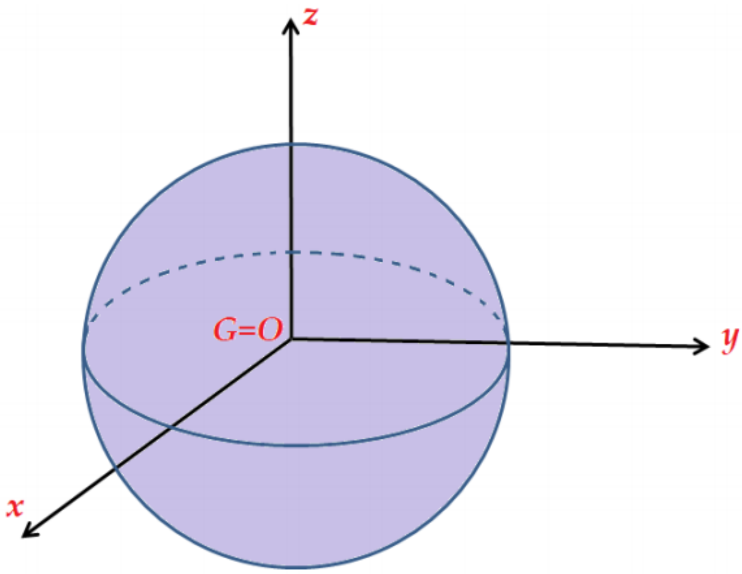
$$I_{/Oz} = I_{/Ox} + I_{/Oy}$$

$I_{/Ox} = \int_{(S)} r^2 dm$ or $dm = \rho dS$ et $\rho = \frac{m}{\pi R^2}$

$$I_{/Oz} = \rho \int_{(S)} r^2 2\pi r dr = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho\frac{R^4}{4} \Longrightarrow I_{/Oz} = 2\pi\frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{/Oz} = I_{/Ox} + I_{/Oy} = 2I \Longrightarrow I_{/Ox} = I_{/Oy} = \frac{I_{/Oz}}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

– **Cas d'une boule (sphère homogène) :**



$$\mathbf{I_{/O}} = \int_{(S)} (x^2+y^2+z^2)dm, \qquad \mathbf{I_{/Ox}} = \mathbf{I_{/Oy}} = \mathbf{I_{/Oz}} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm$$

$$\mathbf{I_{/Oy}} = \int_{(S)} (x^2+z^2)dm, \qquad \mathbf{I_{/Ox}} = \int_{(S)} (y^2+z^2)dm, \qquad \mathbf{I_{/Oz}} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm$$

$$\mathbf{I_{/O}} = \int_0^R r^2\rho 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho\frac{R^5}{5} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{m}{4\pi R^3}$$

$$2\mathbf{I_{/O}} = 2\int_{(S)} (x^2+y^2+z^2)dm$$

$$2\mathbf{I_{/O}} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm + \int_{(S)} (x^2+z^2)dm + \int_{(S)} (y^2+y^2)dm = 3\mathbf{I_{/Ox}}$$

$$\mathbf{I_{/Ox}} = \mathbf{I_{/Oy}} = \mathbf{I_{/Oz}} = \frac{2}{3}\mathbf{I_{/O}}$$

$$\mathbf{I_{/O}} = \int_{(S)} r^2 dm = \int_0^R r^2\rho 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho\frac{R^5}{5} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{m}{4\pi R^3}$$

$$\mathbf{I} = \int_{(S)} r^2 dm = \int_{(S)} r^2\rho dv = \int_{(S)} r^2\rho \times 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho\int_{(S)} r^4 dr$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_{/O} = \tfrac{3}{5}\mathbf{m}\mathbf{R}^2 \qquad \mathbf{v} = \tfrac{4}{3}\pi\mathbf{r}^3 \qquad \mathbf{dv} = 4\pi\mathbf{r}^2\mathbf{dr}$$

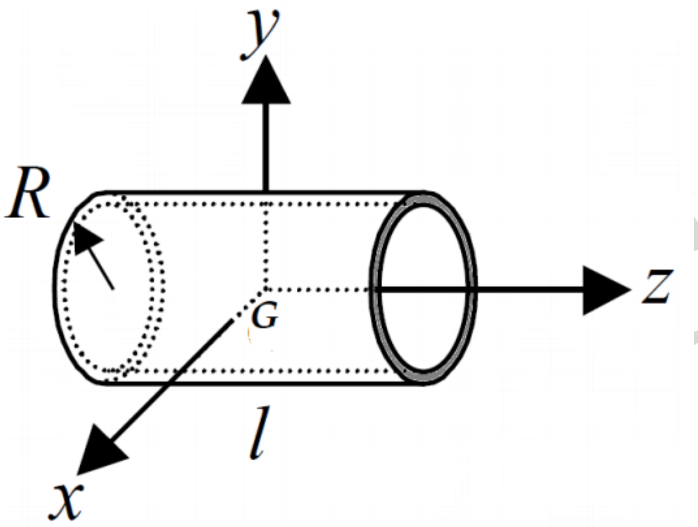
$$\mathbf{I}_{/O} = 4 \times \pi \times \rho \times \frac{\mathbf{R}^5}{5} \qquad \rho = \frac{\mathbf{m}}{4\pi\mathbf{R}^3}$$

$$\mathbf{I}_{/O} = 4 \times \pi \times \frac{\mathbf{m}}{4 \times \pi \times \mathbf{R}^3} \times \frac{\mathbf{R}^5}{5} \Longrightarrow \mathbf{I}_{/O} = \frac{3}{5}\mathbf{m}\mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{I}_{/Ox} = \mathbf{I}_{/Oy} = \mathbf{I}_{/Oz} = \frac{2}{3}\mathbf{I}_{/O} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}\mathbf{m}\mathbf{R}^2 = \frac{2}{5}\mathbf{m}\mathbf{R}^2$$

5.7 Exemples de matrices d'inertie (principales) :

- Cylindre creux (corps homogène de masse M)



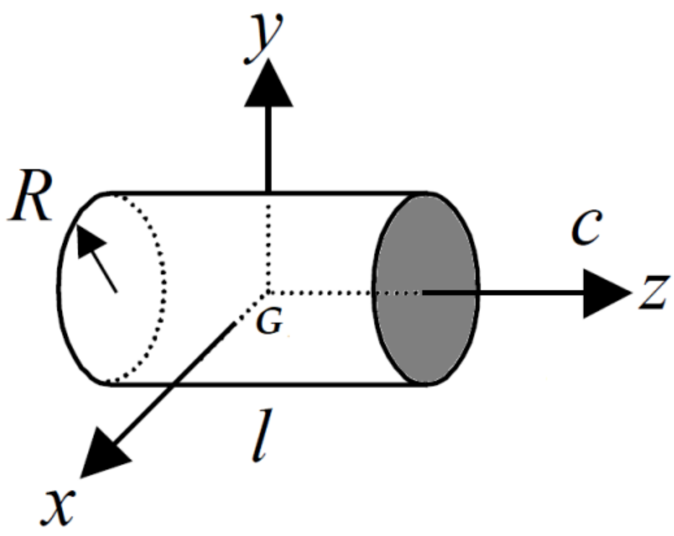
Moments et produits d'inertie

$$\mathbf{I}_{/xx} = \mathbf{I}_{/yy} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 + \frac{1}{12}\mathbf{M}l^2$$

$$\mathbf{I}_{/zz} = \mathbf{M}\mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{I}_{/G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 + \frac{1}{12}\mathbf{M}l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 + \frac{1}{12}\mathbf{M}l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}\mathbf{R}^2 \end{pmatrix}$$

▶ **Cylindre (corps homogène de masse M)**



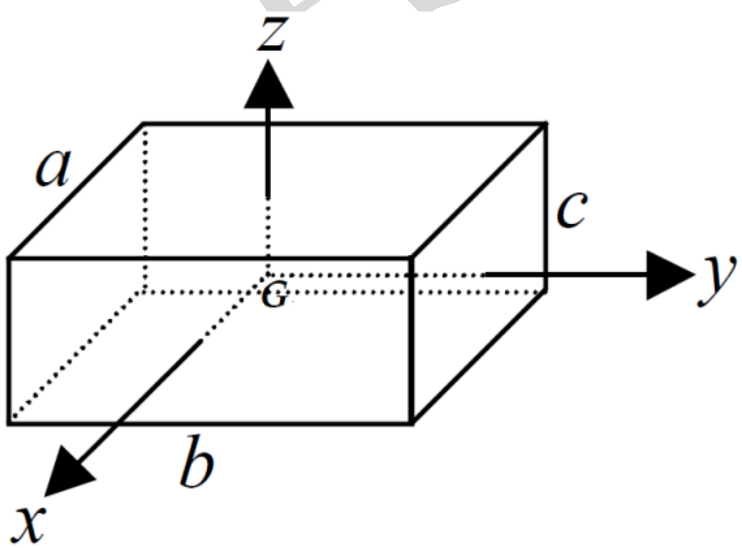
Moments et produits d'inertie

$$\mathbf{I}_{/xx} = \mathbf{I}_{/yy} = \frac{1}{4}\mathbf{MR^2} + \frac{1}{12}\mathbf{M}l^2$$

$$\mathbf{I}_{/zz} = \frac{1}{2}\mathbf{MR^2}$$

$$\mathbf{I}_{/G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\mathbf{MR^2} + \frac{1}{12}\mathbf{M}l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\mathbf{MR^2} + \frac{1}{12}\mathbf{M}l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathbf{MR^2} \end{pmatrix}$$

▶ **Parallélépipède rectangle (corps homogène de masse M)**



Moments et produits d'inertie

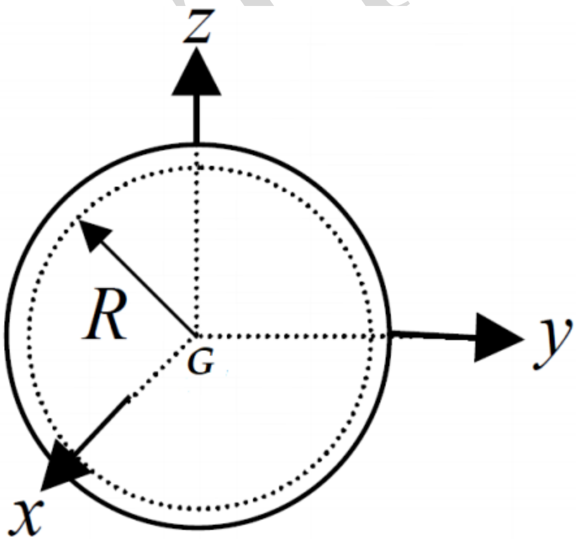
$$\mathbf{I}_{/\mathbf{xx}} = \frac{1}{12}\mathbf{M}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)$$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{yy}} = \frac{1}{12}\mathbf{M}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2)$$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{zz}} = \frac{1}{12}\mathbf{M}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\mathbf{M}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}\mathbf{M}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}\mathbf{M}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \end{pmatrix}$$

▶ **Sphère creuse (corps homogène de masse M)**

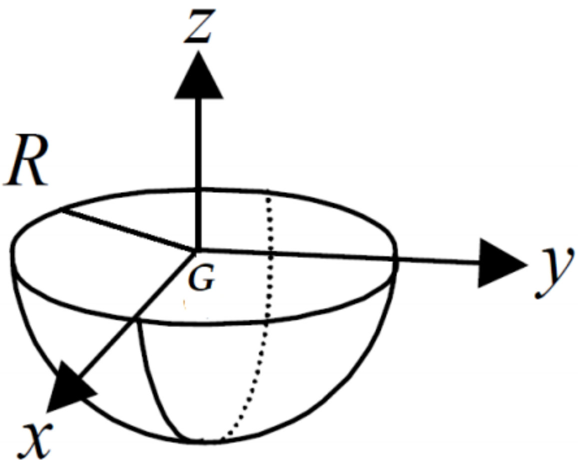


Moments et produits d'inertie

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{xx}} = \mathbf{I}_{/\mathbf{yy}} = \mathbf{I}_{/\mathbf{zz}} = \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 \end{pmatrix}$$

▶ **Demi-sphère creuse (corps homogène de masse M)**

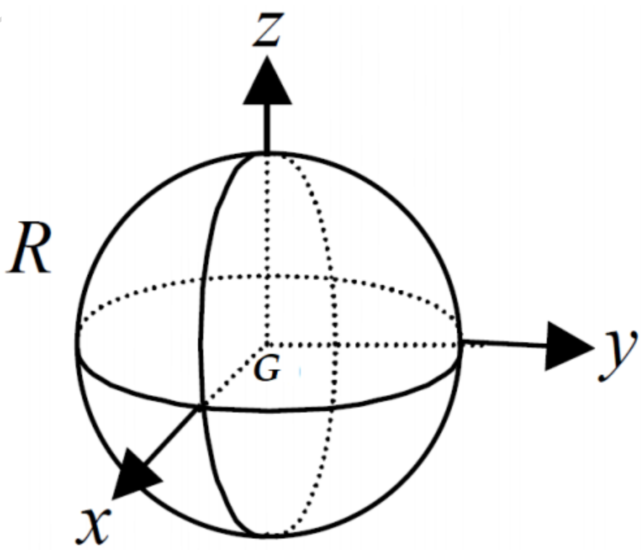


Moments et produits d'inertie

$$\mathbf{I}_{/xx} = \mathbf{I}_{/yy} = \mathbf{I}_{/zz} = \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{I}_{/G} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\mathbf{M}\mathbf{R}^2 \end{pmatrix}$$

- **Sphère pleine (corps homogène de masse M)**

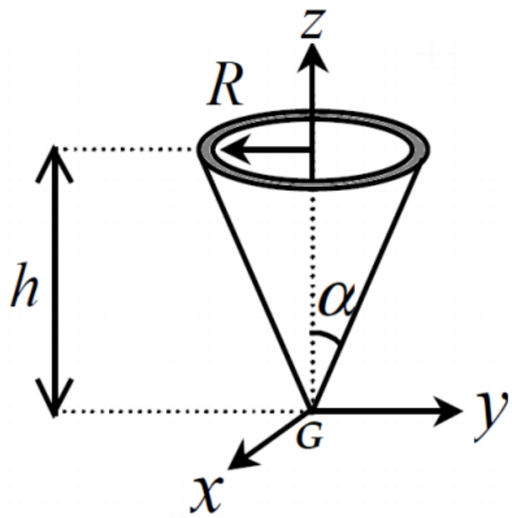


Moments et produits d'inertie

$$\mathbf{I}_{/xx} = \mathbf{I}_{/yy} = \mathbf{I}_{/zz} = \frac{2}{5}\mathbf{M}\mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{I}_{/G} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\mathbf{MR^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}\mathbf{MR^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}\mathbf{MR^2} \end{pmatrix}$$

- **Cône creux (corps homogène de masse M)**



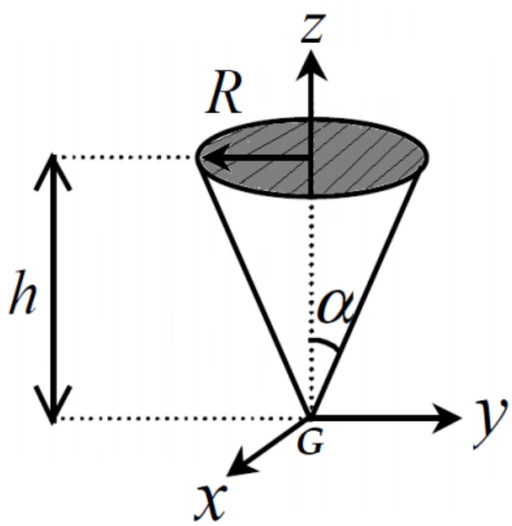
Moments et produits d'inertie

$$\mathbf{I}_{/xx} = \mathbf{I}_{/yy} = \frac{1}{4}\mathbf{MR^2} + \frac{1}{2}\mathbf{M}h^2$$

$$\mathbf{I}_{/zz} = \frac{1}{2}\mathbf{MR^2}$$

$$\mathbf{I}_{/G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\mathbf{MR^2} + \frac{1}{2}\mathbf{M}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\mathbf{MR^2} + \frac{1}{2}\mathbf{M}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathbf{MR^2} \end{pmatrix}$$

- **Cône plein (corps homogène de masse M)**



Moments et produits d'inertie

$$\mathbf{I}_{/xx} = \mathbf{I}_{/yy} = \frac{3}{5}\mathrm{M}h^2 + \frac{3}{10}\mathrm{MR}^2$$

$$\mathbf{I}_{/zz} = \frac{3}{5}\mathrm{MR}^2$$

$$\mathbf{I}_{/G} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\mathrm{M}h^2 + \frac{3}{10}\mathrm{MR}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}\mathrm{M}h^2 + \frac{3}{10}\mathrm{MR}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}\mathrm{MR}^2 \end{pmatrix}$$

5.8 Torseur cinétique

C'est un torseur τ défini par les quantités de mouvement $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{M})$
Il a pour éléments de réduction :

— **La résultante cinétique :**

$$\vec{\rho} = \int_{\mathbf{D}} \vec{v}(\mathbf{M})\mathbf{dm}$$

— **Le moment cinétique :**

$$\vec{\sigma} = \int_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \vec{v}(\mathbf{M})\mathbf{dm}$$

5.8.1 Exemple : cas d'une symétrie de révolution

$$\overrightarrow{\sigma_0} = \mathbf{I}\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\dot{\theta} \\ \mathbf{A}\dot{\psi}\sin\theta \\ \mathbf{C}(\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi}) \end{pmatrix}$$

5.9 Torseur dynamique :

Par définition c'est le torseur définie par la quantité d'accélération $\overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{M}).\mathbf{dm}$

– La résultante dynamique

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{M}).\mathbf{dm}$$

– Le moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta}_{\mathbf{0}} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{M}).\mathbf{dm}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{M}).\mathbf{dm} = \int_{(\mathbf{S})} \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})}{\mathbf{dt}}.\mathbf{dm} = \mathbf{m}\overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{G})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \mathbf{m}.\overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{G})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \textbf{masse totale} \times \textbf{quantité d'accélération}$$

– $\mathbf{m}$: **masse totale**

– $\overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{G})$: **quantité d'accélération**

Le moment cinétique est donné la relation suivante :

$$\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}} = \int_{(\mathbf{S})} (\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})).\mathbf{dm}$$

$$\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \int_{(\mathbf{S})} (\overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})).\mathbf{dm}$$

$$\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}}}{\mathbf{dt}} = \overrightarrow{\delta}_{\mathbf{0}} + \int_{(\mathbf{S})} \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{dt}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})\mathbf{dm}$$

$$\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}}}{\mathbf{dt}} = \overrightarrow{\delta}_{\mathbf{0}} + \int_{(\mathbf{S})} \underbrace{\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})}_{=\mathbf{0}} \mathbf{dm}$$

$$\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}}}{\mathbf{dt}} = \overrightarrow{\delta}_{\mathbf{0}}$$

5.9.1 Cas particulier :

Soit **A** un point mobile par rapport au repère **R**

$$\vec{\sigma}_{\mathbf{A}} = \int_{(\mathbf{S})} (\overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})).\mathbf{dm}$$

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\sigma}_{\mathbf{A}}}{\mathbf{dt}} = \vec{\delta}_{\mathbf{A}} + \int_{(\mathbf{S})} \underbrace{\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{AM}}}{\mathbf{dt}} \wedge \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})\,\mathbf{dm}}_{\mathbf{m}\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{G})\wedge\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A})}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\mathbf{d}\vec{\sigma}_{\mathbf{A}}}{\mathbf{dt}} = \vec{\delta}_{\mathbf{A}} + \mathbf{m}\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{G}) \wedge \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A})$$

Si

$$\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{G}) \wedge \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{G}) /\!\!/ \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A})$$

Remarque **5.3**

Dans le cas où le repère est mobile

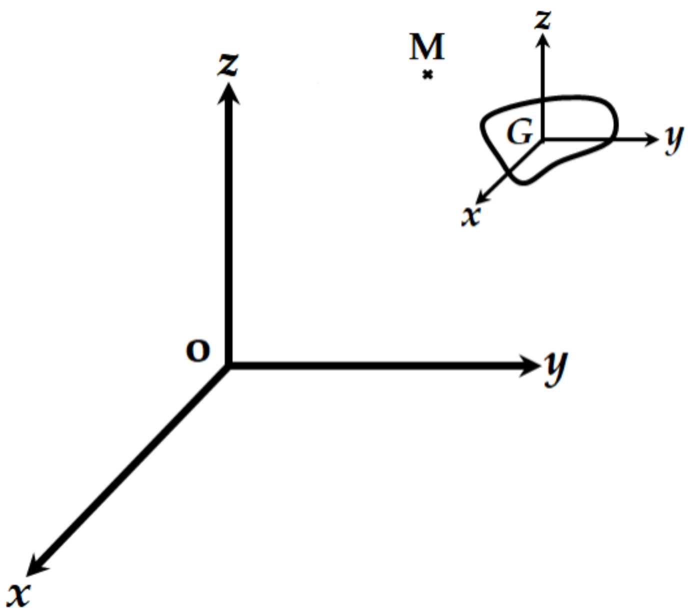
$$\vec{\delta}_{\mathbf{0}} = \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\vec{\sigma}_{\mathbf{0}})\right)_{\textit{absolue}} = \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\vec{\sigma}_{\mathbf{0}})\right)_{\textit{relatif}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_{\textit{relatif/absolue}} \wedge \vec{\sigma}_{\mathbf{0}}$$

5.10 Énergie cinétique :

Par définition c'est la quantité définie par,

$$\mathbf{E_C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int_{(\mathbf{S})} [\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})]^{\mathbf{2}} \mathbf{dm}$$

On considère un point $\mathbf{M}$ et un solide $(\mathbf{S})$ ayant un centre d'inertie $\mathbf{G}$



$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{OG}} + \overrightarrow{\mathbf{GM}}$$

$$\Longrightarrow \ \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G}) + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{GM}})$$

$$\mathbf{2E_C} = \int_{(S)} \left(\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G}) + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{GM}})\right)^{\mathbf{2}} \mathbf{dm}$$

$$\mathbf{2E_C} = \int_{(S)} \left[[\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G})]^{\mathbf{2}} + \underbrace{2.\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G}).\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{GM}})}_{=\mathbf{0}} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{GM}})^{\mathbf{2}} \right] \mathbf{dm}$$

$$\mathbf{2E_C} = \mathbf{m}[\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G})]^{\mathbf{2}} + \underbrace{\int_{(S)} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{GM}})^{\mathbf{2}}\mathbf{dm}}_{\text{le système dans son mouvement autour de G}}$$

Théorème de Koenigs

$$\mathbf{E_C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m}[\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G})]^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int_{(S)} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{GM}})^{\mathbf{2}}\mathbf{dm}$$

5.10.1 Cas particulier :

Soit $(\mathbf{S})$ un solide mobile autour d'un point fixe $(\mathbf{O})$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = \underbrace{\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O})}_{=\mathbf{0}} + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}$$

$$\mathbf{2E_C = m[\overrightarrow{V}(G)]^2} = \int_{(\mathbf{S})} (\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}})^{\mathbf{2}}\mathbf{dm}$$

$$\mathbf{2E_C} = \int_{(\mathbf{S})} (\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}})(\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}})\mathbf{dm}$$

$$\mathbf{2E_C} = \int_{(\mathbf{S})} (\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}, \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}})\mathbf{dm}$$

$$\mathbf{2E_C} = \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge (\underbrace{\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}}_{=\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})})\mathbf{dm}$$

$$\mathbf{2E_C} = \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})\mathbf{dm}}_{=\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}}}$$

$$\mathbf{2E_C} = \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}.\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}}$$

Or

$$\overrightarrow{\sigma}_{\mathbf{0}} = \mathbf{I}.\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}$$

donc

$$\mathbf{2E_C} = \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}.\mathbf{I}.\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}$$

Nous avons un produit 2 fois contracté

Soit

$$\overrightarrow{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{F} & -\mathbf{E} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{B} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{E} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

$$2E_C = \vec{\Omega}.I.\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$2E_C = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Fpq - 2Erp - 2Dqr$$

Nous avons une forme quadratique

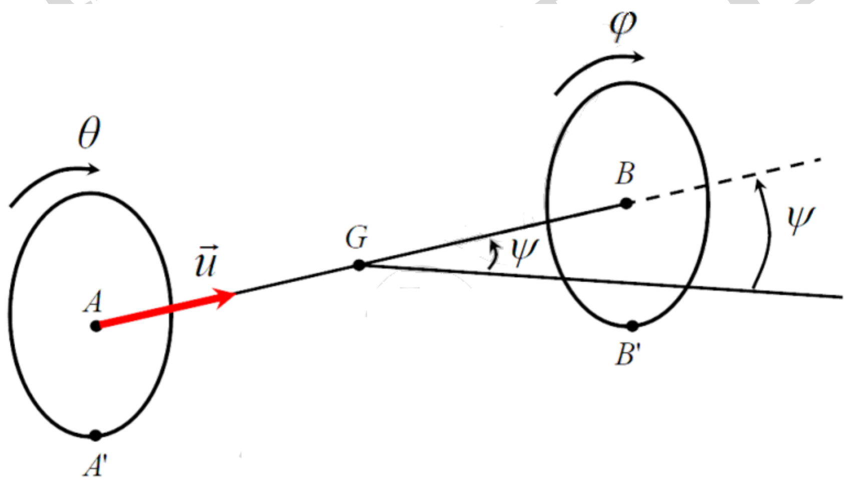
Remarque **5.4**

$$\overrightarrow{grad}(E_C) = \vec{\sigma}_0$$

$$\overrightarrow{grad}(E_C) = \vec{\sigma}_0 \begin{cases} Ap - Fq - Er \\ -Fp + Bq - Dr \\ -Ep - Dq + Cr \end{cases}$$

5.10.2 Exemple de calcul de l'énergie cinétique :

On considère un essieu constitué par une barre homogène $2l$ et deux roues « disques » $(r = a, m)$
(S) est constitué par la barre AB homogène $(2l, m)$ et deux roues $(r = a, m)$
G étant le centre de masse de (S)



$$T = \underbrace{E}_{cin}\text{ Translation} + \underbrace{E}_{cin}\text{ rotation}$$

$$2E_c = 2T = m\vec{V}^2(G) + \vec{\Omega}I\vec{\Omega}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{2E_c = 2T = m\overrightarrow{V}^2(G)} + \overrightarrow{\Omega}\mathbf{I}\overrightarrow{\Omega}$$

$$\mathbf{2E_c = 2T = (2M+m)(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{ml^2}{3}}\dot{\psi}^2 + \mathbf{\frac{Ma^2}{2}}\dot{\theta}^2 + \mathbf{2ml^2}\dot{\psi}^2 + \mathbf{\frac{Ma^2}{2}}\dot{\varphi}^2 + \mathbf{2\frac{ma^2}{4}}\dot{\psi}^2$$

$$\mathbf{2E_c = 2T = (2M+m)(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + (\frac{ml^2}{3} + 2ml^2 + 2\frac{ma^2}{4})}\dot{\psi}^2 + \mathbf{\frac{Ma^2}{2}}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

5.10.3 Le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{\mathbf{I}}\,\overrightarrow{\Omega}$$

$$\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{\sigma_0} + \mathbf{(2M+m)\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V}(G)}$$

$$= \mathbf{(2M+m)[-a\dot{y}\overrightarrow{x_1} + a\dot{x}\overrightarrow{y_1}] + (x\dot{y} - \dot{y}x)\overrightarrow{z}_1 + (\frac{ml^2}{3} + 2ml^2 + \frac{ma^2}{2})}\dot{\psi}\,\mathbf{\overrightarrow{z}_1} + \mathbf{\frac{Ma^2}{2}}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})(\cos\psi\,\mathbf{\overrightarrow{x_1}} + \sin\psi\,\mathbf{\overrightarrow{y_1}})$$

***Exemple* 5.2**

On considère 3 barres identiques $\mathbf{AC}$, $\mathbf{BD}$ *et* $\mathbf{CD}$ *et une masselotte* $\mathbf{P}$ *de masse* $\mathbf{M}$ /$\overrightarrow{\mathbf{CD}}$

$$\mathbf{2T} = \underbrace{\mathbf{\frac{2}{3}ml^2}\dot{\theta}^2 + \mathbf{ml^2}\dot{\theta}^2}_{\mathbf{E_c\ \ 3\ Barres}} + \underbrace{\mathbf{M\overrightarrow{V}(P)}}_{\mathbf{E_c\ \ masselotte}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HC}} + \overrightarrow{\mathbf{CP}} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{l}\cos\theta + \mathbf{x} \\ \mathbf{l}\sin\theta \\ \mathbf{0} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{2T = \frac{5}{3}ml^2}\dot{\theta}^2 + \mathbf{M(\dot{x}^2 + 2l}\cos\theta \times \dot{\theta} + \mathbf{l^2}\dot{\theta})$$

Chapitre 6

Principe fondamentale de la dynamique

6.1 Concepts utilisés en dynamique :

***Définition* 6.1**

La dynamique est l'étude du mouvement indépendant des causes qui les provoquent.

6.1.1 Repérage :

On utilise un repère absolu pour repérer les points d'un solide.

- **Invariance de la masse :** la masse est un scalaire au cours de temps
- **La mesure du temps chronomètre**
- **Forces**
  - **Forces concentrés** : $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \sum \overrightarrow{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$
  - **Forces réparties** :
    - sur une ligne
    - sur une surface
    - sur un volume
  - **Forces intérieurs** : $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{\mathbf{12}} + \overrightarrow{\mathbf{F}}_{\mathbf{21}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ (Principe de l'action et de la réaction forces exerce par une partie d'un solide sur l'autre partie)
  - **Forces extérieurs** : Soit les forces exercées sur le système (Poids, Réaction)
    - **Forces actives** : sont les données du problèmes connues
    - **Forces de liaison** : Forces de la réaction (inconnues)

***Exemple* 6.1**

— *Le poids :* $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ *force extérieur active*

— *La réaction* $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ *: force de liaison intérieur*

— *La force exercée sur les pédales inérieurs*

6.2 Loi fondamentale de la mécanique classique :

Principe **6.1**

Il existe un repère appelé repère absolue et un chronomètre (définissant le temps absolu) par rapport, nous avons l'énoncé suivant :

$$\underbrace{[\mathbf{A}]}_{\text{Torseur dynamique}} = \underbrace{[\mathbf{F_e}]}_{\text{Torseur des forces extérieurs}}$$

Remarque **6.1**

$$[\mathbf{F_e}] = \mathbf{0} \implies [\mathbf{A}] = \mathbf{0} \implies \mathbf{m}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{G}) = \overrightarrow{\mathbf{0}} \implies \mathbf{m}\frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G})}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R_0}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \implies \mathbf{m}\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G}) = \overrightarrow{\mathbf{cste}}$$

(Mouvement rectiligne et uniforme par rapport une rotation)

$$[\mathbf{A}] = \mathbf{0} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}[\mathbf{P}] = \mathbf{0} \implies \mathbf{m}\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{G}) = \overrightarrow{\mathbf{cste}}$$

Conséquences **6.1**

Soit $(\mathbf{S})$ *un système matériel tel que* $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cap \mathbf{S_2}$

— $[\mathbf{F_{e_1}}]$ *Forces exercées par* $\mathbf{S} \to (\mathbf{S_1})$

— $[\mathbf{F_{e_2}}]$ *Forces exercées par* $\mathbf{S} \to (\mathbf{S_2})$

— $[\mathbf{F_{e_i}}]$ *Torseur des forces exercées par* $(\mathbf{S})$ *sur* $\mathbf{S_i}$

— $[\mathbf{f_2}]$ *Torseur des forces extérieur exercés par* $\mathbf{S_i}$ *sur* $\mathbf{S_j}$

Conséquences **6.2**

Pour

$$(\mathbf{S_1}) \qquad [\mathbf{A_1}] = [\mathbf{F_{e1}}] + [\mathbf{f_{21}}]$$

$$(\mathbf{S_2}) \qquad [\mathbf{A_1}] = [\mathbf{F_{e2}}] + [\mathbf{f_{12}}]$$

Pour

$$(\mathbf{S}) \qquad [\mathbf{A}] = [\mathbf{A_1}] + [\mathbf{A_2}]$$

$$[\mathbf{A}] = \underbrace{[\mathbf{F_{e1}}] + [\mathbf{F_{e2}}]}_{[\mathbf{F_e}]} + [\mathbf{f_{21}}] + [\mathbf{f_{12}}]$$

Or

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{F_e}] \implies [\mathbf{f_{21}}] + [\mathbf{f_{12}}] = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{f_{21}}] = -[\mathbf{f_{12}}] \qquad \textit{\textbf{(Loi d'action et de réaction)}}$$

6.2.1 Changement de repère :

Tout repère animé d'un mouvement rectiligne et uniforme pour le même rôle qu'un repère absolue :

$$\overrightarrow{\mathbf{a_a}} = \overrightarrow{\mathbf{a_r}} + \cancel{\overrightarrow{\mathbf{a_c}}} + \cancel{\overrightarrow{\mathbf{a_e}}} \implies \overrightarrow{\mathbf{a_a}} = \overrightarrow{\mathbf{a_r}}$$

Donc tout repère animé d'un mouvement rectiligne uniforme est un repère galiléen dans lequel on applique le P.F.D.

Réciproque :

Tout repère dans lequel on peut appliqué le P.F.D. est un repère en translation rectiligne et uniforme (repère galiléen)

6.2.2 Méthode des mouvements relatifs :

Soit un repère R en mouvement quelconques par rapport au repère absolue :

$$\overrightarrow{\mathbf{a_a}} = \overrightarrow{\mathbf{a_r}} + \overrightarrow{\mathbf{a_c}} + \overrightarrow{\mathbf{a_e}} \implies \overrightarrow{\mathbf{a_a}} = \overrightarrow{\mathbf{a_r}} - \overrightarrow{\mathbf{a_c}} - \overrightarrow{\mathbf{a_e}}$$

$$\implies [\mathbf{A_r}] = [\mathbf{A_a}] - \underbrace{[\mathbf{A_c}] - [\mathbf{A_e}]}_{\text{Forces d'inertie}}$$

- $[\mathbf{A_e}]$: Torseur des forces d'inertie d'entrainement
- $[\mathbf{A_c}]$: Torseur des forces d'inertie complémentaires

Chapitre 7

Travail et puissance : théorème de l'énergie

7.1 Puissance d'une force

Pour un point matériel

$$\mathbf{P} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M})$$

7.1.1 Pour le cas d'un système matériel :

On considère un élément de masse $\mathbf{dm}$, soit cet élément agit la force $\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{dm}$, on définit la puissance

$$\mathbf{P} = \int_{(\mathbf{S})} \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) \cdot \vec{\mathbf{F}}\mathbf{dm}$$

$$[\mathbf{P}] = \left| \begin{array}{l} \vec{\mathbf{\Omega}} \\ \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{l} \vec{\mathbf{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{O}) \end{array} \right.$$

7.1.2 Cas d'un solide :

Soit $\mathbf{M} \in (\mathbf{S})$;

$$\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) + \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{S/R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathbf{P}} = \int_{(\mathbf{S})} (\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) + \vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{S/R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}})\vec{\mathbf{F}}\mathbf{dm} = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) \int_{(\mathbf{S})} \vec{\mathbf{F}}\mathbf{dm} + \vec{\Omega} \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \vec{\mathbf{F}}\mathbf{dm}$$

Or

$$\overrightarrow{\mathbf{R}} = \int\limits_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{F}}\,\mathbf{dm} \qquad\qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{O}) = \int\limits_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{F}}\,\mathbf{dm}$$

$$\Longrightarrow\ \overrightarrow{\mathbf{P}} = \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{R}} + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{S/R_O}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}$$

$$[\mathbf{P}] = \left|\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{R/R_O}} \\ \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) \end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{O}) \end{array}\right. \ \Longrightarrow\ [\mathbf{P}] = [\mathbf{V}] \otimes [\mathbf{F_e}]$$

7.2 Travail et puissance :

$$\mathbf{P} = \int\limits_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{f}}\,\mathbf{dm}$$

$\overrightarrow{\mathbf{f}}$ densité des forces

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O})$$

$$[\mathbf{P}] = \left|\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{R/R_O}} \\ \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) \end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{O}) \end{array}\right. \ \Longrightarrow\ [\mathbf{P}] = [\mathbf{V}] \otimes [\mathbf{F_e}]$$

7.3 Cas de forces intérieurs à un système :

Soit $(\mathbf{S})$ $\quad \mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2} \quad \mathbf{S_1} \cap \mathbf{S_2} = \varnothing$

Le torseur des forces intérieurs à $(\mathbf{S})$

$$[\mathbf{F_{ij}}] = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow\ [\mathbf{F_{12}}] + [\mathbf{F_{21}}] = [\mathbf{F_{ij}}] = \mathbf{0}$$

La puissance intérieure est nulle.

7.4 Travail :

La puissance $\mathcal{P}(t)$ évolue au cours du temps, le travail accompli entre deux instants $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$ est donnée par la relation

$$\frac{\mathbf{d}\mathcal{W}}{\mathbf{dt}} = \mathcal{P}(\mathbf{t}) \implies \mathcal{W} = \mathcal{T} = \int\limits_{\mathbf{t_1}}^{\mathbf{t_2}} \mathcal{P}(\mathbf{t})$$

7.4.1 Cas ou le système est formé par un solide et ou un point :

Dans le cas général le point $\mathbf{M}$ est repéré par les paramètres :

$$\mathbf{q_i} \;\; (\mathbf{i}=\mathbf{1},\cdots,\mathbf{n}) \quad \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}}(\mathbf{q_i},\mathbf{i}=\mathbf{1},\cdots,\mathbf{n}) = \mathbf{M}(\mathbf{q_i}) \;\; \mathbf{i}=\mathbf{1},\cdots,\mathbf{n}$$

$$\Longrightarrow \; \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R_O}} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\mathbf{dq_i}} \times \frac{\mathbf{dq_i}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R_O}}$$

Soit

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q_i}} \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i} \quad \textbf{avec} \quad \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i} = \frac{\mathbf{dq_i}}{\mathbf{dt}}$$

Exemple **7.1**

Pendule double

$$\mathbf{q_1} = \alpha, \quad \mathbf{q_2} = \beta, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\alpha,\beta)$$

$$\mathbf{P} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})\overrightarrow{\mathbf{F}}\mathbf{dm} = \int_{(\mathbf{S})} \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} (\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q_i}} \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i})\overrightarrow{\mathbf{F}}\mathbf{dm} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \int_{(\mathbf{S})} (\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q_i}} \overrightarrow{\mathbf{F}}\mathbf{dm})\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{Q_i}\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q_i} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{M}}}{\partial \mathbf{q_i}} \overrightarrow{\mathbf{F}}\mathbf{dm}$$

(Composition généralisée de force)

Exemple cas d'un solide :

Les paramètres de configuration :

$$\mathbf{q_1} = \mathbf{x_G}, \;\; \mathbf{q_2} = \mathbf{y_G}, \;\; \mathbf{q_3} = \mathbf{z_G}, \;\; \mathbf{q_4} = \psi, \;\; \mathbf{q_5} = \theta \;\; \text{et} \;\; \mathbf{q_6} = \varphi$$

— Le torseur de forces extérieurs $[\mathbf{F}] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{O}) \end{array} \right.$

— Le torseur cinématique $[\mathbf{F}] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{\Omega}} \\ \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) \end{array} \right.$

$$\mathbf{\Omega} = \underset{\mathbf{R_{(S)}}}{\left| \begin{array}{l} \mathbf{p} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \mathbf{q} = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \mathbf{r} = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{array} \right.} \qquad \overrightarrow{\mathbf{R}} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_\mathbf{O} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{L} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}] \cdot [\mathbf{F_e}] = \overrightarrow{\mathbf{R}}.\overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{O}) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{S/R_O}}.\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathbf{O})$$

$$\mathbf{P} = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{X} + \dot{\mathbf{y}}\mathbf{Y} + \dot{\mathbf{z}}\mathbf{Z} + \mathbf{pL} + \mathbf{qM} + \mathbf{rN}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{Q_1} = \mathbf{X} \quad \mathbf{Q_2} = \mathbf{Y} \quad \mathbf{Q_3} = \mathbf{Z} \quad \mathbf{Q_5} = \mathbf{L}\cos\varphi - \mathbf{M}\sin\varphi$$

$$\Longrightarrow \mathbf{Q_4} = \mathbf{X}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{M}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{N}\cos\theta \quad \mathbf{Q_6} = \mathbf{N}$$

7.5 Champs de forces

Par définition, on dit qu'il y a un champ de force lorsque les composantes généralisés ne dépendent pas que des $\mathbf{q_i}$

$$\mathbf{Q_i} = \mathbf{Q_i}(\mathbf{q_1} \cdots \mathbf{q_n})$$

7.5.1 Calcul du travail par un champ de forces pour $\mathbf{t} \in [\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}]$

$$\mathcal{T} = \int_{\mathbf{t_1}}^{\mathbf{t_2}} (\sum \mathbf{Q_i}\frac{\mathbf{dq_i}}{\mathbf{dt}})\mathbf{dt} = \int_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{Q_i}(\mathbf{q_1} \cdots \mathbf{q_n})\mathbf{dq_i}$$

7.6 Fonction de force en potentiel :

On suppose que $\sum\limits_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{Q_i dq_i}$ est une différentielle totale exacte c'est à dire

$$\exists \mathbf{U} : \qquad \mathbf{dU} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{Q_i dq_i}, \qquad \mathbf{Q_i} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{q_i}}, \qquad \mathbf{i = 1 \cdots n}$$

$\mathbf{Q_i}$: fonction généralisée de force et $\mathbf{U}$ est le potentiel

***Remarque* 7.1**

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une fonction de force et que

$$\frac{\partial \mathbf{Q_i}}{\partial \mathbf{q_j}} = \frac{\partial \mathbf{Q_j}}{\partial \mathbf{q_i}}$$

Exemple 7.2

Cas d'un point material dans le plan

On pose

$$\mathbf{F} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{X} = \frac{-\mathbf{ky}}{\mathbf{x^2+y^2}} \qquad \mathbf{Y} = \frac{\mathbf{ky}}{\mathbf{x^2+y^2}} \implies \mathbf{dU} = \frac{\mathbf{k(xdy-ydx)}}{\mathbf{x^2+y^2}}$$

On fait le changement de variable

$$\tan\theta = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$$

$$\implies \mathbf{dU} = \mathbf{k}\mathbf{d}\theta \implies \mathbf{U} = \mathbf{k}\theta + \underbrace{cste}_{=\mathbf{0}}$$

Exemple 7.3

Cas de la pesanteur

Soit $\overrightarrow{\mathbf{f}}$ *la densité massique de force* $\overrightarrow{\mathbf{f}} = (\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{g})$

$$\overrightarrow{\mathbf{P}} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{V}}(\mathbf{M})\,\overrightarrow{\mathbf{f}}\,\mathbf{dm} = -\mathbf{mg}\,\overrightarrow{\mathbf{z}}(\mathbf{G})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}} = -\mathbf{mg}\,\overrightarrow{\mathbf{z}}(\mathbf{G})$$

7.6.1 Cas de forces Newtoniens :

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}\cdot\rho}{\mathbf{r^2}}\overrightarrow{\mathbf{MP}}$$

On pose

$$\mathbf{g(r)} = \frac{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}\cdot\rho}{\mathbf{r^2}}$$

$$\implies \overrightarrow{\mathbf{F}} = -\mathbf{g(r)}\overrightarrow{\mathbf{MP}}$$

$$\implies \mathbf{V} = \int \mathbf{r}\cdot\mathbf{g(r)dr} = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}\cdot\rho\int\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{r^2}} = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}\cdot\rho}{\mathbf{r^2}} + \mathbf{cste}$$

7.7 Théorème de l'énergie

7.7.1 Fonction de force en potentiel :

Soit $(\mathbf{S})$ un système formé de n points matériels

— $\mathbf{F_{i1}}$: **Forces extérieur** à $(\mathbf{S})$

— $\mathbf{F_{i2}}$: **Forces intérieur** de $(\mathbf{S})$

L'équation de mouvement (P.F.D.)

$$\mathbf{m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2}} \qquad \textbf{(Pour chaque point matériel)}$$

$$\mathbf{m_i \vec{a}_i \vec{V}_i = (\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2})\vec{V}_i = \vec{F}_{i1}\vec{V}_i + \vec{F}_{i2}\vec{V}_i = P_1 + P_2}$$

$$\mathbf{m_i \vec{a}_i \vec{V}_i = P_1 + P_2}$$

$$\mathbf{m_i \vec{V}_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d\vec{V}_i^2}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mV_i^2}{2}}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dt}E_c = P_1 + P_2}$$

7.7.2 Cas d'un solide :

$$\mathbf{[F_e]} = \left|\begin{array}{l} \mathbf{\vec{R}} \\ \mathbf{\vec{M}_e} \end{array}\right. \qquad \textbf{Torseur des forces extérieurs}$$

$$\mathbf{[V]} = \left|\begin{array}{l} \mathbf{\vec{\Omega}} \\ \mathbf{\vec{V}(O)} \end{array}\right. \qquad \textbf{Torseur cinématique}$$

$$\mathbf{P_{ext} = [F_e] \cdot [V] = \int_{(S)} \vec{a}(M) \cdot \vec{V}(M)dm = \int_{(S)} \frac{d\vec{V}(M)}{dt}.\vec{V}(M)dm = \frac{dE_c}{dt}}$$

$$\mathbf{P(ForcesN) = 0}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{\frac{d}{dt}E_c = P_1 + P_2}$$

7.7.3 Cas particulier :

$$\mathbf{P = P_1 + P_2} \qquad \exists \mathbf{U} \ \text{tel que} \ \mathbf{P = \frac{dU}{dt}}$$

Or

$$\mathbf{P = \frac{dE_c}{dt} = \frac{dU}{dt} \implies E_c = U + cste}$$

Intégrale 1[re] $\mathbf{U = -E_p} \qquad \implies \mathbf{E_c + E_p = U = E_m}$

Dans ce cas, on dit qu'un tel système est un système conservatif

7.8 Étude d'une équation différentielle de la forme $\dot{q}^2 = f(a)$

On dérive

$$\mathbf{\dot{q}^2 = f(a) \implies 2\dot{q}\ddot{q} = f'(a)\dot{q}}$$

donc soit

$$\mathbf{\dot{q} = 0 \implies q = cte}$$

soit que

$$\mathbf{\ddot{q} = \frac{f'(a)}{2}}$$

Les valeurs d'équilibre de $\mathbf{q}$ sur les valeurs qui vérifiant $\mathbf{f(q) = 0}$ et $\mathbf{f'(q) = 0}$

Exemple **7.4**
Un point matériel pesant :

$$\mathbf{m\ddot{z} = -mg}$$

$$\mathbf{\implies m\dot{z}\ddot{z} = -mg\dot{z}}$$

$$\mathbf{\implies \frac{m\dot{z}^2}{2} = mgz + cte}$$

$$\mathbf{\implies \dot{z}^2 = -2gz + cte}$$

$$\mathbf{\dot{z}^2 = f(z)}$$

L'origine O est un point stationnaire $\mathbf{f(O) = 0}$ *et* $\mathbf{f'(O) = 0}$

Bibliographie

[1] Mécanique : fondements et applications - 7e édition - Avec 320 exercices et problèmes résolus, José-Philippe Pérez, Olivier Pujol, Dunod, 2014.

[2] Mécanique du solide et des systèmes, Jean-Claude Hulot, Marc Venturi, Nathan, 2009 - ISBN 978-2-09-160920-1.

[3] Mécanique des solides - Cours et exercices corrigés, Michel Combarnous, Didier Desjardins, Christophe Bacon, 2e édition, Dunod, 2000.