TD de mécanique des solides N°2

(Cinématique du solide)

Exercice 1

Soit R_0 un repère fixe orthonormé direct, on donne les points du solide (S) déterminées par leurs coordonnées dans un repère orthonormé direct R lié à ce solide : A(0,0,0), B(1,1,0) et C(1,1,1).

Les vecteurs vitesses à un instant donné t_0 des points A, B et C ont respectivement pour composantes dans le repère R :

$$\vec{V}(A\in S/R_0)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}_R,\ \vec{V}(B\in S/R_0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_R \text{ et } \vec{V}(C\in S/R_0)=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_R$$

Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$ et les éléments de réduction du mouvement hélicoïdal uniforme tangent, à l'instant considéré.

Exercice 2

Soit une barre AB de longueur l se déplaçant dans un repère fixe $R_0(O, x_0, y_0)$. Le point A décrit $R_0(O, x_0)$.

On notera $R_S(A, \vec{x}, \vec{y})$ le repère lié à la barre AB. On notera (S) le solide constitué par la barre AB.

On introduira les paramètres suivants : $\theta=(\vec{x}_0, \vec{x})$ où $\vec{x} = \frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$ et $\lambda = \overline{OA}$

1) Calculer $\vec{V}(B\in S/R_0)$ en appliquant la définition.
2) Calculer $\vec{V}(B\in S/R_0)$ en utilisant le torseur cinématique, l'exprimer dans les repères R_0 et R.

Exercice 3

Par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, une plaque rectangulaire ABCD est en mouvement de la manière suivante :

A est fixe en O, AB reste dans le plan (O, x_0, y_0), on donne AB=a et AD=b.

On définit $\vec{x} = \frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$ et $\vec{y} = \frac{\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||}$ et $\vec{z}$ et tel que $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit un repère orthonormé direct lié à la plaque.

Soit $\psi=(\vec{x}_0, \vec{x})$ et $\theta=(\vec{z}_0, \vec{z})$.

1) Écrire le vecteur rotation instantanée de la plaque par rapport à R_0, dans le repère R_0 puis dans le repère R.
2) Calculer la vitesse de C par rapport à R_0, l'exprimer dans R, puis dans R_0.

<u>**Exercice 4**</u>

Soit (S) un solide, A un point lié à (S) et $R_1(A, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ un repère lié à (S). Le solide est mobile par rapport à $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ de façon que $\vec{X}.\vec{z_0}=0$ et que $\vec{X}$ soit le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OA}$.

La position de (S) dépend alors des trois fonctions du temps r, ψ, θ définis par :
$\overrightarrow{OA}=r\vec{X}$ $\psi=(\vec{x_0}, \vec{X})$ et $\theta=(\vec{z_0}, \vec{Z})$. On introduira le repère $R(O, \vec{X}, \vec{y}, \vec{z_0})$

1) **Calculer directement $\vec{V}(A\in S/R_0)$ et $\vec{V}(A\in S/R)$. Vérifier les résultats obtenus en utilisant le théorème de composition des mouvements.**
2) **Soit M un point lié à (S) tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{X} + b\vec{Y} + c\vec{Z}$.**
   Calculer $\vec{V}(M\in S/R_0)$, $\vec{V}(M\in S/R)$, $\vec{\gamma}(M\in S/R_0)$ et $\vec{\gamma}(M\in S/R)$.
3) **Soit $O \in S$ le point lié à (S) qui à l'instant t coïncide avec l'origine de R_0.**
   À partir de la question 2) déduire $\vec{V}(O\in S/R_0)$, $\vec{V}(O\in S/R)$, $\vec{\gamma}(O\in S/R_0)$ et $\vec{\gamma}(O\in S/R)$.
   En déduire que les vitesses de $O \in S$ ne sont pas obtenues en dérivant les coordonnées de $O \in S$ et que $\vec{\gamma}(O\in S/R_0)$ n'est pas obtenue en dérivant les composantes de $\vec{V}(O\in S/R_0)$.
4) **Retrouver $\vec{V}(O\in S/R_0)$ et $\vec{\gamma}(O\in S/R_0)$ à partir de $\vec{V}(O\in S/R)$ et $\vec{\gamma}(O\in S/R)$ en utilisant la composition des mouvements.**