

Fste

Analyse fonctionnelle

Prof: Mohammed KACHAD

2018/2019

IKADDI. Khadija S6

chapitre (1): Rappels et préliminaires

Espace Métrique

Soit (E, d) un espace métrique et $x_0 \in E$. un ensemble V de E est un voisinage de x_0 s'il $\exists r > 0, B(x_0, r) \subseteq V$

Définition

- On appelle système fondamentale de voisinage de x_0 toute famille $\mathcal{V}_{x_0}$ de voisinages de x_0 vérifiant :
 $\forall w \in \mathcal{V}(x_0), \exists V \in \mathcal{V}_{x_0} / V \subseteq w$
- Une suite $(x_n) \subset E$ converge vers $x \in E$, on note $x_n \rightarrow x$
ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$
- Une suite (x_n) est dite de Cauchy si :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq n_0, d(x_n, x_p) < \varepsilon$
- $(x_n) \text{ cv} \Rightarrow (x_n) \text{ est de Cauchy}$
- (E, d) un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy dans E converge dans E

Définition

Soit (E, d) un espace métrique, un complété de E est un espace métrique complet $(\hat{E}, \hat{d})$ / il existe une isométrie

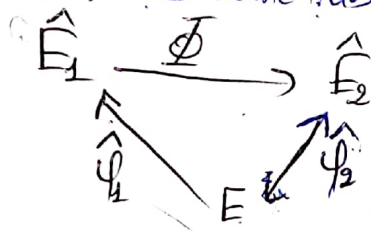
$$\varphi: E \longrightarrow \hat{E} \text{ tq } \overline{\text{Im}(\varphi)} = \hat{E}$$

Remarque: On rappelle qu'une isométrie est une applicat°:
 $\varphi: (E, d) \longrightarrow (F, d')$ entre des espaces métrique qui préserve la distance ie $d'(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in E$.

- Souvent, on identifie E à son image. Dans ce cas E est une partie dense dans E' / la métrique induite sur E par celle de E' , soit la métrique d' .

Théorème

Tout espace métrique admet un complété.
Soit (E, d) un espace métrique, si $(\hat{E}_1, d_1)$ et $(\hat{E}_2, d_2)$ sont 2 complétés de E et φ_1, φ_2 les isométries de E dans $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ respectivement.



Alors il $\exists$ une unique isométrie surjective $\Phi : \hat{E}_1 \rightarrow \hat{E}_2$
t.q. $\varphi_2 = \Phi \circ \varphi_1$.

Espaces Normés

Soit E e.v. réel ou complexe, une norme sur $E : \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ayant 3 propriétés :

- ① $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ② $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \Rightarrow \|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$
- ③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$. (inégalité de triangle)
en généralise $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$

Remarque

si on omet le ①, on dit que $\|\cdot\|$ est semi-norme.
• A partir d'une norme, on obtient une distance sur E , définie par $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall (x, y) \in E$ (topologie normique).

- Un espace vectoriel E muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que E est un espace vectoriel normé.
- un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.
- propriété

La norme $\|\cdot\|$ sur E est application continue, il suffit de remarquer
 $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ et $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

• $E \times E \rightarrow E$
 $(x, y) \mapsto x + y$
 (est lipschitzienne)

et $K \times E \rightarrow E$
 $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues.
 si E (e.v.n)

Preuve : $E \times E$ et $K \times E$ sont munis de la topologie produit

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|) \quad \|(\lambda, x)\| = \max(|\lambda|, \|x\|)$$

On a : $\|(x+y) - (x_0+y_0)\| = \|(x-x_0) + (y-y_0)\|$
 $\leq \|x-x_0\| + \|y-y_0\| \leq 2 \max(\|x-x_0\|, \|y-y_0\|)$

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| = \|(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0\|$$

$$\leq |\lambda - \lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\|$$

Corollaire Translation : $T_a : E \rightarrow E$
 $x \mapsto x + a$ $a \in E$ sont continues
homothétie : $h_\lambda : E \rightarrow E$
 $x \mapsto \lambda x$ $\lambda \in K$ Ce sont des homéomorphismes
 ($\lambda \neq 0$)

• Si F est un s.e.v de E , Alors son adhérence $\overline{F}$ est aussi s.e.v de E .

Théorème : $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. si toute série absolument
 de Cvg est Cvg. ie
 Caractéristique de l'espace de Banach : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow \exists x \in E, \left\| \sum_{n=1}^n x_n - x \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right)$

Preuve : (Ex)

Espace quotient

Soit E un e.v et F un s.e.v de E , On définit une relation R .

tg : $x R y \Leftrightarrow x - y \in F, \forall x, y \in E$

(1) R est une relation d'équivalence.

L'espace quotient de la relation R sera noté : $E/R = E/\mu$.

• E/μ muni des opérations (lois) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ est un e.v.
 $\lambda \overline{x} = \overline{\lambda x}$

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ e.v.m et F un sev de E , On considère l'application:

$$N: E/F \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}\bar{x} = x + F &\longmapsto N(\bar{x}) = \inf \{ \|y\| / y \in \bar{x} \} \\ &= \inf \{ \|x + z\|, z \in F \} \\ &= d(x, F)\end{aligned}$$

Alors on a les propriétés suivantes:

① N est une semi-norme.

② si F est fermé Alors $(E/F, N)$ est e.v.m

en effet: $N(\bar{x}) = 0 \Rightarrow d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in \bar{F} = F = 0 + F = \bar{0}$
 $\Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ d'où E/F est normé.

⚡ cause cas:

- la surjective canonique $\pi: E \longrightarrow E/F$ est continue et $\|\pi\| \leq 1$ ②
 $x \longmapsto \bar{x} = x + F$

③ si E est complet + F fermé Alors E/F est un espace de Banach.

L'espace L^p :

Soit $(S, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, pour $1 \leq p < \infty$

On note $\mathcal{L}^p(m)$ l'espace de tout fct mesurables $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_S |f(t)|^p d m(t) < +\infty, \text{ On pose } \|f\|_p = \left(\int_S |f(t)|^p d m(t) \right)^{1/p}$$

il résulte que $\mathcal{L}^p(m)$ est un s.e.v de l'espace de fonctions mesurables et que $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(m)$

• $\|f\|_p = 0$ ssi $f = 0$ m-pp

• On désigne $N = \{ f: S \longrightarrow \mathbb{R} / f = 0 \text{ m-pp} \}$

• $L^p(m) = \mathcal{L}^p(m) / N$ l'ensemble des classes d'équivalence

des fonctions mesurables $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\|f\|_p = \left(\int_S |f(t)|^p d m(t) \right)^{1/p} < +\infty$ est relation d'équivalence associé
 $f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N$

Alors $L^p(\mu)$ est un e.v.m

- Soit $L^p(\mu)$ est l'ensemble des classes d'équivalences de fonctions mesurables. $f: S \rightarrow \mathbb{K}$ $\bar{f} = f + N \equiv f$.

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 / \mu(\{x / |f(x)| > M\}) = 0 \} < \infty$$

- Dans la pratique on ne fera pas la distinction entre f et $\bar{f}$.
On écrit $f \in L^p$

Proposition: Théorème de Fisher-Riesz.
 $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

$\forall p \in [1, +\infty[$

- Inégalité de Hölder: si $p \in [1, +\infty[$ et q l'exposant conjugué de p .
inégalité de (C.S) cas particulier de Hölder $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Alors $f \cdot g \in L^1(\mu)$
 $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$
 $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ $\int_S |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_S |g|^q d\mu \right)^{1/q}$

- Inégalité de Minkowsky: $f, g \in L^p(\mu), 1 \leq p < +\infty$
 $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ ou $\left(\int_S |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_S |g|^p d\mu \right)^{1/p}$

Proposition: $L^\infty(\mu)$ est complet

preuve: supposons que $(x_n) \subset L^\infty / \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|_\infty < \infty$
Alors: $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|_\infty < \infty$ Alors $x \in L^\infty$ de plus: $\sum_{n=1}^N x_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x$
puisque $\left\| \sum_{n=1}^N x_n - x \right\|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|x_n\|_\infty \rightarrow 0$

Théorème de caractérisation de l'espace de Banach. $\Rightarrow L^\infty$ est complet.

- Applications linéaires continues:

Soit E et F 2 espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des app linéaires.

Pour $E=F$, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(E)$

$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \{ \text{forme linéaire} \}$ le dual Algébrique.

- Si E et F e.v.m, Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.m muni de la norme $\| \cdot \| = \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow [0, +\infty]$
 $T \longmapsto \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \neq 0, x \in E \right\}$

On note très souvent $T(x) = T \cdot x$

- Si $\|T\| < \infty$ Alors T est dite app. linéaire continue (ou bien T est un opérateur borné)

- On note $\mathcal{L}(E, F) = \{ T \in \mathcal{L}(E, F), \exists M > 0, \forall x \in E, \|Tx\| \leq M \|x\| \}$

l'espace des applications linéaires continues de E vers F .

- On note $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$

- Si $F = K$ on note $E^* = \mathcal{L}(E, K) = \{ \text{forme linéaire continue} \}$

E^* = le dual topologique de $E \subseteq E' =$ le dual algébrique de E .

- Si $\dim E < +\infty$ Alors $E^* = E'$, muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Remarque

$$1) \|T\| = \sup \{ \|Tx\|, x \in E, \|x\|=1 \} = \sup \{ \|Tx\|, x \in E, \|x\| \leq 1 \} \\ = \inf \{ M > 0, \forall x \in E, \|Tx\| \leq M \|x\| \} \quad (3)$$

$$2) \forall T \in \overset{\text{e.v.m}}{\mathcal{L}(E, F)}, \forall S \in \overset{\text{e.v.m}}{\mathcal{L}(F, H)} \quad \|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\| \quad (\text{Exo})$$

Proposition

Soient E, F e.v.m et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ Alors :

- Si F est complet Alors $\mathcal{L}(E, F)$ muni de sa norme (usuelle)

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \text{ est un espace de Banach.}$$

- Si $(F=K)$ si E est un e.v.m Alors le dual topologique $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ est firs espace de Banach.

Proposition : soit E, F e.v.m et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① T est continue sur E .
- ② T est bornée
- ③ T est continue en 0
- ④ T est continue en tt pt $x \in E$.

* Compacité (Théorème de Riesz 1918) : soit E un e.v.m la boule compacte $B(x, m) \Leftrightarrow \dim E < \infty$

Corollaire :
 Soit E e.v.m de $\dim E < \infty$ Alors tout compact de E est d'intérieur vide.
Preuve : si K est compact et d'intérieur non vide, il contient une boule fermée de rayon $r > 0$ qui compact
 Ce qui absurde.

ACKCE : A est compact ds K si A est compact ds E .

Proposit : $S \subseteq E$ s.v et $\dim S < \infty$ de l'espace v.m E . Alors :
 $\forall x \in E \setminus S, \exists y_0 \in S$ tq $\|x - y_0\| = d(x, S)$
 $= \inf_{y \in S} \|x - y\|$

Preuve :
 $B = B(x, m) \cap S$ est compact
 $y \in B \mapsto \|x - y\|$ est continue ; Alors il atteint ces bornes
 d'où le résultat.
 $\Rightarrow \exists y_0$ tq $y_0 \in B \rightarrow \|x - y_0\| = \inf_{y \in S} \|x - y\|$

Page 241 (Topologie générale)

Chapitre (2) : Espace de Hilbert

Généralité :

Définit° : un espace préhilbertien H est un e.v. sur K muni d'un produit scalaire. On notera (1) (où $\langle, \rangle$ c'est l'app

$$(\cdot / \cdot) : H \times H \longrightarrow K \\ (x, y) \longmapsto (x/y) \text{ vérifié :}$$

① Pour $K = \mathbb{C} \quad \forall x, y, z \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\bullet (\lambda x + y / z) = \lambda (x / z) + (y / z) \text{ linéaire / à la 1^{ère} variable.}$$

$$\bullet (z / \lambda x + y) = \overline{\lambda} (z / x) + (z / y) \text{ est antilinéaire par rapport à la 2^{ème} variable.}$$

pour $K = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire ($\lambda = \overline{\lambda}$)

② pour $K = \mathbb{C}$, $(\cdot / \cdot)$ est hérmittienne.

$$\forall x, y \in H \quad (y / x) = \overline{(x / y)}$$

pour $K = \mathbb{R}$, $(\cdot / \cdot)$ est symétrique $\forall x, y \in H \quad (x / y) = (y / x)$

③ $(\cdot / \cdot)$ est positive : $\forall x \in H \quad (x / x) \geq 0$

④ $(\cdot / \cdot)$ est définie : $\forall x \in H \quad (x / x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Lorsque $(\cdot / \cdot)$ satisfait les conditions de ① à ④ On dit que $(\cdot / \cdot)$ est un produit scalaire.

Exemple : 1) $H = \mathbb{R}^n$ espace préhilbertien muni d'un produit scalaire (x / y)

$$(x / y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

2) $H = \mathbb{C}^n$ muni de produit scalaire $\forall x, y \in \mathbb{C}^n : (x / y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$

3) Si $(S, \mathcal{I}, m)$ est un espace mesuré. On munit $H = L^p(m)$ d'un produit scalaire, en posant pour $f, g \in L^p(m)$

$$(f / g) = \int_S f \cdot g \, dm \quad K = \mathbb{R}$$

$$\text{et } (f / g) = \int_S f \cdot \overline{g} \, dm \quad K = \mathbb{C}$$

4) Soit $\ell^2 = \{x = (x_1, \dots, x_m, \dots), \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty\} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de produit-scalaire.
 $\forall x, y \in \ell^2 \begin{cases} \mathbb{K} = \mathbb{C} & (x/y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \\ \mathbb{K} = \mathbb{R} & (x/y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \end{cases}$

Proposition (Inégalité de Cauchy - Schwartz)

Soit $(H, (\cdot/\cdot))$ un espace préhilbertien, Alors $\forall x, y \in H$:
 $| (x/y) | \leq \sqrt{(x/x)} \sqrt{(y/y)} = \|x\| \cdot \|y\| \quad \|x\| = \sqrt{(x/x)}$

On a l'égalité si x et y sont colinéaires.

Preuve : $\Rightarrow$ On peut remplacer x par λx , $|\lambda| = 1$. Alors : $(x/y) \in \mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \|tx + y\|^2 = (tx + y / tx + y) \\ = t^2 \|x\|^2 + 2t (x/y) + \|y\|^2 = P(t)$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow t_{\min} = -\frac{(x/y)}{\|x\|^2} \quad \text{d'où : } -\frac{(x/y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 \geq 0$$

et Alors : $| (x/y) | \leq \|x\| \cdot \|y\|$

si on a l'égalité Alors : $\Delta = 4(x/y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 = 0$

Alors P admet une racine double $t_0 \in \mathbb{R}$, donc $(t_0 x + y / t_0 x + y) = 0$
 puisque $(\cdot/\cdot)$ est définie Alors : $t_0 x + y = 0 \Rightarrow y = -t_0 x$
 d'où x et y sont colinéaires

$\Leftarrow$ si x, y est colinéaire Alors on a l'égalité (triviale)

Proposition Soit $(H, (\cdot/\cdot))$ un espace préhilbertien, l'app $\|\cdot\| : H \longrightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{(x/x)}$
 est une norme sur H appelée norme hilbertienne.

Preuve

- 1) $\forall x \in H, \|x\| = 0 \Leftrightarrow (x/x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (P est définie)
- 2) $\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x / \lambda x)} = |\lambda| \sqrt{(x/x)} = |\lambda| \|x\|$
- 3) $\forall x, y \in H, \|x+y\|^2 = (x+y / x+y) = (x/x) + (x/y) + \overline{(x/y)} + (y/y)$
 $= (x/x) + 2 \operatorname{Re}(x/y) + (y/y)$
 $= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x/y) + \|y\|^2$

D'après l'inégalité de (C.S)

$$\operatorname{Re} (x/y) \leq |(x/y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Pour conséquent $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$
 $= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Conclusion $\|\cdot\|$ est une norme sur H .

Proposition: Soit $(H, (\cdot/\cdot))$ un espace préhilbertien, Alors le produit scalaire $(\cdot/\cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Preuve: Soit $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$.

Alors: $\begin{cases} \|x_n - x\| \rightarrow 0 \\ \|y_n - y\| \rightarrow 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \\ \Rightarrow f(x_n, y_n) \rightarrow f(x, y) \\ \text{Alors: } f \text{ est continue} \end{cases}$

Donc:

$$|(x_n/y_n) - (x/y)| \leq |(x_n - x)/y_n| + |x_n/(y_n - y)|$$

$$(C.S) \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\text{bornée}} + \underbrace{\|x_n\|}_{\text{bornée}} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\rightarrow 0}$$

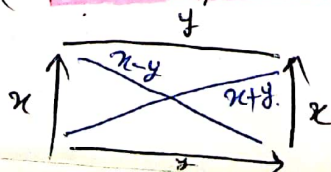
donc: $(x_n/y_n) \rightarrow (x/y)$ d'où $(\cdot/\cdot)$ est continue sur $H \times H$.

Propriétés $\forall x, y \in H$

• $(x/y) = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (théorème de Pythagore)

• $(x/y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) & (\text{identité de polarisation } \mathbb{K} = \mathbb{R}) \\ \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)) & \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$

• $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité de parallélogramme)



① l'existence d'un p.s. $\Rightarrow$ l'existence d'une norme (la réciproque est fautive)

Exercice Soit H un e.v.n M_q qui ad. l.p.s.s.e.

i) il $\exists$ un p.s. $(\cdot/\cdot)$ associé à la norme $\|\cdot\|$

$$\forall x \in H, \|x\| = \sqrt{(x/x)}$$

ii) $\forall (x, y) \in H \times H, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

①

Remarque

$\forall y \in H$, la forme linéaire associée au produit scalaire

$$\Phi_y : H \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{est continue. } \|\Phi_y\|_{H^*} = \|y\|$$
$$x \longmapsto (x/y)$$

en effet :

On peut supposer $y \neq 0$. On a par C.S

$$|\Phi_y(x)| \leq \|x\| \|y\|$$

entraîne que : $\|\Phi_y\| \leq \|y\|$ de plus Φ_y est continue.

$$\text{Comme } |\Phi_y(y)| = \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{|\Phi_y(y)|}{\|y\|} = \|y\| \leq \|\Phi_y\| \quad (\|\Phi_y\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in H}} \frac{|\Phi_y(x)|}{\|x\|})$$

$$\text{Donc : } \|\Phi_y\|_{H^*} = \|y\|_H$$

Orthogonalité

Définit: Soit H un espace préhilbertien, on dit que des vecteurs x et y sont orthogonaux si $(x/y) = 0$ et on a $x \perp y$.

- deux parties A et B sont orthogonales si $x \perp y \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B$
 - L'orthogonale d'une partie A est l'ensemble:
 $\{x \in H \mid (x/y) = 0 \quad \forall y \in A\}$ l'on note: $A^\perp$
- $\Phi_y: x \mapsto (x/y)$
est formé $\Leftarrow$
- $\left(\begin{array}{l} A \perp B \\ A \perp B' \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} B \subset B' \\ \text{ou } B' \subset B \end{array}$

Remarque: - la relation $\perp$ est symétrique.

$$\text{si } x \perp y \Leftrightarrow y \perp x \quad ((x/y) = 0 = (\overline{y/x}) = 0)$$

$$- A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$$

$$- \text{En particulier: } A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A}^\perp \subset A^\perp \quad (\text{car } \overline{A^\perp} = A^\perp)$$

de plus: $\Phi_y: x \mapsto (x/y)$ est une App linéaire continue.

$$A^\perp = \overline{A}^\perp \quad (\text{Exo}) \quad (2)$$

Proposition: Soit $S \subset H$ une partie d'un espace préhilbertien Alors:

(1) $S^\perp$ est un s.e.v. fermé de H et la plus grande partie orthogonale à S .

$$(2) \quad S^\perp = \overline{\text{vect}(S)}^\perp \quad \text{et} \quad \overline{\text{vect}(S)} \subseteq S^{\perp\perp} = (S^\perp)^\perp$$

Preuve Remarque que: $S^\perp = \bigcap_{x \in S} \ker(\Phi_x)$ et que: $\ker(\Phi_x)$ s.e.v. fermé puisque $\Phi_x: y \in H \mapsto (x/y) \in \mathbb{K}$ forme linéaire continue. (Ex)

(2) D'après $S^\perp = \overline{\text{vect}(S)}^\perp = \overline{\text{vect}(S)}^\perp$ (vérifié par la suite) (Φ_y continue) (3)

$$\bullet \quad x \in S, \text{ Alors } (x/y) = 0 \quad \forall y \in S^\perp \quad \begin{array}{l} x \in (S^\perp)^\perp \\ y \in S^\perp \end{array}$$

$$\text{Alors: } x \in S^{\perp\perp}$$

$$\text{Donc: } S \subseteq S^{\perp\perp}$$

s.e.v. + fermé (s.e.v. contenue la plus petite S)

d'où $\text{vect}(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

• Espace de Hilbert

Def: On appelle espace de Hilbert (e.H) muni d'un produit scalaire $(\cdot/\cdot)$
tout espace préhilbertien complet pour sa norme hilbertien
 $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot/\cdot)}$

Exemple

- $\mathbb{C}^n$ muni d'un produit scalaire $(x/y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ $\left(\begin{array}{l} \text{e.H.} \rightarrow \text{e. complet} \\ \text{e.H.} \rightarrow \text{e. preh} \end{array} \right)$
- $\mathbb{R}^n$ " " " $(x/y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$

Ce sont e.H. de la norme: $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$

- $L^2(\Omega, m)$ muni d'un produit scalaire:

$$(f/g) = \begin{cases} \int_{\Omega} f g \, dm & K = \mathbb{R} \\ \int_{\Omega} f \bar{g} \, dm & K = \mathbb{C} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{e.H. de la norme} \\ \|f\| = \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, dm \right)^{1/2} \end{array} \right\} \text{Cas continue}$$

- ℓ^2 muni du produit scalaire $(x/y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ (e.H.) de la norme:
 $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$

Théorème: Soit H un espace préhilbertien, Alors il $\exists$ un espace de Hilbert
 $(\hat{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unique et isométrique: $H \rightarrow \hat{H}$. ($i(H) = \hat{H}$)
On dit que $\hat{H}$ est la complétion d'espace H .

Exemple

- un espace $(C([0,1]), \mathbb{C})$ muni d'un p.s $(f/g) = \int_0^1 f(t) \bar{g}(t) \, dt$.
 $\overline{C([0,1], \mathbb{C})} = L^2([0,1])$, Alors $L^2([0,1])$ est la complétion
de $([0,1], \mathbb{C})$ (Exercice) (vérifier la densité) (4)

Définition: On dit que 2 e.H. H_1 et H_2 sont isomorphes
s'il existe une bijection linéaire $U: H_1 \rightarrow H_2$.

$(U(x_1), U(x_2))_{H_2} = (x_1/x_2)_{H_1}$ Dans ce cas on dit opérateur unitaire
($U^*U = UU^* = I$) ($U^{-1} = U^*$)?

Proposition tout opérateur surjectif isométrique, Alors il est unitaire

$$\|U(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in H_1 \Rightarrow (U(x)/U(y))_{H_2} = (x/y)_{H_1} \quad \forall x, y \in H_1$$

* (utilise l'identité de polarité pour M_9)

- Preuve: (utilise identité de polarisation) (l'image d'une base = base)

$$\|e_1\| = 1 \Rightarrow \|U(e_1)\| = 1$$

utilité

l'image d'une base orthonormée est une B.O?

Théorème de projection et ses conséquences:

Théorème de projection

Soit C une partie convexe non vide et fermée (ou compact) de E (resp espace préhil.)

$$d(x, C) = \inf \{ \|x - y\| \mid y \in C \} = \|x - \hat{x}\| \quad y \in C$$

Alors: $\forall x \in E \exists ! \hat{x} \in C$

$$d(x, C) = \|x - \hat{x}\|$$

• On dit que $\hat{x}$ est projection de x sur C

• $\hat{x}$ projection caractérisée par la propriété: $\operatorname{Re}(x - \hat{x} / y - \hat{x}) \leq 0 \quad \forall y \in C$ (*)

démonstrat: Remarquons que: $d(x, C) = 0$ Alors $x \in \bar{C} = C$
(project lui même) donc $x = \hat{x}$

• Sans perte de généralité posons $x = 0$, Alors:

$$d = d(0, C) = \inf_{y \in C} \|y\|$$

choisissons $(x_n) \subset C$ tq $\|x_n\| \rightarrow d$

Par l'identité de parallélogramme: $\left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2)$

Comme C est convexe Alors: $\frac{x_n + x_m}{2} \in C$. Donc $\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \geq d$ ($d = \inf$)

$$\text{Ceci implique: } \left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} (\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$$

Alors: $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|x_n - x_m\| = 0 \Rightarrow (x_n)$ est de Cauchy

dans H qui complet: $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \hat{x} \in C$ (C est fermé)
 or par la continuité de $\|\cdot\|$ on a $\|x_n\| \rightarrow \|\hat{x}\| = d = d(0, C)$
 d'où l'existence.

unicité?

supposons $\hat{x}, \tilde{x} \in C$ 2 projections de $x=0$, Alors $\|\hat{x}\| = \|\tilde{x}\| = d$
 $\Rightarrow \|\hat{x} + \tilde{x}\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 = 2(\|\hat{x}\|^2 + \|\tilde{x}\|^2)$

$$\Rightarrow \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 = 4d^2 - \|\hat{x} + \tilde{x}\|^2$$

Comme C est convexe: $\frac{\hat{x} + \tilde{x}}{2} \in C$, Alors $d = \frac{\|\hat{x}\| + \|\tilde{x}\|}{2} \geq \|\frac{\hat{x} + \tilde{x}}{2}\| \geq d$

$$\text{Alors: } \|\hat{x} + \tilde{x}\| = 2d$$

$$\text{Donc: } \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 = 4d^2 - 4d^2 = 0 \quad \text{d'où: } \hat{x} = \tilde{x} \text{ d'où l'unicité.}$$

(la propriété reste vraie en cas général)

Mq (*) (Preuvons (*)) $\operatorname{Re} \left((x - \hat{x}) / (\hat{x} - \beta) \right) \leq 0$

$\Rightarrow$ si $\beta \in C$. On a: $(1-t)\hat{x} + t\beta \in C \quad \forall t \in [0, 1]$ Alors:

$$\|x - ((1-t)\hat{x} + t\beta)\|^2 \geq \|x - \hat{x}\|^2$$

$$\Rightarrow t^2 \|\hat{x} - \beta\|^2 + 2t \operatorname{Re}((x - \hat{x}) / (\hat{x} - \beta)) \geq 0$$

$$\text{Pour } t \neq 0, t \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \operatorname{Re}((x - \hat{x}) / (\hat{x} - \beta)) \geq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}((x - \hat{x}) / (\beta - \hat{x})) \leq 0 \quad \forall \beta \in C$$

$\Leftarrow$ si $\hat{x}$ vérifiant propre (*).

$$\begin{aligned} \forall \beta \in C, \|x - \beta\|^2 &= \|(x - \hat{x}) + (\hat{x} - \beta)\|^2 \\ &= \|x - \hat{x}\|^2 + \|\hat{x} - \beta\|^2 - 2 \operatorname{Re}((x - \hat{x}) / (\beta - \hat{x})) \\ &\geq \|x - \hat{x}\|^2 \end{aligned}$$

$d(x, C) = \|x - \hat{x}\|$ ~~est~~ $\hat{x}$ est projection de x sur C .

$$x \in H \xrightarrow{p} \hat{x} \in C$$

Remarque : l'unicité de $\hat{x}$ entraîne une définition de l'app :

$$P: x \in H \longrightarrow \hat{x} = P_C(x) \in C$$

est bien définie d'après théorème de projection.

P_C : nommée la projection de x sur C .

P_C est linéaire continue ?

• Théorème Si C s.e.v. complet (resp fermé) de l'espace préhil.

(resp de Hilbert) de H et soit $x \in H$. Alors :

$$\exists ! z = P_C(x), \exists ! z^\perp \in C^\perp \quad x = z + z^\perp \quad \left(\begin{array}{l} H = C \oplus C^\perp \\ \text{au sens topologique} \\ C: \text{fermé} \end{array} \right)$$

De plus : $C = C^{\perp\perp}$

Preuve :

Soit $P_C(x)$ la projection de $x \in H$ (d'après théorème de project^o)

$$\text{Avec : } x = \underbrace{x - P_C(x)}_{\in C^\perp} + \underbrace{P_C(x)}_{\in C}$$

Ma $x - P_C(x) \in C^\perp$? en effet :

$$\forall s \in C, \text{ Alors } s + P_C(x) \in C. \text{ Alors : } \|x - P_C(x)\|^2 = d(x, C) \\ \leq \|x - (s + P_C(x))\|^2 = \|x - P_C(x) - s\|^2 = \|x - P_C(x)\|^2 - 2t \operatorname{Re}(x - P_C(x), s) + t^2 \|s\|^2$$

admet minimum en $t=0$, on dérive à $t=0$ $P'(0) = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(x - P_C(x), s) = 0 \quad \text{il reste à Ma la partie imaginaire?}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(-iz)$$

Puisque C est un s.e.v. $is \in C$, on remplace s par is

$$\text{On obtient : } \operatorname{Re}(x - P_C(x), -is) = \operatorname{Im}(x - P_C(x), s) = 0$$

$$\text{d'où : } (x - P_C(x), s) = 0$$

Pour conséquence : $x - P_C(x) \in C^\perp$

L'unicité: supp qu'il $\exists$ d'autre décomposition cad:

$$x = \underbrace{z}_{\in C} + \underbrace{z^\perp}_{\in C^\perp} \quad \text{Avec: } x = \underbrace{P_C(x)}_{\in C} + \underbrace{P_{C^\perp}(x)}_{\in C^\perp} = \underbrace{z}_{\in C} + \underbrace{z^\perp}_{\in C^\perp}$$

$$\Rightarrow P_C(x) - z = z^\perp + P_C(x) - x \in C \cap C^\perp = \{0\}$$

$$\text{Donc: } P_C(x) = z \quad \text{et} \quad x - P_C(x) = z^\perp$$

(car les 2 sont s.e.v)
 $x \in C \cap C^\perp \Rightarrow x \in C$ et $x \in C^\perp$

• Montrons que $C = C^{\perp\perp} = (C^\perp)^\perp$

$$\text{Il faut } C \subseteq C^{\perp\perp}$$

Inversément: $x \in C^{\perp\perp} \subset H$, Alors $\exists! (z, z^\perp) \subset C \times C^\perp$

$$x = \underbrace{z}_{\in C} + \underbrace{z^\perp}_{\in C^\perp} \quad \text{Or: } z \in C \subseteq C^{\perp\perp}$$

$$\text{Avec: } z^\perp = x - z \in C^\perp \cap C^{\perp\perp} = \{0\} \quad \text{donc } z^\perp = 0 \Rightarrow x = z \in C$$

(vrai justement si C s.e.v.) Par conséquent $C = C^{\perp\perp}$

Corollaire: Soit C un s.e.v fermé de l'espace de Hilbert.

$$\text{Avec: } H = C \oplus C^\perp \quad (\text{somme direct topologique (fermée)})$$

Remarque: C un s.e.v n'est pas fermé, Alors $\overline{C}$ est un s.e.v fermé de H !

$$\text{donc } H = \overline{C} \oplus C^\perp \quad \text{et de plus on a: } (C^\perp)^\perp = \overline{C}$$

(d'après théorème de project.)

Corollaire Soit C un s.e.v fermé de l'espace de Hilbert H .

(1) $P_C: H \rightarrow C$ est une App linéaire continue sur H [P_C nommé la project^o orthogonale]

$$(2) P_{C^\perp} = I - P_C \quad \text{et} \quad \forall x \in H \quad x = P_C(x) + P_{C^\perp}(x)$$

Preuve

(1) Montrer P_C est linéaire?

$$\text{Posons } x = \lambda x_1 + x_2 \quad \text{avec } x_1 = z_1 + z_1^\perp \quad x_2 = z_2 + z_2^\perp$$

$$\text{Avec } x = \underbrace{\lambda z_1 + z_2}_{\in C} + \underbrace{\lambda z_1^\perp + z_2^\perp}_{\in C^\perp} \quad \text{Avec:}$$

$$\text{Car } (x = \lambda x_1 + x_2)$$

$$\lambda z_1 + z_2 = \lambda P_C(x_1) + P_C(x_2) = P_C(x) = P_C(\lambda x_1 + x_2)$$

Donc P_C est linéaire.

* M_q P_C est continue ? $\forall x \in H$ On a : $x = P_C(x) + x - P_C(x)$
 et $P_C(x) \perp (x - P_C(x))$ d'après théorème de Pythagore On a :
 $\|x\|^2 = \|P_C(x)\|^2 + \|x - P_C(x)\|^2$

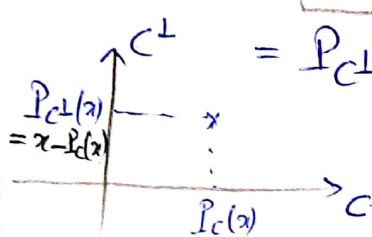
Donc : $\|x\| \geq \|P_C(x)\|$

d'où P_C est continue et $\|P_C\| \leq 1$

* Exercice Dans quel cas $\|P_C\| = 1$?

⑤

② En échangeant le rôle de C par $C^\perp$ et par l'unicité de la décomp.
 $\forall x \in H$ $x = \underbrace{x - P_C(x)}_{\in C^\perp} + P_C(x)$ (déjà M_q l'unicité)
 Donc : $\forall x \in H$ $P_{C^\perp}(x) = x - P_C(x)$



Alors : $P_{C^\perp} = I - P_C$

s.e.v. $\rightarrow P_C$ linéaire
 fermée $\rightarrow P_{C^\perp}$ continue

Remarque

(i) $P_C^2 = P_C$ en effet : si $y \in C$, Alors $y = P_C(y)$ d'après ça
 d'autre part, $\forall x \in H$ $P_C^2(x) = P_C(P_C(x)) = P_C(x)$
 d'où : $P_C^2 = P_C$
 $\ker(P_C) = \{x \in H / P_C(x) = 0\}$

(ii) $C = \text{im}(P_C)$ et $C^\perp = \ker(P_C)$

$C^\perp = \text{im}(I - P_C)$

et $C = \ker(I - P_C)$

$P_C(x - P_C(x)) = P_C(x) - P_C(x) = 0$
 $\in C^\perp$

Exercice

⑥

* $H = \ker(P_C) \oplus \ker(I - P_C)$
 $= \text{im}(P_C) \oplus \text{im}(I - P_C)$

(forcément ici est fermé)
 l'image

Exercice

- C est un convexe fermé $C \neq \emptyset$ de l'espace de Hilbert
 P_C est linéaire ssi C s.e.v de H .

⑦

Proposit° : Soit H un espace de Hilbert ; et C une partie de H .

Abts: $C^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}(C)}$

Preuve & Remarques : $C^\perp = \overline{\text{vect}(C)}^\perp = 0$ $C^{\perp\perp} = \overline{\text{vect}(C)}^{\perp\perp} = \overline{\text{vect}(C)}$

Proposit^o : si C un s.e.v. fermé de l'espace de Hilbert H .

Abts $H \cong C \oplus C^\perp$

Preuve : $M_H : x \in H \xrightarrow{U} (P_C(x), P_{C^\perp}(x))$ est injective
 $C = \{0\} : \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\text{can: } \langle Ux, Uy \rangle_{C_X C^\perp} = \langle x/y \rangle_H.$$

Remarque: $H^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = H$.

Proposit^o s. Paul H. e. de Hilbert et F. sev A l'ors:

$$\overline{F} = H \quad \text{s88}^\circ \quad F^\perp = \{0\} \quad (H = \overline{F} \oplus F^\perp)$$

• Pour que $\overline{F} = H$ il suffit de prouver que $\exists (x/y) = 0 \quad \forall x \in F \Rightarrow y = 0$

Exercice : $L^2([0,1]) = \overline{C([0,1], \mathbb{C})}$ pour prouver ça il faut utiliser la proposition



Théorème de la Représentation de Riesz et opérateurs Continue.

* Pour certain $y \in H$ l'app: $x \in H \xrightarrow{\varphi_y} \langle x, y \rangle$, il est clair que φ_y est linéaire et continue. par (C.S)

le théorème suivant prouve que

$$\forall \varphi \in H^* \exists ! y \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H.$$

forme linéaire
sur $E \otimes H$.

Theorem: $\text{Soil } H \text{ an e.o. } H \text{ of soil } F: H \longrightarrow H^*$
 $y \longmapsto \psi_y: H \longrightarrow K$
 $x \longmapsto \langle x, y \rangle = \psi_y(x)$

Après Fast objective isométrique

est bijective et isométrique
et antilinéaire (car $F(\lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda} F(y_1) + F(y_2)$)

(On page identity $H \equiv H^*$)

Preuve . Il est clair que F est antilinéaire

$$\text{Or: } \|F(y)\| = \|y\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in H}} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|} \stackrel{(C.S)}{=} \|y\|$$

Abs. F est isométrie et ainsi F est injective

Ma F est surjective? en effet: soit $f \in H^* \setminus \{0\}$ Abs:

$C = \ker(f)$ s.e.v fermé.

Abs d'après théorème de projection Abs $\exists y \in C^\perp = \ker(f)^\perp = K \cdot y$ (droite engendrée par y)

si $(f(y) \neq 0)$ on prend le cas $(f(y) = 1)$!

$$\forall x \in H, x - f(x) \cdot y \in C \quad f(x - f(x) \cdot y) = f(x) - f(x)$$

$$\text{et ainsi } \langle x/y \rangle = \langle x - f(x) \cdot y + f(x) \cdot y / y \rangle = f(x) \|y\|^2$$

$$\text{Donc: } f(x) = \langle x, \frac{y}{\|y\|^2} \rangle \text{ Donc: } f = \langle \cdot, \frac{y}{\|y\|^2} \rangle$$

d'où: $F(\frac{y}{\|y\|}) = f$. Enfin: F est surjective.

$$\bullet \langle F(y_1), F(y_2) \rangle_{H^*} = \langle y_2 / y_2 \rangle_H \quad \text{Exercice. } \textcircled{9}$$

Remarque le théorème précédent prouve implicitement qu'on peut identifier $H \equiv H^*$

Lemme: Soit $H, K \subseteq H$ et $T: H \rightarrow K$ linéaire

$$\bullet \forall x \in H, \|x\| = \max \{ |\langle y, x \rangle| \mid y \in H, \|y\| \leq 1 \}$$

$$\text{(utilisé)} \quad = \max \{ |\langle y, x \rangle| \mid y \in H, \|y\| = 1 \}$$

Exercice $\textcircled{10}$

$$\bullet \|T\| = \sup \{ |\langle y, Tx \rangle| \mid x \in H, \|x\| = 1, y \in K, \|y\| = 1 \} \begin{matrix} \nearrow \sup_x \\ \searrow \sup_y \end{matrix}$$

$$= \sup \{ |\langle y, Tx \rangle| \mid x \in H, \|x\| \leq 1, y \in K, \|y\| = 1 \}$$

Théorème :

soit H, K 2 e.s. et $T \in L(H, K)$ Alors:
il $\exists$ un unique opérateur $T^* \in L(K, H)$ tq:
 $\forall x \in H, \forall y \in K \quad \langle Tx, y \rangle_K = \langle x, T^*y \rangle_H$
 T^* : l'adjoint de T , de plus : $\|T\| = \|T^*\|$

Preuve : $\forall y \in K$ (fixe), on considère : $x \in H$

Alors : $\psi_y \circ T \in H^*$ (d'après inégalité de C.S.)

Donc d'après théorème de représentat° de Riesz.

il $\exists ! a_y \in H$ tq $\psi_y \circ T(x) = \langle x, a_y \rangle_H \quad \forall x \in H$.

Par l'unicité de a_y . Alors on peut définir une app°

$$y \in K \xrightarrow{T^*} a_y = T^*y \in H.$$

Donc $\forall x \in H, \forall y \in K$ On a : $\langle Tx, y \rangle_K = \langle x, T^*y \rangle_H$ d'où l'existence.

Mq l'unicité ?

En utilisant l'unicité de l'app, on va Mq que T^* est linéaire

soi $y_1, y_2 \in K$ et $\lambda \in K$.

On a : $\forall x \in H$.

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\lambda y_1 + y_2) \rangle_H &= \langle Tx, \lambda y_1 + y_2 \rangle_K = \langle Tx, \lambda y_1 \rangle_K + \langle Tx, y_2 \rangle_K \\ &= \bar{\lambda} \langle Tx, y_1 \rangle_K + \langle Tx, y_2 \rangle_K \\ &= \bar{\lambda} \langle x, T^*y_1 \rangle_H + \langle x, T^*y_2 \rangle_H \\ &= \langle x, \lambda T^*y_1 \rangle_H + \langle x, T^*y_2 \rangle_H \\ &= \langle x, \lambda T^*y_1 + T^*y_2 \rangle_H. \end{aligned}$$

d'où : $T^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda T^*y_1 + T^*y_2$ (Par unicité)

Ainsi T^* est linéaire.

Mq : T^* est continue.

$$\text{On a } |\psi_y \circ T(x)| = \langle Tx, y \rangle_K = |\langle x, T^*y \rangle_H| \leq \|Tx\|_K \|y\|_K.$$

$$\text{Donc: } \|\Psi_{y \circ T}\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{|\langle Tx, y \rangle|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|} \frac{|\langle x, T^*y \rangle|}{\|x\|} = \|T^*y\|$$

$$\leq \|T\| \|y\| \Rightarrow T^* \text{ est continue et } \|T^*\| \leq \|T\|$$

Inversément Mg $\|T\| \leq \|T^*\|$ en effet:
Remarquons que T^* lui-même un adjoint $T^{**} = (T^*)^*$

$$\text{Abs: } \langle y, T^*x \rangle_K = \langle T^*y, x \rangle_H \quad \forall x \in H, \forall y \in K$$

$$= \langle y, Tx \rangle_K$$

$$\text{Donc: } T^*x = Tx, \quad \forall x \in H. \quad \text{Donc } \boxed{T^{**} = T}$$

$$\text{Abs } \|T^{**}\| = \|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\| \quad \text{Ainsi } \|T\| = \|T^*\|$$

Corollaire

soit H, K 2 espaces de Hilbert et $T \in L(H, K)$

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|TT^*\|$$

Proposition

soit H, K et L des espaces de Hilbert, et soit $T \in L(H, K)$
et $S \in L(K, L)$

$$\text{i) } (ST)^* = T^*S^*$$

$$\text{ii) } T^{**} = T \quad \text{Abs: } (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$$

$$\text{iii) } \text{Si } T \text{ est inversible Abs: } \ker(T^*) = (\text{im}(T))^\perp$$

$$\text{iv) } \ker(T) = (\text{im}(T^*))^\perp \quad (\ker(T))^{\perp} = \overline{\text{im}(T)} \quad (\ker(T^*))^\perp = \overline{\text{im}(T^*)}$$

Preuve: (Exo) (théorème de projection) 11

$$H = \overline{\text{im}(T)} \oplus \text{im}(T)^\perp$$

Remarque $T: H \rightarrow K$ et $T^*: K \rightarrow H$

$$\text{(iv)} \Rightarrow \begin{cases} T \text{ injective} \Rightarrow H = \overline{\text{im}(T^*)} \\ T^* \text{ injective} \Rightarrow K = \overline{\text{im}(T)} \end{cases}$$

Définition : soit $T \in L(H)$

* T est dit auto-adjoint si $T = T^*$

* T est dit positive si $\forall x \in H, \langle Tx, x \rangle \geq 0$

Exemple : $\forall T \in L(H, K)$, l'opérateur $T^*T \in L(H)$

$$(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T \text{ c'est auto-adjoint}$$

De même façon pour $TT^* \in L(K)$ est auto-adjoint.

Exercice

• de projecteur orthogonal $P \in L(H) \setminus \{0\}$ $P^2 = P$ est auto-adjoint

$$\forall x \in H, \langle x, Px \rangle = \langle Px, x \rangle = \langle x, P^*x \rangle$$

$$P = P^* \quad (\ker(P))^\perp = \text{im}(P) = \ker(\underbrace{I-P}_q)$$

(12)

Ma si T est un opérateur auto-adjoint Alors :

$$\forall x \in H \quad \begin{cases} \text{i) } \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} & (\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}) \\ \text{ii) } \langle Tx, x \rangle = 0 \implies T = 0 \end{cases}$$

Familles orthonormées et bases Hilbertiennes

Définit : Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthonormée dans l'espace de Hilbert si :

$$\text{i) } \|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$$

$$\text{ii) } \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

On dit que la famille (e_i) est une base Hilbertienne

(base orthonormée) si $\text{vect}\{e_i \mid i \in I\} = H$

Exemple

1) Dans l'espace ℓ^2 , la famille $(e_n)_{n \geq 1}$ est base Hilbertienne, $\forall i \in \mathbb{N}$
 $e_i = (0 \dots \underset{i\text{ème}}{1} \dots 0 \dots)$

2) Dans $L^2([0,1])$ la famille $(e_n)_{n \geq 1}$ est base Hilbertienne de
 $L^2([0,1]), \forall n \geq 1, e_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto e_n(t) = e^{2i\pi nt}$

Remarque : Toute famille orthonormée est libre !
 $C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{i n t} dt = \langle f, e_n \rangle$ (Appliquen série de fourier sur l'espace de Hilbert)

Théorème (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)
 Pour toute famille $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ dénombrable linéairement indépendante il existe une famille orthonormée $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ de H .

$$\text{vect} \{x_1, \dots, x_n, \dots\} = \text{vect} \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$$

On obtient $(e_n)_{n \geq 1}$ par l'algorithme suivant :

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$e_2 = C_1(x_2 - P_{V_1}(x_2)) \text{ où } V_1 = \text{vect}(e_1)$$

$$\vdots$$

$$e_{n+1} = C_n(x_{n+1} - P_{V_n}(x_{n+1})) \text{ où } V_n = \text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est un s.e.v de H et C_n est la constante choisie / $\|e_{n+1}\| = 1$

P_{V_n} : project° de x_{n+1} sur V_n

$$P_{V_n} = C_n(x_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle x_{n+1} | e_k \rangle e_k)$$

Théorème

Toute espace de Hilbert de dim infinie H admet une base Hilbertienne.
 $H = \text{vect} \{e_n / n \in \mathbb{N}\}$

Preuve

* Cas où H séparable :

il $\exists$ une famille dénombrable $(x_n)_{n \geq 1} / H = \overline{\text{vect} \{x_n / n \geq 1\}}$,
 d'après théorème de Gram-Schmidt, on peut construire une base
 orthonormée $(e_n)_{n \geq 1} / \text{vect} \{e_n / n \geq 1\} = \overline{\text{vect} \{x_n / n \geq 1\}} = H$.

Ainsi H admet une base Hilbertienne.

* Cas où H pas séparable (important) ?
 « Lemme de Zorn » chapitre (4).

Proposition : soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \geq 1}$ une famille orthonormée dans H .

• si $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$ Alors $\lambda_n = (x/e_n) \quad \forall n \geq 1$.
l'élément λ_n est appelé le coefficient de Fourier.

Preuve $\forall k \geq 1$ $\Phi_{ek} : H \longrightarrow \mathbb{K}$
 $x \longmapsto (x/e_k) \in H^*$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } (x/e_k) &= \Phi_{ek}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_{ek}(\lambda_n e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \Phi_{ek}(e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (e_n/e_k) \\ \delta_{nk} &= \begin{cases} 1 & \text{si } n=k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \delta_{nk} = \lambda_k \end{aligned}$$

Proposit^o : Soient $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble orthonormée de l'espace de Hilbert H .

Posons $S = \text{vect}(E_n)$ Alors :

$$\forall x \in H \quad \begin{cases} \text{i) } P_S(x) = \sum_{i=1}^n (x/e_i) e_i \\ \text{ii) } \sum_{i=1}^n |(x/e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{Inégalité de Bessel}) \end{cases}$$

Preuve : i) Posons $y = \sum_{k=1}^n (x/e_k) e_k \in S$ Alors :

$$\begin{aligned} \forall e_i \in E_n \quad \langle x-y/e_i \rangle &= \langle x/e_i \rangle - \langle y/e_i \rangle \\ &= \langle x/e_i \rangle - \sum_{j=1}^n \langle x/e_j \rangle \langle e_j/e_i \rangle \\ &= \langle x/e_i \rangle - \langle x/e_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x-y \perp S$ donc $x = x-y+y = x - P_S(x) + P_S(x)$
donc d'après l'unicité de la décomposition ($H = S \oplus S^\perp$) $\Rightarrow y = P_S(x)$

$$\text{Ainsi : } P_S(x) = \sum_{i=1}^n \langle x/e_i \rangle e_i$$

ii) D'après théorème de pythagore. On a :

$$\|x\|^2 = \|x - P_S(x)\|^2 + \|P_S(x)\|^2 \geq \|P_S(x)\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{d'autre part : } \|P_S(x)\|^2 &= (P_S(x)/P_S(x)) = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x/e_i \rangle e_i / \sum_{j=1}^n \langle x/e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x/e_i \rangle \overline{\langle x/e_j \rangle} \langle e_j/e_i \rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n |\langle x/e_i \rangle|^2$$

Théorème : soit H un espace de Hilbert et $E = (e_n)_{n \geq 1}$ une famille orthonormée de H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $E^\perp = \{0\}$
- ii) E est une base orthonormée (Hilbertienne) $\overline{\text{vect}(E)} = H$
- iii) $\forall x \in H, x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x/e_n \rangle e_n$ (Cv $e_n \| \cdot \|$ vers x)
- iv) $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x/e_n \rangle|^2$ (Identité de Parseval)

Preuve :

(i) $\Rightarrow$ (ii) On a : $\overline{\text{vect}(E)} = E^{\perp\perp} = (E^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) (Exo) 13

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : la somme partielle. $P_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x/e_k \rangle e_k$
 Comme $P_n(x) \rightarrow x \Rightarrow \|P_n(x)\|^2 \rightarrow \|x\|^2$ (car le p.s est continue)

enfin : $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x/e_n \rangle|^2$

Remarque : le Théorème précédent est aussi valable pour les espaces de Hilbert non séparable.

Exercice 1 : M_q tout espace de Hilbert séparable de $\dim = +\infty$ est isomorphe isométriquement à ℓ^2 . 14

cad : $S : H \rightarrow \ell^2$ linéairement continue bijective ?
 $x \mapsto (x/e_n)$ $S^{-1} : \ell^2 \rightarrow H$
 $x = (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e_n$

démon $\|S(x)\| = \|x\| \rightarrow \|x\|^2 = \sum |\langle x/e_n \rangle|^2$

Exercice 2

$M_q(f_n)$ est base Hilbertienne de $L^2([- \pi, \pi])$ 15

où : $f_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$

Chapitre (3) : Théorème de Baire et ses Conséquences.

Théorème : (Théorème de Baire)

Si (E, d) un espace métrique complet, Alors si $(U_n)_{n \geq 1}$ est une famille dénombrable d'ouverts et denses ($\overline{U_n} = E \quad \forall n \geq 1$) dans E . Alors $\bigcap_n U_n$ est dense dans E . $\Rightarrow \overline{U} = E$.

$$U = \bigcap_n U_n$$

Preuve :

Nous allons prouver que $B(x_0, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in E$

• Définition $B(x, \varepsilon) = \{y \in E / d(x, y) < \varepsilon\}$ et notons B

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, 2\varepsilon)$$

• Enum. U_1 est ouvert et dense dans E , Alors $U_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$
ouvert $\exists x_1 \in E, \exists \varepsilon_1 > 0 / U_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0) \supseteq B(x_1, 2\varepsilon_1) \supseteq B(x_1, \varepsilon_1)$

Par récurrence on obtient des suites $(x_n)_n \subset E$ et $(\varepsilon_n)_n /$
 $B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1}) \subseteq B(x_n, \varepsilon_n) \cap U_n$ et $\varepsilon_n \in]0, \frac{\varepsilon_0}{2^n}]$

Par construction $\forall p > n$

$$B(x_n, \varepsilon_n) \supseteq B(x_p, \varepsilon_p)$$

* Alors : $d(x_p, x_n) < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_0}{2^n}$. Donc (x_n) est de Cauchy dans l'espace

E complet ce qui implique $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in E$.

En faisant $p \rightarrow +\infty$ on obtient : $d(x_n, x) < \varepsilon_n \quad \forall n \geq 1$.

$$x \in \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \quad \forall n \geq 1 \text{ d'où : } x \in \bigcap_{n \geq 1} B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0) \cap U$$

Par conséquent : $B(x_0, \varepsilon_0) \cap U \neq \emptyset$

Enfin : $\bar{U} = E$.

Remarque : Il est nécessaire de considérer une famille dénombrable d'ouverts

Autre Exemple : $O_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ forme une famille non dénombrable d'ouverts dense dans $\mathbb{R}$. $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} O_x = \emptyset$ *

• Un énoncé équivalent de théorème de Baire

Théorème : Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $(F_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide (i.e. $\text{int}(F_n) = \emptyset \ \forall n \geq 1$) Alors $\bigcup_{n \geq 1} F_n$ est d'intérieur vide ($\text{int}(\bigcup_n F_n) = \emptyset$)

Remarque : Dans de nombreuses applications, le théorème de Baire est en générale utilisé de la forme suivante :

• Soit (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n \geq 1}$ suite de fermés de E .
 $E = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ Alors il $\exists$ n_0 entier / $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$ (Exercice)
($U_n = E \setminus F_n \leadsto \text{int}(F_n) = E \setminus \bar{U}_n$)

①

Exercice : 1) Soit E un espace de Banach. $M_n(E)$ admet une base algébrique dénombrable. Soit $\dim E < \infty$.

2) En déduire $\mathbb{R}[x]$ ($\mathbb{C}[x]$) n'est pas de Banach pour aucune norme.

②

Conséquences du théorème de Baire

• Théorème de Banach - Steinhaus

Soit X un espace de Banach et Y un e.v.n et $SCL(X, Y)$

• Si $\forall x \in X \sup_{T \in S} \|Tx\| < \infty$ Alors :
 $\sup_{T \in S} \|T\| < \infty$

• $S = (T_i)_{i \in I}$ (I pas forcément dénombrable)

• On suppose que $\sup \|T_i(x)\| < \infty \forall x \in X$ Alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$

Preuve : Posons : $A_n = \{x \in X / \|Tx\| \leq n \forall T \in S\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
 A_n est fermé (car $A_n = \bigcap_{T \in S} f_T^{-1}([0, n])$) avec $f_T : x \mapsto \|Tx\|$
 est continue (car $\|\cdot\|$ et T sont continus)

Par l'hypothèse : $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ Alors d'après théorème de Baire,
 il $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{int}(A_{n_0}) \neq \emptyset$, Alors il $\exists x_0 \in A_{n_0}, \exists \varepsilon > 0$ tq :

$$B(x_0, \varepsilon) \subset A_{n_0}$$

$$\begin{aligned} \text{chaque } x \in X \setminus \{0\} \text{ On a : } z = x_0 + \varepsilon \cdot \frac{x}{\|x\|} \in B(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{n_0} \\ \text{et } \forall T \in S, \|Tx\| = \|Tz - Tx_0\| \frac{\|x\|}{\varepsilon} \\ \leq (\|Tz\| + \|Tx_0\|) \cdot \frac{\|x\|}{\varepsilon} \\ \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent : } \|T\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \quad \forall T \in S$$

Corollaire : Soient E un espace de Banach et Y un e.v.n
 et $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite $\subset L(X, Y)$

$$\forall x \in X : T_n : x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Tx, \text{ Alors : } (1) T \in L(X, Y)$$

$$(2) \sup \|T_n\| < \infty$$

$$(3) \|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|$$

Remarque : (1) de corollaire précédent vérifie qu'une limite simple
 T d'une suite $(T_n) \subset L(X, Y)$ est encore linéaire continue
 (de X e. Banach vers Y e.v.n)

$$2) \|T_n - T\| \not\rightarrow 0$$

Ex: $X = (\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ et $Y = (\mathbb{C}, |\cdot|)$
soient $T_n: X \rightarrow Y$ définie: $T_n(x) = x_n$

$$|T_n(x)| = |x_n| \leq \sum |x_k| = \|x\|_1$$

Donc: $\forall n \geq 1, T_n \in L(X, Y)$ et $\|T_n\| \leq 1$.

d'autre part: $|T(e_1)| = 1 \leq \|T_n\| \leq 1$.

$$\|T_n\| = 1.$$

Puisque: $\forall x = (x_n) \in \ell^1(\mathbb{N}), T_n(x) = x_n \rightarrow 0$

Donc: $T_n x \rightarrow T x = 0$ avec $T = 0$

d'où: T_n CV simplement vers $T = 0$

$$\|T_n - T\| = \|T_n\| = 1 \not\rightarrow 0$$

Théorème de l'application ouverte et ses conséquences:

Définit°: On dit qu'une app $f: E \rightarrow F$ entre 2 espaces topologiques est ouverte si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F . (" $\forall \mathcal{O}$ ouvert de $E, \Rightarrow f(\mathcal{O})$ est ouvert dans F)

Proposit°: Soit $(X, \|\cdot\|)$ et $(Y, \|\cdot\|)$ 2 e.v.m et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Alors: T est ouverte $\Leftrightarrow \exists c > 0$ tq $B_F(Tx, c) \subset T(B_E(x, 1))$

Preuve: $\Rightarrow$ Soit $B_E(0, 1)$ est ouvert de X , Alors $T(B_E(0, 1))$ est ouvert dans F (car T est ouverte)

Comme $0_F = T(0_E) \in T(B_E(0_E, 1))$, Alors il $\exists c > 0$ tq:
 $B_F(0_F, c) \subset T(B_E(0_E, 1))$

$\Leftarrow$ Soit $U \subset X$ ouvert et soit $y \in T(U)$, Alors il $\exists x \in U$ tq
 $y = Tx$. Donc il $\exists \varepsilon > 0$ / $B(x, \varepsilon) \subset U$

$\Rightarrow T(B(x, \varepsilon)) \subset T(U)$
 On sait que: $T(B(x, \varepsilon)) = T(x) + \varepsilon T(B_E(0, 1))$ et d'après
 l'hypothèse: $\supseteq T(x) + \varepsilon B_F(0, 1) = B_F(y, \varepsilon C)$

d'où $B_F(y, \varepsilon C) \subset T(U)$ d'où T est ouverte.

Théorème de l'app ouverte

Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in L(X, Y)$. Alors

T ouverte $\Leftrightarrow T$ est surjective. (normalisé $\Leftarrow$)
 car l'autre est évident.

Preuve

$\Rightarrow$ T ouverte. c.à.d. $\exists C > 0, B(0, C) \subset T(B(0, 1))$ Alors:

$$\forall r > 0 \quad B(0, rC) \subset T(B(0, r))$$

$$\text{Alors} \quad \bigcup B(0, rC) \subset T\left(\bigcup B(0, r)\right)$$

Ceci implique: $Y \subset T(X)$ or $(T(X) \subset Y)$

(utilité de Y est un e.s.B.)

Alors: $T(X) = Y$ et ainsi T est surjective.

$\Leftarrow$ Supposons que T est surjective. Alors $Y = \overline{\bigcup T(B(0, n))}$
 et puisque Y est complet Alors d'après théorème de Baire. On a:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \text{int}(\overline{T(B(0, n_0))}) \neq \emptyset$$

$$\exists a \in \overline{T(B(0, n_0))} = F_m \text{ et } \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(a, \varepsilon) \subset F_m = -F_m$$

(symétrique)
 $B(-a, \varepsilon) \subset F_m$

De plus F_m est convexe Alors: $\frac{a-a}{2} = 0 \in F_m$

Ce qui implique $B(0, \varepsilon) \subset F_m$.



Il suffit de prouver que $B(0, \varepsilon) \subset T(B(0, m))$, et donc T ouvert

est vérifiée pour $C = \frac{\varepsilon}{3n}$ en effet: $y_0 \in B(0, \varepsilon) \quad \forall c > 0$

$$\text{et } x_0 \in B(0, m) / \|y_0 - Tx_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i.e.} \quad y_1 = 2(y_0 - Tx_0) \in B(0, \varepsilon)$$

Alors par récurrence on construit des suites:

$$y_j \subset B(0, \varepsilon) \text{ et } (x_j) \subset B(0, m)$$

$$y_{j+1} = 2(y_j - T x_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

donc: $2^{-(j+1)} y_{j+1} = 2^{-j} y_j - T(2^{-j} x_j)$

Par sommation: $T(2^{-j} x_j) = 2^{-j} y_j - 2^{-(j+1)} y_{j+1}$

$$\Rightarrow T\left(\sum_{j=0}^m 2^{-j} x_j\right) = y_0 - 2^{-(m+1)} y_{m+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_0$$

De plus: $\sum_{j=0}^m 2^{-j} \|x_j\| \leq 2m$ (utilité de X est de Banach)

est absolument cvg.

Comme X est un (e.b.) Alors la série $\sum 2^{-j} x_j$ cv vers $x = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} x_j$

Or par continuité de T on a: $Tx = y_0$ et $\|x\| \leq 2m < 3m$

Ceci implique et ainsi $B(0, C) \subseteq T(B(0, 1))$ tq $C = \frac{2}{3m}$

Par propriété précédente T est ouverte.

Exercice: Soit $T \in L(X, Y)$ où X et Y sont de Banach.

Mq T est ouverte ssi $\exists M > 0, \forall y \in Y, \exists x \in X,$

$$y = Tx \text{ et } \|x\| \leq M \|y\|$$

Théorème de l'isomorphisme de Banach.

Soit X et Y e.b. et $T \in L(X, Y)$ est bijective.

$$\text{Alors } T^{-1} \in L(Y, X)$$

Démonstration:

$$\text{Mq } T^{-1} \in L(Y, X)$$

$$\text{Soit } y_1 + \lambda y_2 \in Y \quad T(T^{-1}(y_1) + \lambda T^{-1}(y_2)) = y_1 + \lambda y_2$$

$$= T(T^{-1}(y_1)) + \lambda T(T^{-1}(y_2)) = y_1 + \lambda y_2$$

$$\text{Donc: } T^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = T^{-1}(y_1) + \lambda T^{-1}(y_2)$$

Ma T^{-1} est continue ? Comme T est continue + bijective.

Alors d'après Théorème de l'app ouverte :

$\forall \theta$ ouvert de X Alors $T(\theta)$ est ouvert dans Y

Remarquons $(T^{-1})^{-1}(\theta) = T(\theta)$ Donc T^{-1} est continue.

Corollaire :

Si l'espace X muni de 2 normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ est de Banach.

Si $\exists c > 0, \forall x \in X \quad \|x\|' \leq c \|x\| \Rightarrow \exists c' > 0 \forall x \in X$
 $\|x\| \leq c' \|x\|'$

Dans ce cas. On dit que les 2 normes sont équivalentes.

Preuve :

On considère $\text{id} : \underbrace{(X, \|\cdot\|)}_X \longrightarrow \underbrace{(X, \|\cdot\|')}_Y$ l'identité est bijective.

$\|\text{id}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|'}{\|x\|} \leq c$ Alors id est continue

Donc d'après théorème de l'isomorphisme de Banach.

$\text{id}^{-1} \in L(Y, X)$. D'où $\exists c' > 0$

$\|\text{id}^{-1}\|_0 = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leq c'$ Donc $\exists c' > 0, \|x\| \leq c' \|x\|'$

Remarque :

Il est nécessaire de supposer que X est de Banach pour les 2 normes (voir Exo 3 série 2) contre Exemple)

Théorème de Graphe fermé

Soit X, Y 2 e. B et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors T est continue.

soit son graphe $G_T = \{(x, y) \in X \times Y \mid Tx = y\}$ est fermé

dans $(X \times Y, \|(,) \| = \| \cdot \|_X + \| \cdot \|_Y)$

si T est linéaire $\Rightarrow$ graphe (s.e.v)

Preuve:

$\Rightarrow$ Supposons T est continue et $(x_n, y_n) \subset G_T$ converge vers (x, y)
 Alors $Tx_n = y_n$. Donc $Tx_n \longrightarrow y = Tx$. Donc G_T est fermé.
 $\xrightarrow{T \text{ continue.}}$

$\Leftarrow$ Supposons que G_T est fermé, Comme T est linéaire. Alors son graphe G_T est un (s.e.v) de $X \times Y$ (e. Banach) espace de Banach.

Soi $(x_n, y_n) \subset G_T$ de Cauchy, Alors $(x_n) \subset X$ et $(y_n) \subset Y$

Ce sont aussi de Cauchy par $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$.

$$\text{Donc } \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \longrightarrow 0$$

• Soit $\Pi_X : G_T \longrightarrow X$ la projection sur X qui est
 $(x, y) \longmapsto x$ linéaire + continue + bijective.

et sa bijection réciproque $\Pi_X^{-1} : X \longrightarrow G_T$
 $x \longmapsto (x, Tx)$

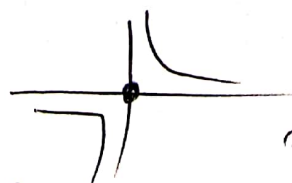
donc d'après Théorème d'isomorphisme de Banach $\Pi_X^{-1} \in L(X, G_T)$

• D'ailleurs : $\Pi_Y : G_T \longrightarrow Y$ projection sur Y linéaire + continue.
 $(x, Tx) \longmapsto Tx$

Ce qui montre que $X \xrightarrow{\Pi_X^{-1}} G_T \xrightarrow{\Pi_Y} Y$ T est continue.
 $T = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$

Remarque : l'application directe de Théorème précédent est fautive.
 vraie même pour T non linéaire mais continue.

• Par contre, si T n'est pas linéaire
 $f(x) = \frac{1}{x}$ et $x \neq 0$, $f(0) = 0$



T est linéaire est important ($\Leftarrow$)

f n'est pas continue mais son graphe est fermé.

Chapitre (4) : Théorème de (H-B) Hahn-Banach et ses conséquences.

• Forme analytique de Théorème de Hahn Banach :

- Avant d'énoncer et de prouver le Théorème (H-B) sous sa forme analytique. On fait appel au Lemme de Zorn. Pour énoncer ce lemme on a besoin d'abord quelques définitions :

Définition :

Soit A un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle) notée $\ll$

1) On dit qu'un sous-ensemble B de A est totale-ment ordonné si $\forall a, b \in B$
On a $a \ll b$ ou $b \ll a$

2) Soit B un sous-ensemble de A . On dit que C est un maj-quant de B si
 $\forall b \in B, b \ll C$

3) On dit que $m \in A$ est un élément maximal de A si $\forall a \in A, m \ll a$
On a $m = a$

4) On dit que A est inductif si tout sous-ensemble total-ment ordonné de A admet un maj-quant

Lemme de Zorn :

Tout ensemble ordonné, inductif, non vide admet un élément maximal

Applica-^o :

Thé : Tout espace de Hilbert ; non séparable admet une base
orthonormée.

Preuve : On utilise le lemme de Zorn. Considérons $\mathcal{O}$ l'ensemble des familles orthonormées de H et partiellement ordonné par l'inclusion ($\subset$) $\{ \mathcal{O}, \subset \} \neq \emptyset$, indicatif.

• Par le lemme de Zorn, $\mathcal{O}$ admet un élément maximal.

$$B = \{ e_i \}_{i \in I} \text{ On a } H = \overline{\text{Vect}(B)}$$

$$\text{Si on } \exists y \in H \setminus B \quad \|y\| = 1, \quad \langle y, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I$$

Alors $\tilde{B} = B \cup \{y\}$ est famille orthonormée.

$$\supset B \quad B \subset \mathcal{O} \quad B \subset B \cup \{y\} \in \mathcal{O}$$

Contradiction car B est un élément maximal, Ainsi $H = \overline{\text{Vect}(B)}$

Définit : On dit que $p: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une sous-norme sur l'espace $V = E$ si $\forall x, y \in E$

$$1) p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$2) p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

Reine-Ronde

Théorème de H-B) forme analytique (Forte)

Soit E e.v. réel et p une sous-norme sur E , soit F un s.e.v. de E et $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in F.$$

Alors il $\exists$ une forme linéaire $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$ prolongeant f

et vérifiant $\tilde{f}(x) \leq p(x)$

(extension de H-B) sur E .

$$\begin{array}{ccc} \text{prolong.} \uparrow & E & \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) \leq p(x) \\ & & \\ f: F & \longrightarrow & \mathbb{R} \quad f(x) \leq p(x) \end{array}$$

est-ce que $\tilde{f}$ est unique!?

$\tilde{f}$ est nommée prolongement de H-B

Preuve: (Thm de Hahn Banach forme analytique pour

• Auparavant, on va montrer (i): pour $z_0 \in E \setminus F$, on peut prolonger f sur $\tilde{F} = F \oplus \mathbb{R}z_0$.

Et (ii) On exploite le lemme de Zorn de s'étendre éventuellement à tout f sur E .

• Étape (i) Par linéarité, il existe une forme linéaire

$\tilde{f}: F \oplus \mathbb{R}z_0 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\tilde{f}|_F = f$ et bien déterminé par sa valeur en z_0 . En effet,

On trouve
On obtient

$$\alpha f(x) + B f(y) = (\alpha + B) f\left(\frac{\alpha \cdot x}{\alpha + B} + \frac{B y}{\alpha + B}\right)$$

$$\leq (\alpha + B) p\left(\frac{\alpha}{\alpha + B} (x - B z_0) + \frac{B}{\alpha + B} (y + \alpha z_0)\right)$$

$$\leq \alpha p(x - B z_0) + B p(y + \alpha z_0)$$

$$\text{Donc } \frac{A}{B} (-p(x - B z_0) + f(x)) \leq \frac{1}{\alpha} (p(y + \alpha z_0) - f(y))$$

et ainsi on choisit α tel que

$$\sup \left\{ \frac{1}{B} (f(x) - p(x - B z_0)) \mid x \in F, B > 0 \right\} \leq \alpha \leq \inf \left\{ p(y + \alpha z_0) - f(y) \mid y \in F, \alpha \geq 0 \right\}$$

Dans cette méthode :

$$\alpha \tilde{f}(z_0) \leq p(x + \alpha z_0) - f(y) \text{ donc } \tilde{f}(y + \alpha z_0) \leq p(x)$$

$$\text{et } \tilde{f}(z_0) > p(x) - p(x - B z_0) \text{ donc } \tilde{f}(x - B z_0) \leq p(x - B z_0)$$

$$\forall x \in F, \forall \alpha, B > 0$$

Étape (i)

KacRade

Soit $A = \{ g: D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ forme linéaire} /$

- D_g sous-espace vectoriel de $E / D_g \supset F$
- $g|_F = f$
- $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D_g$

Notons que $A \neq \emptyset$ car $f \in A$.

Définissons l'ordre partiel sur A via: $g \leq h \Leftrightarrow D_g \subseteq D_h$ et $g|_{D_g} = h|_{D_g}$.

Soit $\{g_i\}_{i \in I}$ sous-ensemble totalement ordonné de A . Alors

$\bigcup_{i \in I} D_{g_i} = D$ est un s. espace vectoriel de E et $g: D \rightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = g_i(x)$ si $x \in D_{g_i}$ par définition g est linéaire

prolonge f alors $g \in A$ et que g est un majorant

de $\{g_i\}_{i \in I}$ d'après le lemme de Zorn A admet un

élément maximal F . Sinon $D_F \neq E$, on utilise

l'étape (i) donc F admet un prolongement sur E .

Contradiction car F est un élément maximal. Donc

$D_F = E$ et F prolongement de f qui vérifie

$$F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

Démonstrat° de Théorème de (H-B)

S6 Math

Théorème (H-B) forme analytique

Soit E un e.v. sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit p une semi-norme sur E .
Soit F s.e.v. de E et $f: F \rightarrow K$ une forme linéaire /
 $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in F$. Alors il $\exists$ une forme linéaire
 $\tilde{f}: E \rightarrow K$ prolongement de f et $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$

On utilise le lemme suivant $\forall x \in E$. Pour démontrer le Théorème.

Lemme: Soit E e.v. sur $\mathbb{C}$. Si $U \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (on considère E comme e.v. sur $\mathbb{R}$) Alors $F: E \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto F(x) = U(x) - iU(ix)$
est linéaire (on considère E comme e.v. sur $\mathbb{C}$)

Preuve (démonstration du Lemme)

Pour $c \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$

$$\text{On a: } U(x+y) = U(x) + U(y) \quad U(cx) = cU(x)$$

$$\Rightarrow F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \text{et} \quad F(cx) = cF(x)$$

$$\text{On a: } F(ix) = U(ix) - iU(-x) \\ = i(U(x)) - iU(ix) = iF(x) \quad \text{Par conséquent } F \text{ est linéaire}$$

Preuve (du Théorème)

1^{er} Cas: $K = \mathbb{R}$. On suppose que E e.v. sur $\mathbb{R}$.

Comme p une semi-norme $\begin{cases} p(x+y) \leq p(x) + p(y) & \forall x, y \in E \\ p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ & \forall x \in E \end{cases}$

Alors d'après Théorème de Hahn Banach analytique forte,
il $\exists$ un prolongement (H-B) de f : $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\tilde{f}|_F = f \quad \tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

$$\text{Mais on a aussi } -\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

$$\text{Donc: } |\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

2ème Cas: $K = \mathbb{C}$ $E \in \mathcal{V}$ sur K .

Posons $U = \operatorname{Re}(f)$ et $V = \operatorname{Im}(f)$. Comme $f(ix) = if(x)$

$$\text{Alors } U(ix) + iV(ix) = iU(x) - V(x)$$

$$\Rightarrow V(x) = -U(ix) \quad \text{Alors } \boxed{f(x) = U(x) - iU(ix)}$$

Comme P est semi-norme et $U(x) \leq |f(x)| \leq P(x)$

le Théorème de (H-B) forme analytique forte associé
que U admet un prolongement U sur E / $U(x) \leq P(x)$

On peut vérifier par le lemme précédent que :

$$\tilde{f}(x) = U(x) - iU(x)$$

sur F . $\tilde{f}(x) = U(x) - iU(ix) = f(x)$
 donc $\tilde{f}$ est un prolongement de f sur F .
 Mg $|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

$$\left(\begin{array}{l} p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) \\ + |\beta| p(y) \\ |\alpha| + |\beta| = 1 \end{array} \right)$$

• Soit $x \in E$.

a) $\tilde{f}(x) = 0 \Rightarrow |\tilde{f}(x)| = U(x) = 0 \leq p(x)$

b) Pour $\tilde{f}(x) \neq 0$ posons $c = \frac{|\tilde{f}(x)|}{\tilde{f}(x)}$ Alors: $|\tilde{f}(x)| = c \tilde{f}(x)$
 $= \tilde{f}(cx) = \text{Re } \tilde{f}(cx)$
 $= U(cx)$

donc: $U(cx) \leq p(cx) = |c| p(x) = p(x)$

d'où: $\forall x \in E \quad |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.

Théorème: Extension de Théorème (H-B)

S = un s.e.v de l'espace normé $(X, \|\cdot\|)$, et $f \in S^*$ / forme linéaire continue.
 Alors il $\exists \tilde{f} \in X^*$ / $\tilde{f}|_S = f$ et $\|f\| = \|\tilde{f}\|$

preuve * il faut chercher la semi norme qui associe S ?

soit $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. On applique Théorème de (H-B) complexe.
 Ceci montre qu'il $\exists$ une forme linéaire $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{K}$, $\tilde{f}|_S = f$.

$\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\| \|x\|$ Donc $\|\tilde{f}\| = \sup \left\{ |\tilde{f}(x)| \mid x \in E, \|x\| \leq 1 \right\}$
 $\leq \|f\|$

Pourtant On a aussi:

$\|\tilde{f}\| \geq \sup \left\{ |f(x)|, x \in S, \|x\| \leq 1 \right\} = \|f\|$ D'où le résultat.

Corollaire

Soit X un espace normé $(X, \|\cdot\|)$ et $x \in X \setminus \{0\}$

i) $\exists f \in X^*, \|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$

ii) si $z \neq y \in X \quad \exists f \in X^* \quad f(y) \neq f(z)$

iii) $\|x\| = \max \left\{ |f(x)| \mid f \in X^*, \|f\| = 1 \right\}$

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

$$\sup_{f \in X^*} \{ |f(x)|, \|f\| \leq 1 \} \leq \|x\|$$

← tr. vrais

Preuve

i) On prend $S = \mathbb{R} \cdot x$ (droite) et $g: S \rightarrow \mathbb{K}$ (forme linéaire + continue)
 $\lambda x \mapsto \lambda \|x\|$
 Alors $\|g\| = \sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = 1$

et par Théorème de (H-B), $\exists f \in X^*$ $f|_S = g$. Ce qui montre que:
 $f(x) = \|x\|$ ($\lambda=1$) et $\|g\| = \|f\|$ (d'après Théorème de l'extension de H-B)

ii) posons $x = y - z$. On applique (i) On obtient:

$$\begin{aligned} \|y - z\| &= f(y - z) \quad (\text{car } y - z \neq 0) \\ &= f(y) - f(z) \neq 0 \quad (\text{car } f \text{ forme linéaire}) \\ \text{donc } f(y) &\neq f(z) \end{aligned}$$

iii) Il s'ensuit par (i) et avec $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$

$$\|x\| \geq \sup \{ |f(x)|, f \in X^*, \|f\| \leq 1 \}$$

$$\text{Alors } \|x\| = \max \{ |f(x)|, f \in X^* \text{ et } \|f\| \leq 1 \}$$

Corollaire: Soit X un e.v.m., si X^* est séparable Alors X est séparable

(pas forcément) $\Rightarrow$ si on prend $\ell_1^* = \ell^\infty$ Exercice ①

La réciproque n'est pas vraie.

ℓ_1 est séparable, de plus $\ell_1^* = \ell^\infty \neq \ell^1 = (\ell^\infty)^*$

ℓ^∞ n'est pas séparable (Exercice) ②

Exercice: Soit E (e.v.m.) / $E \neq \{0\} \Rightarrow E^* \neq \{0\}$
 (l'espace ℓ^p qui répond)

La réciproque: $E = L^p([0,1])$ $0 \leq p \leq 1$

munie de la distance $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt$

$E \neq \{0\}$ par $E^* = \{0\}$

Propriété : Soit E e.v.m et soit F s.e.v fermée
de E . $\forall a \notin F, \exists f \in E^* / f(a) \neq 0$
et $f(v) = 0, \forall v \in F$.

Preuve : On a appliqué le corollaire précédent dans l'espace quotient
noté E/F (car F est s.e.v fermé)

Alors il $\exists \Phi \in (E/F)^* / \Phi(\bar{a}) \neq 0$ où $\bar{a} = a + F$
est la classe de a dans E/F

il suffit de ~~decomposer~~ décomposer f par :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ \pi \searrow & & \uparrow \Phi \\ & E/F & \end{array}$$

donc $f(a) = \Phi(\pi(a))$
 $= \Phi(\bar{a}) \neq 0$

et $f(v) = \Phi(\pi(v)) = \Phi(0) = \Phi(0) = 0$ (linéaire)
 $\pi(v) = v + F = 0 + F = 0 + F = \pi(0) = 0$

Remarque : Tout s.e.v fermé F d'un e.v.m E est l'inclusion
des noyaux fermés le contenant

$$F = \bigcap_{f \in E^*} \ker(f) \quad (\text{Exercice})$$

$F \subseteq \ker(f)$ (3)

Exercice : Soit F s.e.v d'espace normé $(X, \|\cdot\|)$ Mq :
 $\forall y \in X \quad d(y, F) = \inf \{ \|y - x\| \mid x \in F \}$
 $= \max \{ |f(y)| \mid f \in X^*, \|f\| = 1 \}$

Espace réflexifs :

Soit E un e.v.m, $x \in X$ et $f \in X^*$, d'après ce qui précède. On peut
noter que $f(x)$ comme une fonction sur X (si x est une variable)
ou bien sur X^* (si f est une variable) plus précisément le résultat
 $\|x\| = \max \{ |f(x)| \mid \|f\| \leq 1, f \in X^* \}$

$$J: X \longrightarrow X^{**}$$

$$x \longmapsto Jx$$

$$X^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f \longmapsto J(Jf) = f(x) = \langle f, x \rangle$$

$$X \equiv X^{**}$$

nous a permis de considérer $x \in X \setminus \{0\}$ comme une forme linéaire sur X^* d'une façon formelle. à chaque $x \in X$ On peut associer la forme linéaire :

$$J(x): X^* \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto J(x)(f) = f(x)$$

On sait que $J(x)$ est forme linéaire + continue.
car: $(\|J(x)\| \leq \|x\|)$

et nous avons prouvé que l'app $J: X \longrightarrow X^{**}$
est linéaire, continue, et isométrique. Alas J est injective mais en général J n'est pas surjective. On peut voir que X comme un s.e.v. de X^{**}

Définit°: Un e.v.n $(X, \|\cdot\|)$ est dit réflexif si:
 $J: X \longrightarrow X^{**}$ est surjective. c.à.d: $J(X) = X^{**}$

Remarque: si X est réflexif. Alas $X \cong X^{**}$ (complet) $\rightarrow$ forcément X complet

Alas on peut identifier implicitement X à X^{**} (à l'aide de isomorphisme isométrie) $\rightarrow$ Tout espace réflexif est complet ($X = X^{**}$)

$$\begin{aligned} (l^p)^* &= l^q \\ (l^p)^{**} &= l^{q*} = l^p \end{aligned}$$

Exemple: $1 < p < \infty$ $(C_0)^* = l_1 = l_\infty$ pas réflexif

$$L^p(\Omega, \mu, A) \text{ et } l^p = \left\{ x / \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Ces sont des espaces réflexifs

$$(L^p)^{**} = ((L^p)^*)^* = (l^q)^* = l^p \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Pas entre l_1, l^∞ et C_0 car $l_1 \subset C_0 \subset l_\infty$ ne sont pas des espaces réflexifs puisque $C_0^* = l_1$ et $l_1^* = l_\infty$ mais $l_1^{**} = l_\infty \neq l_1$

2) Forme géométrique de Thé de Hahn Banach.

Définit°: Soit H s.v. de l'espace vectoriel E . On dit que H est hyperplan si :

$$\begin{aligned} \dim E &= n \\ \Rightarrow \dim H &= n-1 \\ E &= H \oplus \mathbb{K}e \\ e &\notin H \end{aligned}$$

$$\text{codim } H = \dim E/H = 1 \text{ (Algébrique)}$$

Théorème

Soit E un e.v. on a alors :

1) H est hyperplan ssi $\exists f: E \rightarrow \mathbb{K}, f \neq 0$ une forme linéaire

$$H = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = \ker(f)$$

2) Un hyperplan H ou bien fermé ou bien est dense dans E i.e. $(\overline{H} = E)$

••) Un hyperplan H fermé ssi $f \in E^*$

Preuve : 1) Exo

(4)

2) Il est clair que f est continue alors $H = \ker(f)$

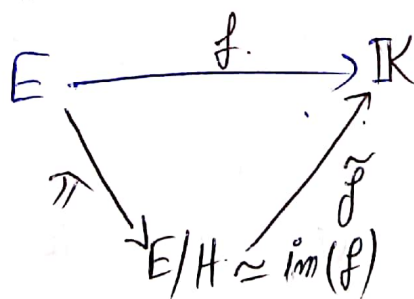
d'après le point (1) est fermé

Contrairement supposons que H est fermé, Alors E/H est un (e.v.)

Comme H est un hyperplan, Alors il $\exists f \in E^*$ et $f \neq 0$ $H = \ker(f)$

On va montrer que f est continue.

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$



• Comme $f \neq 0$, Alors

$$\text{im}(f) = \mathbb{K}$$

En effet ; supp que $\text{im}(f) \subsetneq \mathbb{K}$, Alors $\dim_{\mathbb{K}} \text{im}(f) = 0$

donc $\forall x \in E, f(x) = 0$, Ça signifie que $f = 0$

Ceci est impossible (car $f \neq 0$)

Donc $\text{im}(f) = \mathbb{K}$ et $\dim \text{im}(f) = 1$ Ceci implique E/H est de $\dim < +\infty$

Comme $\tilde{f}$ est linéaire, alors $\tilde{f}$ est continue.

On sait déjà que π est linéaire continue, ce qui montre que

$f = \tilde{f} \circ \pi$ est aussi continue.

* Montrons que si H n'est pas fermé, alors $\overline{H} = E$.

Si H n'est pas fermé, alors $H \subsetneq \overline{H}$, donc il $\exists e \in \overline{H} \setminus H$, $f(e) = 1$.

Soit $x \in E$; $x = \underbrace{x - f(x) \cdot e}_{x_1} + \underbrace{f(x) \cdot e}_{x_2}$.

On a: $f(x_1) = f(x - f(x) \cdot e) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x_1 \in H \subsetneq \overline{H}$

$x_2 = f(x) \cdot e \in \overline{H}$ (car $\overline{H}$ est un s.e.v de E)

D'où: $x = x_1 + x_2 \in \overline{H}$

Donc $E \subset \overline{H}$, comme $\overline{H} \subset E$, d'où l'égalité: $(E = \overline{H})$

Définition: i) Un hyperplan affine est la translate d'un hyperplan vectoriel. $H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$

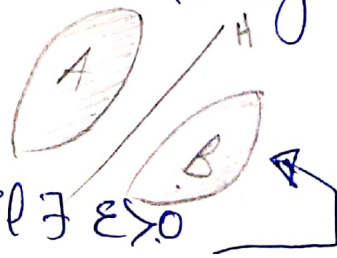
ii) Une forme affine est translate d'une forme linéaire

Remarque: D'après Théorème précédent il convient de bien mentionner l'hyperplan affine $\{x \in E \mid f(x) = c\}$ où $c \in \mathbb{K}$

* Dans toute la suite: E désigne un e.v.n sur $\mathbb{R}$.

Définition: Soit A et B 2 parties non vides de E . On dit que l'hyperplan affine $H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ sépare A et B au sens large.

si on a $f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in A$ et $f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in B$



On dit que H sépare A et B au sens strict, s'il $\exists \varepsilon > 0$

$f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in A$ et $f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in B$.

Théorème : (H-B 1ère forme géométrique)

Soit A et B 2 parties non vides de E / $A \cap B = \emptyset$. Supposons que A est ouvert, B convexe. ^{($f(x) = \alpha$)}

Alors il $\exists$ un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens large. cad il $\exists f \in E^* \setminus \{0\}, \exists \alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A, \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

Preuve: la démonstration est basée sur 2 lemmes suivants:

Lemme 1 [La Jauge de Convexe]

Soit C une partie convexe ouverte de E , avec $0_E \in C$.

$\forall x \in E$, on pose $p_C(x) = \inf \{ \alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C \}$

On dit que p_C est la jauge de C si elle vérifie les propriétés suivantes:

1) $\exists M > 0 \mid 0 \leq p_C(x) \leq M \|x\| \quad \forall x \in E$.

2) $C = \{ x \in E \mid p_C(x) < 1 \}$

3) p_C est une sous-norme

Preuve: 1) Comme C est ouvert, alors il $\exists r > 0, B(0, r) \subset C$

Alors: $\frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset C \quad \forall x \in E \setminus \{0\}$

donc: $p_C(x) \leq \frac{2\|x\|}{r} \quad \forall x \in E \setminus \{0\}$ (même pour 0 la propriété est vraie)

2) Soit $x \in C$, pour ε assez petit, $p_C(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1 \quad (1+\varepsilon)x \in C$.

Soit $x \in \{ x \in E \mid p_C(x) < 1 \}$

Alors $\exists 0 < \alpha < 1 \mid \frac{x}{\alpha} \in C$, puisque $0 \in C$, Alors:

$$x = \alpha \left(\frac{x}{\alpha} \right) + (1-\alpha) 0 \in C \quad (\text{car } C \text{ est convexe})$$

Par conséquent, $C = \{ x \in E \mid p_C(x) < 1 \}$

3) Exo

(5)

Lemme (2)

Soit C une partie convexe ouverte non vide de E , et soit $x_0 \notin C$
Alors, $\exists f \in E^*$, $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in C$ ($x_0 \neq 0$)

$\{x_0\}$

En particulier l'hyperplan affine d'équation $[f = f(x_0)]$
sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Preuve: Pour restreindre la preuve, et,

On translate, on peut très supposer $0 \in C$
Alors d'après le lemme précédent. On introduit le "jauge".

$$p(x) = p_C(x) = \inf \left\{ \alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \quad \forall x \in E$$

• Considérons $G = \mathbb{R}_+ x_0$ un sev de E et la forme linéaire

$$g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = tx_0 \longmapsto t = g(x)$$

comme $x_0 \notin C = \{x \in E / p(x) < 1\}$

(d'après lemme précédent)

Alors $p(x_0) \geq 1$ Il en résulte que

$$\begin{cases} \text{Pour } t > 0 & g(x) = t < t p(x_0) = p(x) \\ \text{Pour } t \leq 0 & g(x) = t \leq 0 < p(x) \end{cases}$$

Ceci implique $\forall x \in C, g(x) < p(x)$

Donc on peut appliquer Théorème de H-B forme analytique forte.
cad il $\exists$ un prolongement f sur E de g .

D'après Théorème précéd

$$\begin{cases} f|_G = g \\ f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E \end{cases}$$

$\exists M > 0, f(x) \leq p(x) \leq M \|x\| \quad \forall x \in E$ ce qui montre que $f \in E^*$

En fin: $f(x_0) = g(x_0) = 1$ et $f(x) \leq p(x) < 1 \quad \forall x \in C$

Ceci implique l'hyperplan $H = \{x \in E / f(x) = 1\}$ sépare le $\{x_0\}$ et C
au sens large.

Démonstration du Théorème :

On introduit $C = A - B = \{a - b / a \in A \text{ et } b \in B\}$ qui non vide. Comme A et B sont convexe alors C est aussi convexe.

• Remarque $C = \bigcup_{b \in B} (A - b)$ est ouvert (car $A - b$ est ouvert et la réunion
de ouverts est ouvert)

Comme $A \cap B = \emptyset$ Alors $0 \notin C$, Par le lemme précédent,
 il $\exists f \in E^* \setminus \{0\}$ tq: $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in C$
 $f(0) = 0$ (1.1)

On en déduit: $f(a-b) \leq 0$, $\forall a \in A$ et $b \in B$

On prend $\alpha \in \mathbb{R}$ / $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$

Par construction de l'hyperplan $[f(x) = \alpha]$ On a séparé A et B au sens large.

Théorème (2^{ème} forme géométrique de Hahn Banach)

Soit A et B deux parties non vides convexes. tq $A \cap B = \emptyset$
 Supposons que A est fermé et que B est compact, Alors il $\exists$
 un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens strict.

On définit: $\begin{cases} A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon) \\ B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon) \end{cases} \quad (\varepsilon > 0 \text{ assez petit})$

Par construction de A_ε et B_ε On obtient que A_ε et B_ε sont convexes
 de E non vides et ouvertes.

On choisit ε pour avoir $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$

en effet: On a $d(A, B) = \inf_{b \in B} d(b, A) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)$

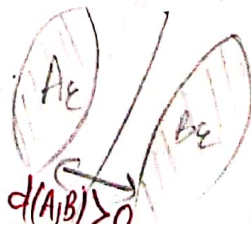
d'app $\alpha: b \longrightarrow d(b, A)$ est continue et par l'hypothèse B est compact.
 alors $d(A, B) = \min d(b, A)$

• supp $d(A, B) = 0$, Alors $\exists b \in B, \exists (a_n) \subset A$ tq $\|a_n - b\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $\Rightarrow a_n \longrightarrow b \in \bar{A} = A$ (A est fermé) Ceci impossible (car $A \cap B = \emptyset$)

Pour $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ il suffit de choisir

$\varepsilon = \frac{1}{3} d(A, B)$. Alors d'après Théorème 1^{ère} forme géométrique

de (H-B) il $\exists$ un hyperplan affine fermé d'équ^l $[f = \alpha]$



qui sépare A_ε et B_ε au sens large. $\text{càd. } \exists f \in E^* \setminus \{0\}$
 et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(a + \varepsilon z) \leq \alpha < f(b + \varepsilon z) \quad \forall a \in A \mid \forall b \in B$$

$$\forall z, z' \in B(0, 1)$$

$$\text{Alors } f(a) + \varepsilon f(z) \leq \alpha < f(b) - \varepsilon f(z') \quad \begin{matrix} z \in B(0, 1) \\ -z = z' \in B(0, 1) \end{matrix}$$

$$\text{Donc: } f(a) + \varepsilon \sup_{\|z\| \leq 1} |f(z)| \leq \alpha < f(b) + \varepsilon \inf_{\|z\| \leq 1} (-f(z'))$$

$$\text{D'où } f(a) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha < f(b) - \varepsilon \|f\|$$

On en déduit que A et B sont séparables au sens strict.

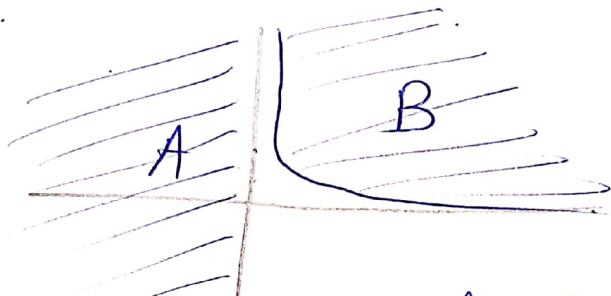
Pour l'hypothèse l'hyperplan affine d'équation $[f(x) = \alpha]$

Remarque: les conditions de A et B fermées + convexes sont insuffisantes pour la séparat° stricte.

Contre Exemple: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } y > 0\}$ sont fermées

De plus:



Corollaire: soit F un sev de E . $\text{tg: } F \neq E$, alors il $\exists f \in E^* \setminus \{0\}$

$f \neq 0$ et $f(x) = 0 \quad \forall x \in F$.

Preuve (Exo)

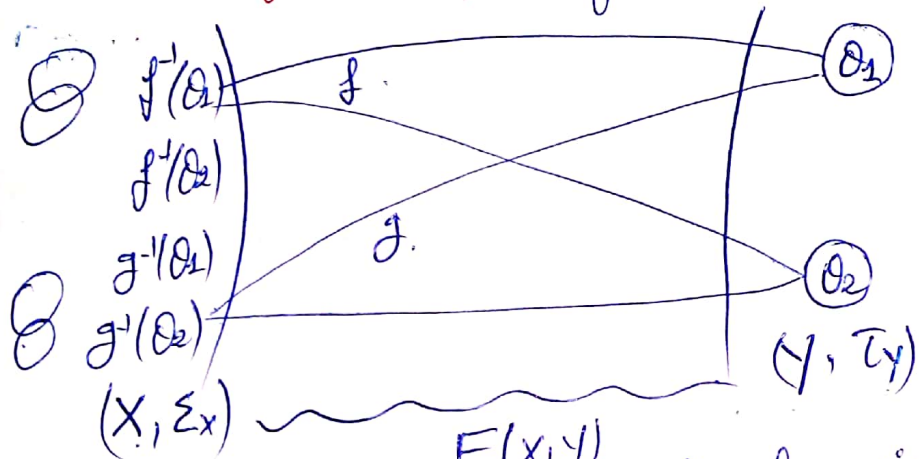
⑥

chapitre ⑤: Topologie faible

I) Construct° de la topologie faible:

Considérons un espace topologique (X, τ_Y) et l'ensemble des applicats F de l'ensemble X dans (Y, τ_Y) . On définit une topologie Σ_X sur F qui est formée par les ouverts qui sont des réunions qd. des intersections finies des préimages des ouverts de τ_Y par toute les app de F .

(image réciproque) définies $X \longrightarrow Y$



$$U = \bigcup_{q \in q} \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(O_i)$$

(arbitraire) $\downarrow$ finies

(topologie forte. $\exists$ déjà dans l'espace)

Dans ce cas Σ_X devient la topologie la moins fine sur X rendant continue les $f \in F$.

II) Topologie faible $\tau(X, X^*)$

Pour $Y = \mathbb{R}$ muni de sa topologie initiale, c'est la topologie forte. et $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé sur $\mathbb{R}$. dans ce cas $\Sigma_X = \tau(X, X^*)$

Définit°: la topologie associée à la norme de X $\|\cdot\|$ est dite la topologie forte sur X .

la topologie faible $\tau(X, X^*)$ est la topologie moins fine sur X rendant continue les applicats linéaires $x \in X \xrightarrow{\varphi_f} f(x) \in \mathbb{R} \quad f \in X^*$

Remarque :

- les ouverts de X dans $\mathcal{T}(X, X^*)$ sont alors les réunions gls de intersections finis des $f^{-1}(\theta)$, où $\theta \subset \mathbb{R}$ est ouvert et $f \in X^*$
- la topologie $\mathcal{T}(X, X^*)$ est plus faible que la topologie forte $\mathcal{T}^{|| \cdot ||}$ (forte)
 cad $\mathcal{T}^{|| \cdot ||} \supset \mathcal{T}(X, X^*)$. Cela signifie que $\forall U \in \mathcal{T}(X, X^*)$ ouvert, alors U est aussi ouvert dans la topologie $\mathcal{T}^{|| \cdot ||}$.

Remarque : La Topologie faible $\mathcal{T}(X, X^*)$ est séparée.

Preuve : Soient $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) il s'agit de trouver $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ ouverts dans la topologie faible $\mathcal{T}(X, X^*)$ / $x_i \in \mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ $i=1,2$.

Alors d'après Théorème de H-B 2ème Forme géométrique, il $\exists$ un hyperplan affine qui sépare $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ au sens strict.

cad : il ($\exists$ une forme linéaire) $\exists f \in X^* \setminus \{0\}, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq :

$$f(x_1) < \alpha < f(x_2). \text{ Posons } \mathcal{O}_1 = \{x \in X, f(x) < \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha[)$$

$$\mathcal{O}_2 = \{x \in X, f(x) > \alpha\} = f^{-1}]\alpha, +\infty[.$$

$x_1 \in \mathcal{O}_1$ et $x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Par conséquent :

$\mathcal{T}(X, X^*)$ est séparée.

Remarque : La propriété précédente implique qu'une suite C_V dans $(X, \mathcal{T}(X, X^*))$ sa limite est unique.

Propositi^o : Une base de voisinage de x_0 est donnée par les parties

$$V_{\epsilon, f_1, \dots, f_n}(x_0) = \{x \in X \mid |f_i(x - x_0)| < \epsilon, \forall i=1, \dots, n\}$$

avec $\epsilon > 0, f_1, \dots, f_n \in X^*$ arbitraire.

Preuve : Soit U un voisinage ouvert de x_0 pour $\mathcal{T}(X, X^*)$, alors il $\exists$ des formes linéaires continues $f_1, \dots, f_n \in X^*$ et des ouverts (w_i) de $\mathbb{R}$ tq $f_i(x_0) \in w_i$ $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(w_i) \subset U$.

Comme $\forall i=1 \dots n$, $W \subset \mathbb{R}$, voisinage de $f_i(x_0)$
 Alors il $\exists \varepsilon > 0$, $J - \varepsilon + f_i(x_0), \varepsilon + f_i(x_0) \subset W_i$
 base de voisinage

$$V_\varepsilon(x_0) = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(J - \varepsilon + f_i(x_0), \varepsilon + f_i(x_0))$$

$$\subset \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(W_i) \subset U$$

Remarque On notera pour $f \in X^*$

$$\ker(f) \subset V_{\varepsilon, f}(0) = \{x \in X / |f(x)| < \varepsilon\}$$

$$V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(0) = \bigcap_{i=1}^n V_{\varepsilon, f_i}(0) \supset \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) \text{ s.e.v. de codim } < +\infty.$$

fermé

• $\text{Id} : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, \sigma(X, X^*))$ est continue. (Exo) ①

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \|x - x_0\| \|f\|$$

• la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ est exactement la topologie associée à la famille des semi-norme $(p_f)_{f \in X^*} : p_f(x) = |f(x)|, \forall x \in X$.
 sépare les éléments de X . En effet:
 $\forall x \in X \setminus \{0\}$ on a: $\|x\| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} p_f(x)$

Alors: $\exists f \in X^*, \|f\| \leq 1, p_f(x) \neq 0$.

* si $\dim X < \infty$ Alors $\sigma(X, X^*) = \tau_{\|\cdot\|}$. En effet:

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de X ; Alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ forme une base de X^* où $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

donc la famille des semi-norme $(p_{e_i^*})$ est équivalente à la norme.

$$\|\cdot\|_X \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} p_{e_i^*}(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|x\|_\infty$$

$$\text{Alors } \sigma(X, X^*) = \tau_{\|\cdot\|_\infty} = \tau_{\|\cdot\|_X}$$

le cas où X est de dim $< \infty$
 On a l'égalité de Topologie

Notation:

Soit $(x_n) \subset X$, une suite de X . On désigne par $x_n \longrightarrow x$ la convergence de x_n vers x par la topologie faible.

- $x_n \longrightarrow x$ converge fortement vers x c.à.d :
 $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ où $\|\cdot\|$ la norme associée à X .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre X et X^* .
- $\langle f, x \rangle = f(x)$ $f \in X^*, x \in X$

Proposition : Soit (x_n) une suite de l'espace normé $(X, \|\cdot\|)$

1) $x_n \longrightarrow x$ pour $\sigma(X, X^*)$ si $\forall f \in X^* f(x_n) \longrightarrow f(x)$

2) $x_n \xrightarrow{\text{fortement}} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\text{faiblement}} x$

3) Si $x_n \longrightarrow x$ alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

4) $x_n \longrightarrow x$ et $f_n \longrightarrow f$ dans X^*

Alors $f_n(x_n) = \langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle = f(x)$

Preuve : 1) si $x_n \longrightarrow x$, alors $\forall V \in \mathcal{U}(x) \subset \sigma(X, X^*)$ (base de voisinage de x)
 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V$. D'après l'expression d'une base de voisinage pour $f \in X^*, \varepsilon > 0 \exists N > 0, \forall n \geq N, x_n \in V = \{y \in X / |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$

Ceci entraîne $\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N$
 $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$. Ce qui montre que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

($\Leftarrow$) On va montrer que si $x \in U \in \sigma(X, X^*)$ ouvert, alors

$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, x_n \in U$

• Comme U est ouvert dans $\sigma(X, X^*)$ alors $\exists f_1, \dots, f_k \in X^*$

$x \in \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(w_i) \subset U$ où $w_i \subset \mathbb{R}$ ouvert

Comme $f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x)$, alors $\exists N_i \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N_i, f_i(x_n) \in w_i$

Pour $N = \max_{1 \leq i \leq k} N_i$ On obtient $\forall n \geq N, x_n \in \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(w_i) \subset U$

On en déduit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$

$$2) x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightarrow x$$

en effet : supposons que $x_n \rightarrow x$: Alors $\forall f \in X^*$,

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| = |\langle f, x_n - x \rangle|$$

Donc $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Donc $x_n \rightarrow x$.

3) supposons que $x_n \rightarrow x$, et considérons :

$$J(x) : X^* \rightarrow \mathbb{R} \quad J(x)(f) = f(x) \quad \text{linéaire continue.}$$

$$\text{Alors } \forall f \in X^* : J(x_n)(f) \rightarrow J(x)(f) = f(x)$$

$\Rightarrow (J(x_n)(f))$ bornée, Alors $\sup \{ J(x_n)(f), n \in \mathbb{N} \} < \infty \quad \forall f \in X^*$

Comme X^* est un espace de Banach. Alors d'après Théorème de (B-S)

$\sup \{ \|J(x_n)\|, n \in \mathbb{N} \} < \infty$. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \|J(x)\| &= \sup \{ |J(x)(f)|, f \neq 0, \|f\| < 1 \} \\ &= \sup \{ |f(x)|, f \neq 0, \|f\| < 1 \} = \|x\| \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

Ceci implique que $\sup_n \|x_n\| = \sup_n \|J(x_n)\| < \infty$. Donc (x_n) est bornée

$$\|x\| = \|J(x)\| \leq \liminf \|J(x)\| = \liminf \|x_n\|$$

4) $(x_n \rightarrow x \text{ et } f_n \rightarrow f) \Rightarrow f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ En effet :

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n - x)| \\ &\leq \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| \end{aligned}$$

D'après (3). $(\|x_n\|)$ est bornée. donc $f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

$$f(x_n) = \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

$$\hookrightarrow x_n \rightarrow x$$

1) Exemple:

* Soit H un espace de Hilbert. Alors $x_n \rightarrow x$ ssi :
 $\langle x, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$.

* $x_n \rightarrow x$ ssi $\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ \|x_n\| \rightarrow \|x\| \end{cases}$ voir série (A).

2) Soit $(A, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p < \infty$ et $p=1$
 m σ -finie. $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(m)$

$$\Leftrightarrow \int_A f_n g \, dm \rightarrow \int_A f g = \langle g, f \rangle \quad \forall g \in L^q = (L^p)^*$$

Remarque : Soit H un espace de Hilbert σ -séparable. On va montrer avec un exemple.
 que $x_n \rightarrow x \not\Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

• Si (e_n) base orthonormée de H . On a $e_n \xrightarrow{\text{faible}} 0$ (car $(e_n | x) \rightarrow 0$)
 $\forall x \in H$. $\|x\|^2 \geq \sum \| (e_n, x) \|^2 < \infty$ (Inégalité de Bessel)

D'ailleurs $\|e_n\| = 1$

↑ Par Exemple (1) On obtient que $e_n \not\rightarrow 0$ (car $\|e_n\| = 1$)

• Si du $X < \infty$, Alors $\sigma(X, X^*) = \mathcal{T}$. Dans ce cas $x_n \rightarrow x$ ssi
 $x_n \rightarrow x$.

Théorème :

Soit A une partie convexe de l'espace normé X . Alors la fermeture
 forte $\overline{A}^{\mathcal{T}}$ de A coïncide avec la fermeture faible $\overline{A}^{\sigma}$
 cad : $\overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\sigma}$

Preuve : $\sigma(X, X^*) \subseteq \mathcal{T}$!! Alors $\overline{A}^{\mathcal{T}} \subseteq \overline{A}^{\sigma}$ $\left(\begin{array}{l} \text{si } x \in \overline{A}^{\mathcal{T}} \text{ alors il } \exists (x_n) \subset A \\ x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x \\ \text{Alors } x \in \overline{A}^{\sigma} \end{array} \right)$

• Supposons par l'absurde que : $\overline{A}^{\mathcal{T}} \subsetneq \overline{A}^{\sigma}$

soit $z \in \overline{A}^{\sigma} \setminus \overline{A}^{\mathcal{T}}$. Puisque A est convexe. On sup dans ce cas $A \neq \emptyset$
 Alors $\overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}$ est fermé convexe non vide. De plus $\{z\}$ compact convexe.

(sauf
déjà
valable)

Alors d'après Théorème de (H-B) 2^{ème} forme géométrique.

$$\exists f \in X^* \setminus \{0\}, \exists c \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0$$

$$f(x) \leq c < c + \varepsilon \leq f(z) \quad \forall x \in \bar{A}^c$$

Alors: $x \in \bar{A}^c$. Donc $\bar{A}^c \subseteq \{x \in X, f(x) \leq c\} = B = f^{-1}([-\infty, c])$

Orme $f \in X^*$. Alors B est fermé faible (voir structure de $\mathbb{R}$ la Topologie faible)

et puisque $A \subseteq B$ ($A \subset \bar{A}^c \subseteq B$) faiblement fermé Alors: $\bar{A}^c \subseteq B$.

(On cherche contradiction) Donc $z \in B \Rightarrow f(z) \leq c$. impossible car ($c < f(z)$)
 par conséquent: $\bar{A}^c = \bar{A}$

Corollaire: Une partie F de X e.v.m. F fermé convexe

$\Leftrightarrow F$ faiblement fermé

ou si F se.v fermé Alors F fermé si F faiblement fermé.

Théorème: soit X un e.v.m. Alors

$$X^* = \{f \in X' / f \text{ continue sur } (X, \sigma(X, X^*))\}$$

Preuve: " $\subseteq$ " découle de la construction de la topologie faible $\sigma(X, X^*)$

" $\supseteq$ " si f est continue, si X muni de la topologie faible $\sigma(X, X^*)$

Alors $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ ouvert. $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X , $\sigma(X, X^*)$

car $f(U)$ est un ouvert faible. Puisque $\sigma(X, X^*) \subseteq \tau \parallel \cdot \parallel$

donc $f^{-1}(U)$ est ouvert fort. Donc f est continue sur $(X, \parallel \cdot \parallel)$

D'où l'égalité.

(chercher la démonstration de continuité par topologie)

Théorème: soit E et F 2 espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$

Alors l'application $T: (E, \parallel \cdot \parallel) \rightarrow (F, \parallel \cdot \parallel)$ est continue pour les normes $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{\parallel \cdot \parallel} x \Rightarrow T(x_n) \xrightarrow{\parallel \cdot \parallel} T(x) \\ x_n \rightarrow x \Rightarrow T(x_n) \xrightarrow{\text{faiblement}} T(x) \\ x_n \longrightarrow x \Rightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x) \end{array} \right.$$

si on a :

l'app T est continue pour les normes ssi
 $T: (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (F, \sigma(F, F^*))$ est faiblement continue
 c-à-d T est continue pour la topologie faible.

Preuve:

⇒) Supposons que T est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$
 Alors $\forall f \in F^*, f \circ T \in E^*$. D'après Théorème précédent
 On obtient que $f \circ T$ est continue $(E, \sigma(E, E^*))$, puisque $\sigma(F, F^*)$
 est la topologie moins fine contenant la famille $\{f^{-1}(U) \mid f \in F^* \text{ et } U \text{ ouvert dans } \mathbb{R}\}$.

Alors $\forall U \in \sigma(F, F^*)$ ouvert faible est définie $U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} f_i^{-1}(U)$

Où J q-à-q, I_j est finie, $f_i \in F^*$ et U_i est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Ceci implique que $T^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} (f_i \circ T)^{-1}(U_i)$ ouvert faible dans E .

• Comme $\forall f \in F^*, f \circ T \in E^*$. Alors d'après Théorème précédent : On peut
 constater que $T^{-1}(U)$ est ouvert faible, et aussi T est continue
 de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \sigma(F, F^*))$

⇐) Supposons que T est faiblement continue c-à-d :

$T: (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (F, \sigma(F, F^*))$ est continue pour les
 deux topologies faibles. Alors le graphe de T , G_T est faiblement
 fermé dans $(E \times F, \sigma(E \times F, (E \times F)^*))$ (faible fermé $\Leftrightarrow$ fermé + cvg)

donc G_T est fermé dans $(E \times F, \|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F)$

Puisque E et F sont deux espaces de Banach, alors
 d'après Théorème de graphe fermé T est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$

Topologie faible - $\sigma(E^*, E)$

• Sur l'espace X^* sont déjà définis 2 topologies :

① la Topologie forte associée à la norme de X^*

② la Topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$

En va définir une ③^{ème} Topologie sur X^* c'est la topologie faible- $*$ l'on note $\sigma(X^*, X)$

Définition: $\sigma(X^*, X)$ c'est la topologie sur X^* la moins fine rendant continues toute forme linéaire $(\varphi_x)_{x \in X}$
 $f \in X^*, \varphi_x \mapsto \varphi_x(f) = f(x) \quad \forall x \in X$

Remarque: Puisque $X \subset X^{**}$

Alors forcément $\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**}) \subset \tau^{***}$

• si $\dim X < \infty \Rightarrow \dim X^* < \infty \Rightarrow \dim X^{**} < \infty$

les 3 topologies sur X^* coïncident

• si X est réflexif ($X = X^{**}$) Alors $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$

Proposition:

la Topologie faible- $*$ $\sigma(X^*, X)$ est séparée

Preuve: Soient $f_1, f_2 \in X^*, f_1 \neq f_2$. Alors il $\exists x \in Y$,

$f_1(x) \neq f_2(x)$. On peut introduire $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) < \alpha < f_2(x)$$

On pose $O_1 = \{f \in X^*, f(x) < \alpha\} = \varphi_x^{-1}([-\infty, \alpha[)$

$$O_2 = \{f \in X^*, f(x) > \alpha\} = \varphi_x^{-1}]\alpha, +\infty[$$

Comme φ_x est continue, d'après définitⁿ de topologie faible- $*$
Alors O_1 et O_2 sont des ouverts pour $\sigma(X^*, X)$ avec $f_1 \in O_1, f_2 \in O_2$

$O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ce qui montre que $\sigma(X^*, X)$ est séparée.

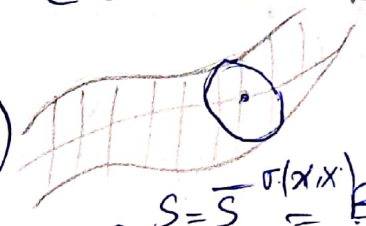
Proposition: On obtient une base de voisinage d'un point $f_0 \in X^*$
pour $\sigma(X^*, X)$ toutes parties de la forme suivantes:

$$\forall \varepsilon, x_1, \dots, x_n \quad U = \{f \in X^* / |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon \quad \forall i=1, \dots, n\}$$

$$\text{ou } \begin{cases} |\varphi_{x_i}(f) - \varphi_{x_i}(f_0)| < \varepsilon \\ (f - f_0)(x_i) = f(x_i) - f_0(x_i) \end{cases}$$

Preuve: (est similaire à la preuve de la proposition ?
convexe base de $\mathcal{F}_g$)

Remarque: On montre pour $x \in V$ ϵ est arbitraire $\ker(\psi(x))$
 $\bigcap_{\epsilon \in \mathcal{F}_g(x)} \psi(x) = \{f \in X^* \mid |\psi(x)(f)| = |f(x)| < \epsilon\}$
 $\bigcap_{\epsilon, x_1, \dots, x_n} \psi(x_i) = \bigcap_{i=1}^n \psi(x_i) \supset \bigcap_{i=1}^n \ker(\psi(x_i))$
 où $\ker(\psi(x_i))$ est s.e.v. fermé de codim $< \infty$.



$S = \overline{S} = \sigma(X, X)$
 On a pas la
 le charme de topologie faible
 est qu'il est (s.e.v.).

Remarque: La topologie faible - * c'est exactement
 la topologie définie par une famille de semi-normes. X^* dans la toute le
 double ouverts sont compacts.
 $(q_x)_{x \in X} : q_x(f) = |f(x)| \quad \forall f \in X^*$

Notation: soit $(f_n) \subset X^*$
 On désigne par :
 - $f_n \rightarrow f$ fortement $\|f_n - f\| \rightarrow 0$
 - $f_n \rightharpoonup f$ cvg. faiblement pour la topologie $\sigma(X^*, X^{**})$
 ad. $\forall \psi \in X^{**}, \psi(f_n) \rightarrow \psi(f)$
 (crochet de dualité) $\rightarrow \langle \psi, f_n \rangle_{X^{**}, X^*} \rightarrow \langle \psi, f \rangle_{X^{**}, X}$
 - $f_n \xrightarrow{*} f$ f_n cv faiblement vers f pour la topol. $\sigma(X^*, X)$

Proposit: (i) $f_n \xrightarrow{*} f$ si $\forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x)$
 - si $f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{faibl}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{*} f$
 (ii) si $f_n \xrightarrow{*} f$ et si $x_n \rightarrow x$

Alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle = f(x)$

Preuve: même preuve dans le cas de topologie faible $\sigma(X, X^*)$

Remarques:
 ① si X est réflexive. Alors $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$
 $f_n \rightarrow f$ si $f_n \xrightarrow{*} f$

② si $(f_n \rightarrow f \text{ ou } f_n \xrightarrow{*} f)$ et $x_n \rightarrow x$. $\sigma(x^*, x) \subset \sigma(x^*, x^{**})$
 $\subset \sigma(x^*, x^{**})$

Abs $\langle f_n, x_n \rangle \xrightarrow{\quad} \langle f, x \rangle$ En effet:

si on prend sur ℓ^2 , $(x_n) \in \ell^2$ et $(f_n) \in (\ell^2)^* = \ell^2$, définie par

$$f_n(i) = f_n(i) = \begin{cases} 1 & i=n \\ 0 & i \neq n \end{cases} \quad \langle f_i, x_n \rangle = \delta_{in} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_n \xrightarrow{\quad} 0$$

$$f_n \xrightarrow{\quad} 0$$

$$\sigma(\ell^2, \ell^2) = \sigma(\ell^2, \ell^2)$$

$$\sigma(H, H^*) = \sigma(H^*, H) = \sigma(H, H)$$

$$H = H^* \equiv H^{**}$$

d'après inégalité de Bessel:

$$\left(\begin{aligned} \sum |\langle x, e_n \rangle|^2 &< \infty \\ \langle x, e_n \rangle &\rightarrow 0 \\ e_n &\rightarrow 0 \end{aligned} \right)$$

si H est espace de Hilbert

Mais $\langle f_n, x_n \rangle = 1 \xrightarrow{\quad} 0$
 $\in \ell^2 = \ell^{**}$

③ $f_n \xrightarrow{*} f \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$

soit $(f_n) \subset (L^1([0,1]) \cap L^\infty([0,1]))$

On a: $\langle, \rangle$ est définie par $\langle f_n, g \rangle = \int_0^1 g(x) e^{2\pi i n x} dx$ ou

Abs $f_n \xrightarrow{*} 0$ $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{2\pi i n t}$

Théorème de Riemann
Lebesgue

soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ bornée. si $f \in L^1([a,b])$

Abs: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{2\pi i n x} dx = 0$

Mais $f_n \xrightarrow{\quad} 0$

Théorème: soit (f_n) une suite de l'espace X^* , où X est un espace de Banach

si $f_n \xrightarrow{*} f$. Abs (i) (f_n) est bornée
 (ii) $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$

Preuve: (i) si $f_n \xrightarrow{*} f$. Abs $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in X$
 $f_n'(x)$ $f'(x)$

Alors $(f_n(x))$ est bornée. donc $\sup \{ |f_n(x)| \mid n \in \mathbb{N} \} < \infty \quad \forall x \in X$.
 Comme X est un espace de Banach, alors d'après Théorème
 de (B-S) $\sup_n \|f_n\| < \infty$ et ainsi (f_n) est bornée

(ii) si $f_n \xrightarrow{*} f$ alors $\forall x \in X \quad |f(x)| \leq \liminf |f_n(x)|$ (d'après (B-S))
 $\leq \liminf \|f_n\| \cdot \|x\|$
 Donc $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$

Lemme Soient X un e.v. sur $\mathbb{K}$ $f_1, f_2, \dots, f_n \in X$ (dual algébrique de X)

$$\text{tg: } \bigcap \ker(f_i) \subseteq \ker(f)$$

Alors $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ (preuve série (3) Exo (2))

Proposit° : soit X un e.v. n, $\dim X = +\infty$

si $U \neq \emptyset \in \mathcal{G}(X, X^*)$ (resp $V \neq \emptyset \in \mathcal{G}(X^*, X)$) ouvert, alors U (resp V)
 a un contenu même droite affine $\alpha x + b \neq \{0\}$. En particulier
 U (resp V) non bornée.

Preuve : sur porte de généralité, supposons que $0 \in U$, alors
 $\exists \{f_i\}_{i=1}^n$ et $\exists \varepsilon > 0 \quad \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] = V = \{x \in X \mid |f_i(x)| < \varepsilon, \forall i=1, \dots, n\} \subseteq U$

En particulier $\bigcap \ker(f_i) \subset V \subseteq U$

Comme $\dim X = +\infty$, alors $\dim X^* = +\infty$

Alors il $\exists f \in X^* \setminus \text{vect}\{f_i\}_{i=1}^n$. D'après le lemme précédente
 $\exists x \in \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) / f(x) \neq 0, x \neq 0$
 or $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) \subseteq V \neq \{0\}$

2ème méthode pour montrer que $\bigcap \ker(f_i) \neq \{0\}$

Supposons l'absurde $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) = \{0\}$ Alors : $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$
 $x \in \ker(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow f_i(x) = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$
 $\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i)$ (si Φ injectif $\dim(X) < \dim(\mathbb{R}^n)$)

Donc $\ker(\Phi) = \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) = \{0\}$

donc Φ est injectif $\Rightarrow \dim(X) \leq \dim \mathbb{R}^n = +\infty$ ce qui est impossible

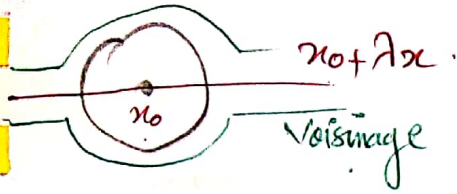
car $\dim X = \infty$

On en déduit que : $\lambda x \in \bigcap \ker(f_i) \subseteq V \subseteq U, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Donc U contient une droite affine $\neq \{0\}$

$$\begin{aligned} V_{x_0} &= x_0 + V_0 \\ &\supseteq \{x_0 + \lambda x / \lambda \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

$\cap D = \text{vect}(x)$



Remarque : si $\dim X = +\infty$

Alors la boule unité ouverte $R = \{x \in X / \|x\| < 1\}$
n'est jamais ouverte pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$. En effet :
~~car~~ R est ouvert comme B est bornée $\Rightarrow$ ne peut donc
contenir une droite affine car d'après proposition précédente.
chaque voisinage ouvert faible contenant une droite affine $\neq \{0\}$.

les ouverts dans
la topologie
faible contiennent
une droite

$$\tilde{x} = \bar{x} = x$$

J.K

Feuille d'exercices N°1

Exercice 1 Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

- 1) Montrer que si E est complet et F un sous-espace vectoriel fermé de E alors l'espace quotient $(E/F, \|\cdot\|_{E/F})$ est un espace de Banach.
- 2) Montrer que si $T \in L(E, F)$, alors l'application $\tilde{T} : E/\ker(T) \rightarrow F$ définie par $\tilde{T}(x + \ker(T)) = T(x)$ est continue et $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.
- 3) Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini telle que $\ker(T)$ soit fermé alors $\tilde{T}$ est continue. Alas T est continue

Exercice 2 Soit X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et $T : X \rightarrow Y$ une application linéaire continue. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in X$. Montrer que l'image $T(X)$ est fermée dans Y , et que T réalise un isomorphisme entre X et $T(X)$.

- Exercice 3** 1) Montrer qu'il existe un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sur l'espace ℓ^p tel que $\|x\|_p = \sqrt{(x|x)}$ pour tout $x \in \ell^p$ si et seulement si $p = 2$.
- 2) Soit $(y_n)_{n \geq 1}$ une suite de ℓ^2 . Montrer l'équivalence suivante : reading
- (i) $y_n \rightarrow y \in \ell^2$.
 - (ii) $(y_n | x) \rightarrow (y | x)$ pour tout $x \in \ell^2$ et $\|y_n\|_2 \rightarrow \|y\|_2$.
- 3) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs orthogonaux de ℓ^2 . Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_2^2 < \infty$.

- Exercice 4** 1) Soit $H = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ pour tous $f, g \in H$.
- 2) Montrer que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ forme un système orthonormé dans H .
 - 3) Déterminer $\min_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (\cos^2(x) - \alpha \sin(2x) - \beta \cos(2x))^2 dx$ et donner les valeurs de α et β où le minimum est atteint.

Exercice 5 Soit $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire bornée i.e $\|B\| = \sup\{|B(x, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty$.

- 1) Montrer qu'il existe $A \in L(H)$ tel que : (linéaire / 1^{ère} variable)
" / 2^{ème} variable
 $B(x, y) = (x | Ay)$, pour tous $x, y \in H$ et $\|A\| = \|B\|$.
- 2) Montrer que s'il existe $c > 0$ tel que $|B(x, x)| \geq c\|x\|^2$, pour tout $x \in H$, alors A est inversible et $\|A^{-1}\| \leq c^{-1}$.

Pr. Mohammed KACHAD
Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia.

Série N° ①

E/F Banach $\iff E$ complet + F fermé

E/F complet et F complet $\implies E$ complet.

Exercice (1) (et E e.v.m)

1) Puisque F est s.e.v fermé, Alors E/F est e.v.m, il reste à prouver que E/F est complet. En effet :

Soit $(\bar{x}_n)_{n \geq 1} \subset E/F$ / $\sum_{n=1}^{+\infty} \|\bar{x}_n\| < +\infty$ (série cvg Absolument) $\implies$ cvg (ssi l'espace est de Banach)

Par la définition de la norme $\|\bar{x}\|_{E/F} = \inf \{ \|x - y\|_{E/F} \mid y \in F \} = d(x, F)$

$\forall n \geq 1 \exists f_n \in F, \|x_n - f_n\| \leq \|\bar{x}_n\| + \frac{1}{2^n}$ (caractérisat° de l'inf)

Par l'hypothèse $\sum \|\bar{x}_n\| < +\infty$ et on sait que $\sum \frac{1}{2^n} < +\infty$ ($\frac{1}{2} < 1$)

ce qui montre que $\sum \|x_n - f_n\| < +\infty$. Et puisque E est complet (d'après thé de caractérisat° d'e.B)

donc $\sum (x_n - f_n) < +\infty$ (*) e.v.m

d'autre part, la surjection $\pi: E \longrightarrow E/F$ (B'idée de travail)

$$x \longmapsto \pi(x) = \bar{x} = x + F$$

linéaire + continue $\pi(x_n - f_n) = \pi(x_n) = \bar{x}_n$ (car $\pi(f_n) = \bar{0} = F$)

on en déduit que $\pi(\sum (x_n - f_n)) = \sum (\bar{x}_n) < +\infty$ (d'après (*))

d'où E/F est complet.

idées : cvg abs
caractérisat° d'inf
la surject°

$$\# \|\bar{x}\|_{e^\infty/c_0} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |x_n| \quad x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$$

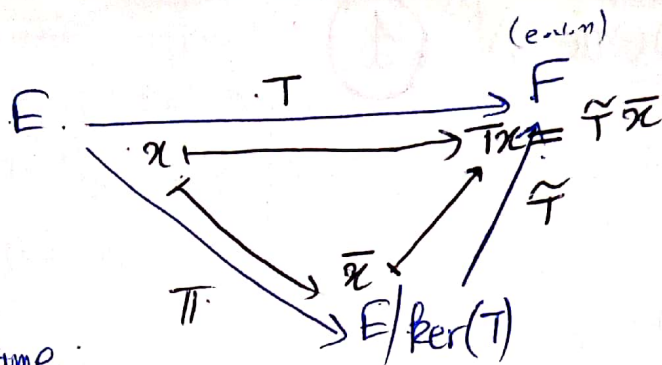
il faut M₉ C_0 s.e.v fermé de l'espace $\ell^\infty \implies \ell^\infty/c_0$ est de Banach.

* ℓ^∞ espace de Banach.

$$\ell^\infty = \{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \mid (x_n)_{n \geq 1} \text{ bornée} \}$$

$$C_0 = \{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \}$$

2)



Par le diagramme

$$T = \tilde{T} \circ \pi$$

• On a $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E$. On a:

$$\tilde{T}(\lambda \bar{x} + \bar{y}) = \tilde{T}(\overline{\lambda x + y}) = T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y) = \lambda \tilde{T}(\bar{x}) + \tilde{T}(\bar{y})$$

d'où $\tilde{T}$ est linéaire.

• Ma la continuité!

Comme T est continue; Alors $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ est fermé.

donc $E/\ker(T)$ est e.v.m.

$$T(y) = 0 \text{ car } y \in \ker(T) \\ \bar{x} = x + \ker(T)$$

• On a $\forall x \in E, \forall y \in \ker(T)$

$$\|\tilde{T}(\bar{x})\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \|x - y\|$$

passage à inf $\rightarrow ?$

$$\|\tilde{T}(\bar{x})\| \leq \|T\| \|\bar{x}\|$$

$$(\|\bar{x}\| = \inf \|x - y\|, y \in \ker(T))$$

d'où $\tilde{T}$ est continue et $\boxed{\|\tilde{T}\| \leq \|T\|}$ ①

$$\text{d'autre part : } \|T\| = \|\tilde{T} \circ \pi\| \leq \|\tilde{T}\| \|\pi\| \leq \|\tilde{T}\| \text{ (car } \|\pi\| \leq 1)$$

$$\text{d'où } \boxed{\|T\| \leq \|\tilde{T}\|} \text{ ②}$$

de ① et ② on obtient: $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

- idées
- T continue $\rightarrow E/\ker(T)$ e.v.m.
 - définit° de $\|\bar{x}\|$
 - $T = \tilde{T} \circ \pi$

3) rang fini cad $\dim \text{im}(T) < \infty$

On a $E/\ker(T) \cong_{\text{C.F.}} \text{im}(T)$ Algébriquement

1^{ère}
Théorème d'isomorphisme d'Algèbre

Puisque $\ker(T)$ est fermé Alors $E/\ker(T)$ e.v.m

Or $\dim \text{im}(T) < +\infty \Rightarrow \dim E/\ker(T) < +\infty$

Il app linéaire dans un espace de dim $< +\infty$ est continue ?

et comme $\tilde{T}$ est linéaire Alors $\tilde{T}$ est continue.

$\Rightarrow T$ est aussi continue (car π continue. ($T = \tilde{T} \circ \pi$))

idées
• Théorème d'isomorphisme d'Algèbre
• $E/\ker(T) < +\infty$
• $\tilde{T}$ linéaire

Exercice N°(2)

Ma $T(x) = \overline{T(x)}$ cad $T(x_n) = y_n \rightarrow y = Tx \in \text{im}(T)$?
 $\exists! (x_n) / T(x_n) \rightarrow T(x) = y \in \text{im}(T)$

S'il $y \in \overline{T(X)} \Rightarrow \exists (y_n) \subset T(X)$ tq $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$

$\forall n \geq 1 \exists x_n \in X$ tq $y_n = Tx_n$

On a $(y_n) \subset y \Rightarrow (y_n)_n$ est de Cauchy.

(cad) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N \|y_n - y_m\| < \varepsilon$

Or On a: $\forall x \in X \|Tx\| \geq c\|x\|$ et $c > 0$

Donc: $\|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\| \geq c\|x_n - x_m\|$

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \|y_n - y_m\|$ car $c > 0$.

$\frac{\varepsilon}{c}$ car y_n est de Cauchy

Donc $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X qui de Banach.

d'où $x_n \rightarrow x$ et $x \in X$

Puisque T est continue, Alors: $y_n = T(x_n) \rightarrow T(x)$

par l'unicité de la limite On a: $y = Tx \in T(X)$.

fin $\overline{T(X)} = T(X)$

idées
• $y_n = Tx_n$
• $\|Tx\| \geq c\|x\|$
• $y = Tx \in T(X)$

$M_q \circ g = T|_{T(X)} : X \xrightarrow{\quad} T(X)$ est un isomorphisme topologique et
 $x \mapsto g(x) = T(x)$

On a: $\forall x \in X \quad \|Tx\| \geq C\|x\| \quad (C > 0)$

$x \in \ker(T) \Rightarrow x = 0$
 Comme $\ker(T)$ s.c.v. $0 \in \ker(T)$
 $\ker(T) = \{0\}$.

* Si $Tx = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \geq C\|x\|$
 $\Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow T$ est injective.

$g(X) = \{g(x) / x \in X\} = \{Tx / x \in X\} = T(X)$ surjective.

et donc g est bijective.

* par définition On a g est continue (car T est continue).

$g^{-1} : T(X) \longrightarrow X$
 $y = Tx \mapsto g^{-1}(y) = x$

• g^{-1} est linéaire (voir preuve de chapitre 3)

Mq la continuité de g^{-1} ?

$x = T^{-1}y$
 car: $\|Tx\| = \|T T^{-1}y\| \geq C\|T^{-1}y\|$
 $= \|y\| \geq C\|g^{-1}(y)\|$

On a: $\|g^{-1}(y)\| = \|x\|$ or. $C\|x\| \leq \|Tx\| = \|y\|$

Alors: $\|g^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C}\|y\|$ d'où g^{-1} est continue et de plus:

$\|g^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$

Exercice N°(3)

idées: g bijective (injective + surj)
 $C\|x\| \leq \|Tx\|$ pour Mq
 la continuité de g^{-1} .

1) $\ell^p(\mathbb{N}) = \{x = (x_m) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} / \sum_{m=1}^{+\infty} |x_m|^p < +\infty\}$

$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$

$\Rightarrow$ Supposons qu'il $\exists$ un p.s. (./.) sur $\ell^p / \sqrt{(x/x)} = \|x\|_p$.

$\|\cdot\| \longrightarrow (\cdot, \cdot)$ (produit scalaire)

$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \in \ell^p \quad \|e_i\|_p = 1 \quad \text{Mq } p=2?$$

$$e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots) \in \ell^p \quad \|e_j\|_p = 1 \quad i \neq j$$

Alors d'après identité de parallélogramme. (à vérifier si on a produit scalaire)

$$\|e_i - e_j\|_p^2 + \|e_i + e_j\|_p^2 = 2(\|e_i\|_p^2 + \|e_j\|_p^2) \quad \|e_1\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e_n|^p \right)^{1/p} = 1$$

En remplaçant : $2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2^2 \Rightarrow p=2$

$$\|e_2\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e_n|^p \right)^{1/p}$$

Conclut que si $p \neq 2$ il n'existe pas (p.o.s) sur ℓ^p

≠) Supposons que $p=2$. idée $\sum |x_n|^2 = x_n \cdot \overline{x_n}$

On définit $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad \forall x, y \in \ell^2 = \left\{ x = (x_n)_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$

d'après l'inégalité de Hölder : $|(x|y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (p=q=2)$

$$|(x|y)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{1/2} < +\infty$$

Alors on peut définir une forme sesquilinéaire : (bien défini car fini)

$$(\cdot | \cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(x|y) \longmapsto (x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

il faut vérifier les propriétés de produit scalaire

- Hermitienne
- Positive
- Définie.

$$L^\infty \text{ (cas continu)} \neq \ell^\infty$$

- Sa norme associée Hilbertienne :

$$\|x\|^2 = (x|x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2$$

$$L^p(\mu), \|\cdot\|_p$$

$$\|\cdot\|_p = \sqrt[p]{\cdot}$$

$$(E, d) \longleftarrow (E, |\cdot|)$$

$$(E) (\cdot)$$

$$\begin{aligned} \langle x|y \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n} x_n \\ &= \overline{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{x_n}} = \overline{\langle y|x \rangle} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle \cdot | \cdot \rangle$ est Hermitienne

$$L^2(\mu) \text{ e.o.H. si } p=2$$

or $\langle \cdot \rangle$ est positive car $\forall x \in \ell^2$.

$$\langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \geq 0$$

• $\langle \cdot \rangle$ est définie car : $\langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = 0$
 $\Rightarrow \forall n \geq 1, x_n = 0$
 c-à-d. $x = 0$

il faut
séparer
entre définie
+ et +

le cas de définie pas tr facile à montrer :
 Ex : $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t) q(t) dt$ est-ce que les espaces des polynômes
 tr continue ?
 $p = 0$?

2) $\Rightarrow$ triviale car $\langle \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|_2$ sont continues.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Enq : } \|y_n - y\|^2 &= \|y_n\|^2 + \|y\|^2 - \langle y_n, y \rangle - \overline{\langle y_n, y \rangle} \\ &= \|y_n\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle y_n, y \rangle \end{aligned}$$

Par l'hypothèse : $\|y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|y\|$. D'ailleurs :

$$|\operatorname{Re} \langle y_n, y \rangle| \leq |\langle y_n, y \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|y\|^2$$

$$\text{Donc : } \|y_n - y\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\|y\|^2 - 2\|y\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{d'où : } y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$$

3) La condition d'orthogonalité est forte.

$$\|S_N\|^2 = \|x_1 + x_2 + \dots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_N\|^2$$

$\forall N \in \mathbb{N}$, posons la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$.

$\forall N, M \in \mathbb{N}, N > M$

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^N x_n \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^N \|x_n\|^2$$

(S_N) c.v. ssi $(S_N)_{N \geq 1}$ de Cauchy dans ℓ^2 .
 ssi $(\|S_N\|^2)$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet
 ssi $(\|S_N\|_2)$ c.v.g.

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\|^2 = \left\| \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

Contre Exemple :

ssi $(x_n)_{n \geq 1}$ pas orthogonaux
 $x \in \ell^2$.

Posons: $x_n = \frac{x}{n}$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$i \neq j \quad \langle x_j, x_i \rangle = \frac{\|x\|^2}{ij} \neq 0 \quad (\text{famille pas orthogonale})$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\left(x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \right) \text{ div}$$

Exercice (4)

1) $M_q \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$ est produit scalaire

2) M_q les vecteurs :

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx), \quad e_{2m+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \langle e_{2m}, e_{2m} \rangle = \delta_{m,m}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \langle e_{2m}, e_{2m+1} \rangle = 0$$

$$\langle e_{2m+1}, e_{2m+1} \rangle = \delta_{m,m}$$

$$\bullet \langle e_{2m+1}, e_{2m+1} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(mx) dx.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(x(m-n)) - \cos((m+n)x)) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x(m-n)) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

$$3) m = \min_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \int_0^\pi (\cos^2(x) - \alpha \sin(2x) - \beta \cos(2x))^2 dx$$

$$= \min_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \|f - \alpha e_5 - \beta e_4\|^2 \quad \begin{matrix} e_5 \\ e_4 \end{matrix} ? \quad \text{où } f(x) = \cos^2(x)$$

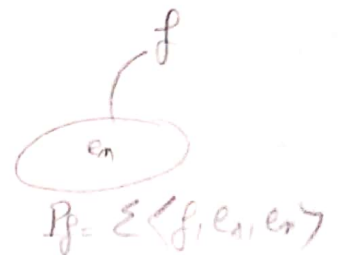
Par définition de bonne min, on a :

$\alpha e_5 + \beta e_4$ est projection de f sur $\text{Vect}(e_4, e_5)$ dim $< \infty$

$\Rightarrow$ complet (Par théorème de Projection)

Donc : $m = \|f - P_f\|^2$ où $P_f = \alpha e_4 + \beta e_5$

dans ce cas : $\alpha = \langle f, e_4 \rangle$
 $\beta = \langle f, e_5 \rangle$



d'autre part : On a : $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Donc : $= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e_0(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e_4(x)$

$$f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e_4$$

$$\text{Avec : } \alpha = \langle f, e_4 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\beta = \langle f, e_5 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow P_f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e_4$$

$$\text{en fin : } m = \frac{\pi}{2}$$

Exercice(5):

1) $\forall y \in H$ fixé, considérons
 $x \in H \mapsto B(x, y)$ forme linéaire continue.
 $B_y(x)$

$x \in H$. Alors d'après le théorème de représentation de Riesz.

$$\exists! \tilde{y} \in H \quad B(x, y) = \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall x \in H.$$

Par l'unicité, on peut définir l'app $A: H \rightarrow H$
 $y \mapsto \tilde{y}$ /

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

• Mq A est linéaire. En effet:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall y_1, y_2 \in H$$

$$\begin{aligned} \langle x, A(\lambda y_1 + y_2) \rangle &= B(x, \lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda B(x, y_1) + B(x, y_2) \\ &= \lambda \langle x, Ay_1 \rangle + \langle x, Ay_2 \rangle \\ &= \langle x, \lambda Ay_1 + Ay_2 \rangle \end{aligned}$$

avait l'image
et d'après l'unicité

$$A(\lambda y_1 + y_2) = \lambda Ay_1 + Ay_2$$

(l'app est bien définie.)

$$\langle x, A(\lambda y_1 + y_2) - \lambda Ay_1 - Ay_2 \rangle = 0 \quad \forall x \in H.$$

$$\text{En particulier } x = A(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda Ay_1 + Ay_2)$$

$$\|A(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda Ay_1 + Ay_2)\| = 0$$

$$\Rightarrow A(\lambda y_1 + y_2) = \lambda Ay_1 + Ay_2$$

d'où A est linéaire.

• Mq A est continue ?

$$\text{On a: } \|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$

$$= B(Ax, x) \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \cdot \|x\| \quad (\text{car } B \text{ est continue})$$

$$\forall x \in H \quad \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|x\| \quad (\text{vrai pour } 0 \text{ aussi})$$

Donc: A est continue et $\|A\| \leq \|B\|$

$$\bullet \|B\| = \sup \{ |B(x,y)|, \|x\| = \|y\| = 1, x,y \in H \}$$
$$= \sup \{ |\langle x, Ay \rangle|, \|x\| = \|y\| = 1, x,y \in H \}$$

Pan l'inégalité de C.S $\|B\| \leq \|A\|$

$$\text{d'où: } \|A\| = \|B\|$$

2) Remarquons $|B(x,x)| \geq C \|x\|^2$

$$\text{or } |B(x,x)| = |\langle x, Ax \rangle| \leq \|x\| \cdot \|Ax\|$$

$$\text{Alors (*) } \|Ax\| \geq C \|x\|, \forall x \in H$$

Pour utiliser
la théorie de
projection

Pan (*) En en déduit que A est injective

Pour Mq A est surjective il faut Mq $H = \text{im}(A)$

D'après Exercice (2) En a aboutit que

$\text{im}(A)$ est fermé, il reste à Mq $\text{im}(A)^\perp = \{0\}$

en effet: $x \in \text{im}(A)^\perp \subseteq H, \langle x, Ax \rangle = 0$

$$\begin{matrix} \in \text{im}(A)^\perp & \in \text{im}(A) \end{matrix}$$

$$\text{or } B(x,x) = \langle x, Ax \rangle \stackrel{H.p}{\geq} C \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

Comme $\text{im } A^\perp$ est s.e.v de H Alors $\text{im}(A)^\perp = \{0\}$

Pan Théorème de projection $H = \text{im}(A)^\perp \oplus \text{im}(A)$

Ainsi A est surjective et enfin A est bijective.

d'après (*) on a:

$$C \|A^{-1}y\| \leq \|y\| \quad (Ax = y \Leftrightarrow A^{-1}y = x)$$

$$\text{Donc: } A^{-1} \in L(H) \text{ et } \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$$

Feuille d'exercices N°2

Exercice 1 Soient E un espace de Banach de dimension infinie et $T \in L(E)$.

- 1) Montrer que si l'intérieur d'un sous-espace vectoriel F de E est non vide, alors $E = F$.
- 2) Montrer que E n'admet pas une base algébrique dénombrable $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
- 3) Supposons que pour tout $x \in E$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \text{Ker}(T^n)$.
Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $T^p = 0$.

1.)
singulier
entre base
algébrique et base topologique

Exercice 2 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite des nombres complexes, telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ soit convergente pour tout $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^p$, ($1 < p < \infty$).

- 1) Considérer pour $n \geq 1$ l'application $f_n : \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_n(y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Calculer la norme de f_n et en déduire que $x \in \ell^q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- 2) Trouver la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|$ où f est définie sur ℓ^p par $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.
- 3) Prouver que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$.

Exercice 3 Posons $E = C([0, 1], \mathbb{C})$. On considère les deux espaces normés $X = (E, \|\cdot\|_{\infty})$, $Y = (E, \|\cdot\|_1)$, où $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| / t \in [0, 1]\}$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. On désigne par $I_d : X \rightarrow Y, x \mapsto x$ l'application identité.

- 1) Montrer que I_d est bijective, continue. Quelle est sa norme ?
- 2) Montrer que I_d^{-1} n'est pas continue.
- 3) Conclure.

Exercice 4 Soit X et Y deux espaces de Banach et $T \in L(X, Y)$.
On suppose que T est surjective.

- 1) Montrer que $\tilde{T} : E/\ker(T) \rightarrow F$ définie par $\tilde{T}(x + \ker(T)) = T(x)$ est une bijection.
- 2) En déduire une démonstration du théorème de l'application ouverte.

Exercice 5 (1) Soient X, Y deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrer l'équivalence suivante :

- (i) Le graphe de T est fermé dans $X \times Y$.
 - (ii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X converge vers 0, et $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de Y , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0$.
- (2) Soient $X = C^1([0, 1]; \mathbb{C})$ et $Y = C([0, 1]; \mathbb{C})$, munis de la norme uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$ et considérons l'application $T : X \rightarrow Y$ définie par $Tf = f'$.
- (i) Montrer que le graphe de T est fermé dans $X \times Y$.
 - (ii) Montrer que T n'est pas continue.
 - (iii) Que peut-on conclure.

Test linéaire
⇒ graphe sev ?

Pr. Mohammed KACHAD
Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia.

Série N°(2)

Exercice (A)

1) $M_q \text{ int}(F) \neq \emptyset \Rightarrow E = F$ (F s.e. de E)

supp que $\text{int}(F) \neq \emptyset$ Alors $\exists x \in F$ et $r > 0$.

tg. $B(x, r) \subseteq F$ et comme F s.e. y ($F = -F$), $B(-x, r) \subseteq F$.

Alors $B(0, r) \subseteq F$.

• soit $y \in F \setminus \{0\}$ q'q posons $z = \frac{r}{2\|y\|}$

Alors: $\|z\| \leq r$, donc: $z \in F$.

$\Rightarrow x \in F$ (car F s.e. y)

Donc: $E \subseteq F$ et ainsi $E = F$

$$\begin{aligned} B(0, r) &\rightarrow \lambda y \in F \\ |\lambda| \|y\| &\leq r \\ |\lambda| &\leq \frac{r}{\|y\|} \\ \lambda &= \frac{r}{2\|y\|} \end{aligned}$$

2) $M_q E$ admet une base Algébrique dénombr $\Leftrightarrow E$ est de dimension finie

$\Leftrightarrow M_q E$ n'admet pas une base Algébrique dénombrable $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Supposons que E admet une base Algébrique dénombrable $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Posons $E_p = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de dim $< +\infty$, donc E_p est fermé.

Pan l'hypothèse $E = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} E_p$

Comme E est complet, Alors d'après théorème de Baire, il $\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$

tg: $\text{int}(E_{p_0}) \neq \emptyset$

Or d'après question (1) $E_{p_0} = E$ (car $\text{int}(E_{p_0}) \neq \emptyset$) ceci impossible.

Car dim $E = +\infty$. D'où E n'admet pas une base algébrique dénombrable.

$$3) T^p = \underbrace{T \circ T \circ T \dots \circ T}_{p \text{ fois}}$$

$$\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N} \quad x \in \ker(T^n)$$

$$\forall x \in E, x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(T^n)$$

$$\text{Donc: } E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(T^n)$$

d'autre part $\ker(T^n) = (T^n)^{-1}(\{0\})$ est fermé car T est continue et $\{0\}$ est fermé.

Si E est complet, alors d'après Théorème de Baire, $\exists p \in \mathbb{N}$:

$$\text{Int}(\ker(T^p)) \neq \emptyset \quad \text{D'après question } E = \ker(T^p)$$

$$\text{Càd: } \forall x \in E, T^p x = 0 \quad \text{Donc } T^p = 0, \quad \boxed{T^{p-1} \neq 0?} \quad \text{À faire}$$

si oui Alors p est un opérateur n'écartant ?

Exercice (2)

$$1) f_n = \ell^n \xrightarrow{y \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i} \mathbb{C} \quad \text{il est clair que } f_n \text{ est linéaire}$$

$$M_q \quad f_n \text{ est continue ? } \text{càd } M_q \quad \|f_n(y)\| \leq M_n \|y\|_{\ell^p} ?$$

En appliquant l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{C}^n$

$$\|f_n(y)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}}_{K_n} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \|f_n(y)\| \leq K_n \|y\|_p$$

$$\text{Donc } f_n \in (\ell^p)^* \text{ et } \|f_n\| \leq K_n$$

$$\text{Choisissons } y^{(n)} = (y_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \quad x_k y_k^{(n)} = |x_k|^q$$

$$y_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|x_k|^q}{x_k} & 0 \leq k \leq n \quad x_k \neq 0 \\ 0 & k > n \end{cases}$$

$$\sum \|y^{(n)}\| = \left(\sum_{k=1}^n |y_k^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{q}{q}} \\ = (K_n)^{\frac{q}{p}} < +\infty$$

$$\Rightarrow y^{(n)} \in \ell^p$$

$$\text{De plus: } f_n(y^{(n)}) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k^{(n)} \\ = \sum_{k=1}^n |x_k|^q = K_n^q$$

$$\text{Puisque } f_n \text{ est continue, } \|f_n(y^{(n)})\| \leq \|f_n\| \cdot \|y^{(n)}\|$$

$$\Rightarrow K_n^q \leq \|f_n\| \cdot K_n^{q/p}$$

$$\Rightarrow \|f_n\| \geq K_n^{q - \frac{q}{p}} = K_n \quad \text{or} \quad K_n \geq \|f_n\|$$

$$\text{Ainsi } \|f_n\| = K_n = \left(\sum |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{Comme l'espace } \ell^p \text{ complet et } (f_n)_n \subset (\ell^p)^*$$

$$\text{et par d'hypothèse on a: } \forall y \in \ell^p, f_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum x_n y_n = f(y)$$

$$\text{donc } \forall y \in \ell^p, \sup_n |f_n(y)| < +\infty$$

$$\text{Ceci implique par Théorème de Banach-Steinhaus que}$$

$$\sup \|f_n\| < +\infty \text{ et } f \in (\ell^p)^*$$

$$\text{Ce qui entraîne que } \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_q < +\infty$$

$$\text{il reste à montrer } \|f\| = \sup \|f_n\| = \|x\|, \quad \|f_n\| \xrightarrow{\text{c.s.}} \|f\| ? \\ \text{càd } \|f_n - f\| \longrightarrow 0$$

$$2) M_q \|f - f_n\| = \sup_{\substack{y \in \ell^p \\ \|y\| \leq 1}} |f(y) - f_n(y)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{On a, } |f(y) - f_n(y)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{I. de Hölder})$$

$$\leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|y\|_p$$

$$\Rightarrow \|f - f_n\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{d'où : } \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } \|f_n\| = K_n$$

Par conséquent : $\|f\|_{\ell^p} = \|x\|_{\ell^q} \quad (*)$ (ℓ^p est un e.H. ssi $p=2$)

$$x \in \ell^q \rightarrow f \in (\ell^p)^* = H^* ?$$

$$3) \text{ Considérons l'app : } \varphi : \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$$

$$x \mapsto \varphi x = f : \ell^p \rightarrow \mathbb{C} \quad y \mapsto f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

• la série est finie $\Rightarrow$ l'app bien définie.

l'app φ est bien définie. Si $x = z$. Alors : $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n y_n < +\infty$
 donc $\varphi_x(y) = \varphi_z(y) \quad \forall y \in \ell^p$ (unicité de l'image)

donc $\varphi_x = \varphi_z$ d'où le résultat.

φ est linéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x, z \in \ell^q$

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda x + z}(y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda x_n + z_n) y_n \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{+\infty} z_n y_n \\ &= \lambda \varphi_x(y) + \varphi_z(y) \end{aligned}$$

(au sens topologique)

$$\ell^p = \overline{\text{vect} \{e_1, e_2, \dots\}}$$

↓
séparable.

d'où : $\varphi_{\lambda x + z} = \lambda \varphi_x + \varphi_z$

d'après (*) : $\|\varphi_x\| = \|f\|_{\ell^p} = \|x\|_{\ell^q}$ on obtient φ est isométrique.
 $\Rightarrow \varphi$ est continue et injective.

Famille excessive ?!

Ma la surject ?

• Soit $y \in (l^p)^*$, considérons $(e_n)_n$ base canonique de l^p où
 $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots)$, Alors $\forall y \in (l^p)^*, y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n e_n$

$$\text{Donc: } f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \cdot f(e_n)$$

Posons: $\forall n \geq 1, f(e_n) = x_n$.

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n < +\infty$, d'après question (1) on conclure que:
 $(x_n) = x \in l^p$.

$$\text{D'où } f = \varphi_x$$

$$\text{Enfin } (l^p)^* \cong l^q$$

• $(l^p)^{**} = (l^q)^* = l^p \Rightarrow l^p$ est réflexif. $1 < p < \infty$
• $l_1 \subseteq c_0 \subseteq l^\infty$ $(c_0)^* = l^1$ et $(l_1)^* = l^\infty$ $(l^\infty)^* = l_1$.

$\Rightarrow c_0, l_1, l^\infty$ ce sont des espaces non réflexifs.

Exercice (3)

$$\text{Id}: (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$$
$$x \longmapsto x$$

Il est clair par construction que Id est linéaire bijective.

$$\|\text{Id}\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|\text{Id}(x)\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq 1$$

$$\left(\text{car: } \|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)| dt \leq \|x\|_1 \right)$$

Id est continue, et de plus $\|\text{Id}\| \leq 1$.

pour $f_0(t) = 1$. On a: $\|\text{Id}(f_0)\|_2 = 1$ et $\|\text{Id}(f_0)\|_1 \leq \|\text{Id}\| \cdot \|f_0\|_\infty = \|\text{Id}\|$

$$\text{D'où } \|\text{Id}\| = 1$$

(3)

2) M_q Id^{-1} n'est pas continue. :

Supp que $\text{Id}^{-1} : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continu. Alors

$$\exists M > 0, \forall x \in E, \|\text{Id}^{-1}(x)\|_\infty \leq M \|x\|_1$$

pour $f_n(t) = t^n$ $\|\text{Id}^{-1}(f_n)\|_1 = \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ $\left(1 \leq M \cdot \frac{1}{n+1}\right)$

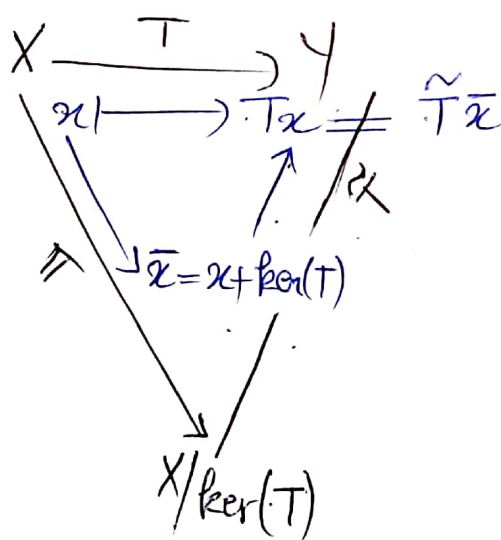
et $\|f_n\|_\infty = 1$

$\Rightarrow n+1 \leq M \quad \forall n$ c'est impossible et ainsi
 Id^{-1} n'est pas continue. (le cas algébrique)
 $\text{Id}^{-1} = \text{Id}$

3) Conclusion:

Supposons que $Y = (E, \|\cdot\|_1)$ est complet. Comme $\text{Id} \in L(X, Y)$ bijection, Alors d'après Théorème de l'isomorphisme de Banach $\text{Id}^{-1} \in L(Y, X)$ ce qui impossible d'après question (2).
 Donc $Y = (E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Exercice (4)



$$T = \tilde{T} \circ \pi$$

• 1) d'après Théorème d'isomorphisme d'Algebre.
 $X/\ker(T) \cong \text{im}(T)$

Comme $\text{im}(T) = Y$ (T est surjective)

donc $X/\ker(T) \simeq Y$

cad : $\tilde{T}$ est bijective.

2) Preuve de Théorème de l'app ouverte.

Auparavant montrons que T est ouverte. En effet :

Comme T est continue, $\ker(T)$ est fermé donc $X/\ker(T)$ est un e.v.n de plus X est complet entraîne que $X/\ker(T)$ est un espace de Banach.

Puisque T continue entraîne d'après Exo (1) série $N^0(1)$ que $\tilde{T}$ continue : donc d'après Théorème d'isomorphisme de Banach $\tilde{T} \in L(Y, X/\ker(T))$

Soit $0 \in Y$ ouvert qd $(\tilde{T}^{-1})^{-1}(0) = \tilde{T}(0)$ est ouvert.

$\Rightarrow \tilde{T}$ est ouverte :

• Mq π est ouverte

Soit $U \subset X$ ouvert : Alors $\pi(U) \subset \pi(X) = X/\ker(T)$

d'autre part $\exists y \in U, \exists \varepsilon > 0, B(y, \varepsilon) \subset U$.

$\Rightarrow \pi(B(y, \varepsilon)) \subset \pi(U)$

et $\pi(B(y, \varepsilon)) = \pi(y) + \pi(B(0, \varepsilon))$.

On va Mq : $\pi(B(0, 1)) = B(\bar{0}, 1)$? $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$

On sait que $\forall x \in B(0, 1), \|\pi(x)\| \leq \|x\| \leq 1$

On conclut $\pi(B(0, 1)) \subset B(\bar{0}, 1)$

• Soit $z \in B(\bar{0}, 1) \subset X/\ker(T)$

Alors il $\exists x \in X$ / $\pi(x) = z$. $\therefore \pi$ est surjective.

Par la définition de bonne inf (norme)

$$\|z\| = \inf \{ \|t\| \mid \pi(t) = z \}$$

$$z \in X / \ker(\pi) \quad \|z\| = \inf \{ \|t\| \mid t \in z \}$$

$$\|t\| \leq \|z\| + \frac{1}{n}$$

≤ 1

Par définitⁿ de bonne inf: $\exists x' \in X$ tq $\pi(x') = z$ et $\|x'\| < 1$.

$$\text{Donc } x \in B(0, 1) \Rightarrow z \in \pi(B(0, 1))$$

$$\text{En fin: } \pi(B(0, 1)) = B(\bar{0}, 1)$$

$$\text{Et Ainsi } \pi(B(y, \varepsilon)) = \pi(y) + B(\bar{0}, \varepsilon) \\ = B(\pi(y), \varepsilon)$$

$$\text{D'où } B(\pi(y), \varepsilon) \subseteq \pi(U)$$

et par conséquent $\pi(U)$ ouvert ce qui montre que π est ouverte.

Conclusion: $\tilde{\pi}$ et π sont ouvertes.

Alors $T = \tilde{\pi} \circ \pi$ est aussi ouverte.

Preuve de monstraⁿ /
du Th d'ap^s ouvert

Exercice (5)

1) (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que le graphe G_T est fermé. ou

$$G_T = \{(x, y) \in X \times Y \mid Tx = y\}$$

Si $((x_n, Tx_n)) \subset G_T$ converge vers $(0, y)$

Puisque G_T est fermé $y = T0 = 0$ (car T est linéaire)

et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_n = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $(x_n, Tx_n) \in G_T$ et $(x_n, Tx_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y)$

On a $Tx = y$? en effet:

On a: $(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ Comme $(x_n - x, T(x_n - x)) \in G_T$

Alors d'après (ii) $T(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\Rightarrow (Tx_n - Tx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\Rightarrow Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Tx$ et par l'unicité de la limite

$$\text{On obtient: } \boxed{Tx = y}$$

c'est
une
proposi^{on}
(Théorème
de
graphe
fermé)

applic^{ation} de
cette proposi^{on}

$$X = C^1([0, 1], \mathbb{C}) \quad Y = C([0, 1], \mathbb{C})$$

$$T: X \longrightarrow Y$$

$$f \longmapsto Tf = f' \quad \text{est linéaire}$$

$$\text{Soit } (f_n, Tf_n) \longrightarrow (0, g)$$

On a $M_n g = 0$. En effet:

$$f_n' \longrightarrow f' = g$$

(démonstrat^{ion}
en Analyse (4))

qui muni
de $\|\cdot\|_\infty$ pas un
espace de Banach

justement en $x=0$

$$\text{On a } f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t) dt.$$

$$\text{On pose } f(x) = \int_0^x g(t) dt$$

$$\text{Alors } \|f_n(x) - f(x)\| = f_n(0) + \int_0^x (f_n'(t) - g(t)) dt.$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \underbrace{|f_n(0)|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\|f_n' - g\|_\infty}_{\downarrow 0} \quad (\text{cvg vers } 0)$$

$$\text{Alors } \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où } f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$$

Par l'unicité de la limite $f = 0$

$$\text{Alors } g = 0. \text{ Par conséquent } (f_n, T f_n) \longrightarrow (0, 0)$$

et ainsi par la question (1) On obtient que OT est fermé.

ii) M_T n'est pas continue :

Supposons que T est continue. Alors il $\exists M > 0, \forall f \in X$

$$\|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$$

On considère la suite de fonction

$$f_n(x) = x^n \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{Alors } \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1, \text{ et } f_n'(x) = n x^{n-1}.$$

$$\text{donc } \|f_n'\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |n x^{n-1}| = n. \text{ Alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, n < M, \text{ faisant}$$

tendre $n \longrightarrow +\infty$
donc On obtient la contradiction
 $\Rightarrow T$ pas continue.

(iii) On sait que X est un espace de Banach. Supposons que X est complet.

Comme le graphe de T est fermé, alors d'après Théorème de graphe fermé. T est continue. Mais d'après Q(2) (ii) T n'est pas continue.

Ceci nous donne une contradiction. X est forcément n'est pas complet.
le but d'exercice (5) est de montrer X pas complet (par Théorème de graphe fermé)

Feuille d'exercices N°3

Exercice 1 Soient H un espace de Hilbert et G un sous-espace fermé de H . Montrer que pour toute $f \in G^*$, il existe un seul prolongement $\bar{f} \in H^*$ défini par $\bar{f}(x) = f(P_G(x))$ pour tout $x \in H$, avec P_G la projection orthogonale.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f, f_1, \dots, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ des formes linéaires.

- 1) Montrer que si $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) \subseteq \ker(f)$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$.
- 2) On suppose que E est normé et que $f_1, \dots, f_n, f \in E^*$. Soient $G = \{x \in E / f_i(x) = 0 \forall i = 1, \dots, n\}$ et $g \in G^*$ définie par $g(x) = f(x) \forall x \in G$. Montrer que si $h \in E^*$ est le prolongement de g alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $h = f + \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$.

Exercice 3 Soit E un espace de Banach et soit $f_1, f_2, \dots, f_n \in E^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ fixés. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in B(0, 1)$ la boule unité dans E tel que : $|f_i(x_\epsilon) - \alpha_i| < \epsilon$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
- (ii) Pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, on a $|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|$.

Exercice 4 Soit X un espace normé de dimension infinie et soient $S = \{x \in X \text{ tel que } \|x\| = 1\}$ sa sphère unité et $B = \{x \in X \text{ tel que } \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité fermée.

- 1) Montrer que tout voisinage ouvert de 0 pour la topologie $\sigma(X, X^*)$ contient un sous-espace fermé de codimension finie. Conclure.
- 2) Montrer que $\overline{S}^{\sigma(X, X^*)} = B$.

Exercice 5 Soient X un espace normé de dimension infinie et A un sous-ensemble de X .

- 1) Montrer que A est borné si et seulement si $\forall f \in X^* \sup\{|f(x)|, x \in A\} < \infty$.
- 2) Montrer que la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ est non-métrisable.

Exercice 6 Soit $(x_n)_n$ une suite de l'espace normé $(X, \|\cdot\|)$ et soit $x \in X$. Montrer l'équivalence suivante :

- (i) $x_n \rightharpoonup x$.
- (ii) La suite $(\|x_n\|)_n$ est bornée et il existe un sous-ensemble $D \subseteq X^*$ dense dans X^* tel que $f(x_n) \rightarrow f(x) \forall f \in D$.

Série N°(3)

Exercice (1) :

Comme H est un (e.o.H) et G s.e.v fermé, Alors d'après
Théorème de projection $H = G \oplus G^\perp$, Alors :

$$\forall x \in H, x = P_G(x) + P_{G^\perp}(x)$$

Maintenant, on définit $\bar{f} : H \longrightarrow \mathbb{K}$
 $x \longmapsto \bar{f}(x) = f(P_G(x))$

Comme f et P_G sont linéaire Alors $\bar{f}$ est linéaire.

$$\bar{f}|_G = f \text{ et } \|\bar{f}\| \geq \|f\| \quad (\text{il faut chercher l'égalité}) = (\text{prolong au sens de Banach})$$

$$\text{D'autre part : } |\bar{f}(x)| = |f(P_G(x))|$$

$$\leq \|f\| \cdot \|P_G(x)\|$$

$$\leq \|f\| \cdot \|x\| \quad (\text{Pythagore})$$

$$\|x\|^2 = \text{d'où : } \|\bar{f}\| \leq \|f\| \quad \text{Ainsi } \|f\| = \|\bar{f}\|$$

donc d'après Théorème de H-B, $\bar{f}$ est prolongement de f .

Théorème de l'extension
de H-B

Exo(1): (suite):

Ma $\bar{f}$ est unique prolongement de f au sens de (H-B):

f Soit $g \in H^*$... / $g|_G = f$ et $\|g\| = \|f\|$

Comme g est une forme linéaire continue sur H , alors d'après Théorème de représentatⁿ de Riesz, $\exists ! b \in H$ / $g(x) = \langle x, b \rangle \quad \forall x \in H$. $\|g\| = \|b\|$

d'après Théorème de projection, $b = P_G(b) + P_{G^\perp}(b)$

donc $g(x) = f(x) = \langle x, b \rangle = \langle x, P_G(b) \rangle \quad \forall x \in G$ (car $x \perp G^\perp$)

Ce qui montre que $\|f\| = \|P_G(b)\|$

$\Rightarrow \|g\| = \|b\| = \|P_G(b)\|$, D'après Théorème de Pythagore

$$\|b\|^2 = \|P_G(b)\|^2 + \|P_{G^\perp}(b)\|^2$$

$\Rightarrow \|P_{G^\perp}(b)\| = 0 \Rightarrow P_{G^\perp}(b) = 0$. Donc $P_G(b) = b$

Donc: $g(x) = \langle x, P_G(b) \rangle \quad \forall x \in H = G^\perp \oplus G$
 $= \langle P_G(x), P_G(b) \rangle$ (car: $x = P_G(x) + P_{G^\perp}(x)$)

$= f(P_G(x)) = \bar{f}(x)$ c/à dire: $\bar{f} = g$

Par suite $\bar{f}$ est unique prolongement de f .

G pas fermé

il faut Ma $\bar{f}$ est unique ?
prolongement de f

$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \uparrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \\ \uparrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$

?! Combien des prolongement ici!

Exercice (2) :

Dixmer (Topologie générale)

1) Considérons l'app $\Phi: X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
 $x \longmapsto (f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

il est clair que Φ est bien définie car $f, f_1, \dots, f_n$ sont des formes linéaires de plus elle est linéaire.

Par l'hypothèse $\cap \ker(f_i) \subset \ker(f)$. On obtient

$$f_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow f(x) = 0$$

e) On a: $\text{im}(\Phi)$ S.E.V (de dim finie) fermé car $\dim \Phi \leq n+1$.

convexe

Alors $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \notin \text{im}(\Phi)$. Donc $\{e_1\} \cap \text{im}(\Phi) = \emptyset$
 Ce qui implique d'après Théorème de H-B (et $\{e_1\}$ est compact)

2^{ème} forme géométrique $\exists g \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$.

($\{e_1\}$ fermé dans im dim finie)
 (sinon: anti compact $\Rightarrow$ compact + compact)

$$(*) \quad g(e_1) < \alpha < g(\Phi(x)) \quad \forall x \in X$$

Comme $g \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$ qui est de Hilbert, alors d'après Théorème

de représentat° de Riesz, $\exists b = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$b = \sum \alpha_i e_i \quad g(x) = \langle x, b \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$$

$$(*) \text{ devient: } \alpha_1 < \alpha < \alpha_1 f(x) + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i f_{i-1}(x) \quad \forall x \in X$$

Par linéarité $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 < \alpha < \alpha_1 \lambda f(x) + \lambda \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i f_{i-1}(x)$

Ceci est vraie sauf dans le cas: $\alpha_1 f(x) + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i f_{i-1}(x) = 0 \quad \forall x \in X$

donc $\alpha_1 < \alpha < 0 \Rightarrow \alpha_1 \neq 0$

$$\text{Donc: } f = \sum_{i=1}^m \mu_i f_i \quad \mu_i = \left(\frac{-\alpha_{i+1}}{\alpha_1} \right)$$

Car si $\lambda < 0$
 On a pas l'égalité
 $\forall \lambda !!$
 (devient de la linéarité)

$$2) \quad G = \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i)$$

$$\text{On a: } f(x) = g(x) = h(x) \quad \forall x \in G.$$

$$\text{Alors } h(x) - f(x) = \dots (h-f)(x) = 0 \quad \forall x \in G.$$

$$\text{donc: } x \in \ker(h-f). \text{ D'où } G \subset \ker(h-f)$$

$$f, \text{ D'après question (1) } \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \cdot h = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + f$$

Exercice (3):

$$(ii) \Rightarrow (i) \text{ Considérons: } \Phi: E \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

est bien définie, linéaire et continue.

$$(i) \text{ Ça signifie: } \forall \alpha \in \overline{\Phi(B_E)} \quad \|\Phi(x_\epsilon) - \alpha\|_\infty < \epsilon \text{ si } |f_i(x_\epsilon) - \alpha_i| < \epsilon.$$

$$\|\Phi(x_\epsilon) - \alpha\|_\infty < \epsilon \text{ où } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \text{ alors } \alpha \in \overline{\Phi(B_E)}$$

Supp par l'absurde que $\alpha \notin \overline{\Phi(B_E)}$

$\overline{\Phi(B_E)}$ est une partie convexe et fermée

$$\{\alpha\} \text{ est compact convexe. } \{\alpha\} \cap \overline{\Phi(B_E)} = \emptyset$$

Alors d'après Théorème de H-B 2ème forme géométrique.

$$\exists f \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}, \exists a \in \mathbb{R}.$$

$$* \quad f(\Phi(x)) < a < f(\alpha) \quad \forall x \in B_E.$$

Puisque $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ qui est de Hilbert alors d'après Théorème de représentat° de Riesz. $\exists b \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle x, b \rangle = \sum_{i=1}^n x_i b_i$
 $b = (b_1 \dots b_n)$

$$(*) \text{ devient: } \sum_{i=1}^n b_i f_i(x) < a < \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \quad \forall x \in B_E.$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n b_i f_i \right\| < a < \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

Ce qui est impossible d'après (ii)

Absurde

D'où $\alpha \in \overline{\Phi(B_E)}$
 Ce qui montre (i)

$$(i) \Rightarrow (ii) \text{ soit } \varepsilon > 0, x_\varepsilon \in B_\varepsilon, \forall \beta_2 \dots \beta_m \in \mathbb{R}.$$

$$\left| \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x_\varepsilon) - \beta_i \alpha_i \right| \leq \sum_{i=1}^m |\beta_i| \cdot |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i|$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^m |\beta_i|$$

$$\left| \sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_i \right| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^m |\beta_i| + \left| \left(\sum_{i=1}^m \beta_i f_i \right)(x_\varepsilon) \right|$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^m |\beta_i| + \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i f_i \right\| \|x_\varepsilon\|$$

En faisant : $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\left| \sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i f_i \right\|$$

D'où : le résultat.

Exercice (4) :

$$S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

$$B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

1) Considérons un voisinage ouvert de 0, $U \in \mathcal{V}(0)$ faible.

Alors $\exists f_1 \dots f_n \in X^*, \exists \varepsilon > 0$

$$U \supset \bigcup_{\varepsilon, f_1 \dots f_n} (0) = \{x \in X \mid |f_i(x)| < \varepsilon \quad \forall i=1 \dots n\} \supset \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i)$$

il reste à montrer que il est de codim finie. car $\dim(X / \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i)) < \infty$

Considérons : $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$$x \longmapsto (f_1(x) \dots f_n(x)) = \Phi(x)$$

est bien définie, linéaire et continue.

$$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow f_i(x) = 0 \quad \forall i=1 \dots n$$

On déduit que $\ker(\Phi) = \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i)$

Comme $f_i \in X^* \quad \forall i=1 \dots n$ Alors : $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) = \ker(\Phi)$ s.e.v. fermé.

Donc $X / \ker(\Phi) \simeq \text{im}(\Phi) \subseteq \mathbb{K}^n$

Puisque $\dim \text{im}(\Phi) \leq n$

Alors $\text{codim} \ker(\Phi) = \dim X / \ker(\Phi) < \infty$ Ainsi $U \supset \ker(\Phi)$ s.e.v. de codim fin

Conclusion:

en dimension $X = +\infty$, tout $U \neq \emptyset$ ouvert faible
contient un sev de codim $< \infty$.

En revanche dans $\tau^{||\cdot||}$, les ouverts sont bornés

$$\tau^{||\cdot||} \neq \sigma(X, X^*)$$

$$\begin{aligned} & \overline{B(0,1)}^{\sigma(X, X^*)} \\ & = B(0,1) \quad \text{faiblement fermé} \\ & \rightarrow \text{fermé convexe} \end{aligned}$$

2) $M_q \overline{\sigma(X, X^*)} = B$ (sphère pas fermée dans la topologie faible.)

Mais dans la topologie forte $\overline{\tau^{||\cdot||}} = S$

cad il faut $M_q \overline{\sigma(X, X^*)} \subset B$ et $B \subset \overline{\sigma(X, X^*)}$

On a $S \subset B$. Comme B est fermé convexe, alors $\overline{\sigma(X, X^*)} = B$

Donc $\overline{\sigma(X, X^*)} \subset B$ (ssi B est fermé)!!

• soit $x_0 \in B \setminus S$, pour montrer que $x_0 \in \overline{\sigma(X, X^*)}$, il suffit
de montrer que $\forall V$ voisinage de x_0 pour $\sigma(X, X^*) \cap V \neq \emptyset$?

Soit V un voisinage de x_0 . Par translation on peut écrire:

$V = x_0 + V_0$ où V_0 est un voisinage faible de $0 \in V(0)$

D'après question (1), $\exists U \in X \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} & \|U\| = 1 / \{ \lambda U / \lambda \in \mathbb{R} \} \subset V_0 \\ & = \mathbb{R}U \end{aligned}$$

Donc $\{x_0 + \lambda U / \lambda \in \mathbb{R}\} \subset V$ (cad il faut trouver $x \in S \cap D$
 $\|x\| = 1$ et $x = x_0 + \lambda U$)

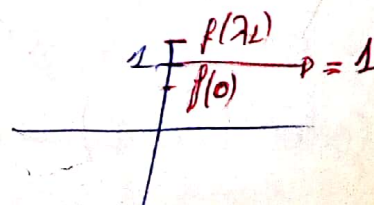
Considérons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $\lambda \mapsto \|x_0 + \lambda U\|$

qui est continue, $f(0) = \|x_0\| \leq 1$.

Pour $\lambda_1 = \|x_0\| + 1$, $f(\lambda_1) \geq |\lambda_1| \|U\| - \|x_0\| = 1$

(image d'un convexe est convexe) $\leftarrow$ généralité de
T.V.I

$$\begin{aligned} & (f(\lambda) \geq |\lambda| - \|x_0\|) \\ & \lambda_1 = \|x_0\| + 1 \end{aligned}$$



Alors d'après Théorème de V.I (connexe)

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}. f(\lambda_1) = \|x_0 + \lambda_1 u\| = 1.$$

Donc: $x_0 + \lambda_1 u \in S \cap D \neq \emptyset$

D'où: $S \cap V \neq \emptyset$, Et ainsi $x_0 \in S$

En suite. $\overline{S}^{\sigma(x, x^*)} = B$.

généralisation de Théorème de Riesz

$$B_{X^*} = \{x \in X^*, \|x\| \leq 1\}$$

compact dans $(X^*, \sigma(x^*, x))$

Kakutani: X est réflexive

$$\text{ssi } B_X \text{ compact} \\ ((X, \sigma(x, x^*)) \subset \|\cdot\|)$$

Exercice 5

1) $\Rightarrow$ Supposons que A est bornée

$$\exists M > 0, \|x\| < M, \forall x \in A.$$

$$\text{Alors } \sup \{ |f(x)| / x \in A \} \leq \|f\| \cdot M < \infty$$

$$(|f(x)| \leq \|f\| \cdot M)$$

supposons que $\sup \{ |f(x)| / x \in A \} < \infty \quad \forall f \in X^*$

2) Considérons l'application canonique $J: X \rightarrow X^{**}$

$$x \mapsto J(x) = x^* \mapsto \mathbb{K}$$

$$f \mapsto J(x)(f) = f(x)$$

$$\text{Alors: } \|J(x)\| = \|x\|.$$

$$\text{dans l'hypothèse En a, } \sup \{ |f(x)| / x \in A \} = \sup \{ |J(x)(f)| / x \in A \} < \infty$$

$$\forall f \in X^*$$

$$\text{En a, } \{ J(x) / x \in A \} = S \subset L(X^*, \mathbb{K}) = X^{***}$$

Comme X^* est complet, Alors d'après Théorème (B-S)

$$\sup \{ \|J(x)\| / x \in A \} = \sup \{ \|x\| / x \in A \}$$

Alors $\sup \{ \|J(x)\| / x \in A \} < \infty$ d'après Théorème (B-S). D'où A est bornée

3) Montrons par l'absurde que $\sigma(x, x^*)$ est métrisable.

cad est induite une distance d .

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}^*, B(0, \frac{1}{n}) = \{x \in X / d(x, 0) < \frac{1}{n}\}$$

Voisinage ouvert de 0 pour $\sigma(X, X^*)$

Par Exercice (4) question (2)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(0, \frac{1}{n}) = B(0, 1)$$

On a: $0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(0, \frac{1}{n})$ Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \in \frac{1}{n} B(0, 1)$

donc, $\exists x_n \in \frac{1}{n} B(0, 1), \|x_n\| = \frac{1}{n}$

$$d(x_n, 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car: $x_n \xrightarrow{d} 0$ pour $\sigma(X, X^*)$ Alors $\forall f \in X^*$

f - continue car f est continue pour $\sigma(X, X^*)$

Alors $d(f(x_n), 0) \rightarrow 0$, d'où $f(x_n) \xrightarrow{d} 0$

Alors $(f(x_n))_n$ est bornée. Donc

$$\sup\{|f(x_n)| / n \in \mathbb{N}^*\} < \infty$$

d'après question (1), On conclut (x_n) est bornée
Ceci est impossible (contradiction)

$$\|x_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent $\sigma(X, X^*)$ n'est pas métrisable.

(elle est métrique justement dans la boule unité
Pour que $\|x_n\|$ est c.v.g)

$$(\sigma(X, X^*) \supset \tau_{\text{trale}})$$

$B(0, \frac{1}{n})$ est
un voisinage
faible

Exo 16):

(i) $\Rightarrow$ (ii)

On sait d'après proposition de cours que si $x_n \rightarrow x$.
Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. De plus si $x_n \rightarrow x$.
alors $\forall f \in X^*$. On a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

En particulier pour tout $f_D \in D$ où $\overline{D} = X$

On a $f_D(x_n) \rightarrow f(x)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) On va montrer que $f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in X^*$
soit $f \in X^*$. Comme $\overline{D} = X^*$ alors $\exists f_\varepsilon \in D / \|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \text{Donc } |f(x_n) - f(x)| &= |f(x_n) - f_\varepsilon(x_n) + f_\varepsilon(x_n) - f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon(x) - f(x)| \\ &\leq |f(x_n) - f_\varepsilon(x_n)| + |f_\varepsilon(x_n) - f_\varepsilon(x)| + |f_\varepsilon(x) - f(x)| \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\| (\|x\| + \sup_n \|x_n\|) + |f_\varepsilon(x_n) - f_\varepsilon(x)| \end{aligned}$$

Donc: $(\|x_n\| < M, \forall n)$

$$\leq \varepsilon (\|x\| + M) + |f_\varepsilon(x_n) - f_\varepsilon(x)|$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ et $f_\varepsilon \rightarrow f$ on obtient que:
 $f(x_n) \rightarrow f(x)$. D'où le résultat.