Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire 2019-20
SMI-SMA(S4)
Analyse Numérique

Série n° 3
(Interpolation, Approximation)

Exercice 1 :
Soit $P_2(x)$ **le polynôme qui interpole** $f(x) = x^3$ **aux noeuds** $(0,0); (1,1)$ **et** $(-1,-1)$

1. **Sans déterminer l'équation de** $P_2(x)$**, calculer** $E(x) = f(x) - P_2(x)$**, et déterminer en quels points de** $[0,1]$**,** $E(x)$ **est maximale**
2. **Calculer** $P_2(x)$ **par la méthode de Lagrange.**
3. **Calculer** $P_2(x)$ **par la méthode de Newton.**

Exercice 2:
On se donne une fonction f **de classe** $C^4([-1, \frac{3}{2}])$ **aux noeuds** $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ **telle que:**

$$f(0) = 3 \quad f(-\frac{1}{2}) = 1 \quad f(\frac{1}{2}) = -1 \quad f(\frac{3}{2}) = -2 \quad \textbf{et} \quad |f^{(3)}(x)| \leq 2 \quad |f^{(4)}(x)| \leq 3 \; \forall x \in [-1, \frac{3}{2}]$$

1. **Donner une estimation de** $f(x)$ **en utilisant une interpolation de Newton aux quatres points précédents.**
2. **Donner une estimation de** $f(x)$ **et de l'erreur commise en utilisant une interpolation basée sur les trois points** $f(0); f(-\frac{1}{2})$ **et** $f(\frac{1}{2})$**.**
3. **On cherche à approcher :** $I = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ **par la formule de quadrature:**

$$J(f) = \omega_0 f(-\frac{1}{2}) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\frac{1}{2}) \qquad (1)$$

Chapitre (Intégration numérique)

(a) **Donner le degré d'exactitude et l'erreur d'intégration de la formule** (1).
(b) **Donner la méthode composite associée à** (1) **et l'erreur d'intégration sur un intervalle** $[a, b]$.

Exercice 3:
Soient $a < b$ **deux réels données et** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **telle que** $f \in C^3([a, b])$**. On cherche à approcher** f **sur l'intervalle** $[a, b]$ **par un polynôme** p **tel que**

$$p(a) = f(a) \quad p(b) = f(b) \quad \textbf{et} \quad p'(a) = f'(a) \qquad (1)$$

1. **Construire les polynômes λ_1, λ_2 et λ_3 de degré 2 définis par:**

$$\begin{cases} \lambda_1(a) = \lambda_1'(a) = 0, & \lambda_1(b) = 1 \\ \lambda_2(a) = \lambda_2(b) = 0, & \lambda_2'(a) = 1 \\ \lambda_3(b) = \lambda_3'(a) = 0, & \lambda_3(a) = 1 \end{cases}$$

2. **Montrer que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ forme une base de $\mathbb{P}_2$.**

3. **Montrer que tout polynôme de $\mathbb{P}_2$ vérifiant (1) est unique.**

4. **Exprimer ce polynôme dans la base $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.**

5. **Montrer que l'erreur d'interpolation de f s'écrit :**

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-a)^2(x-b)}{6} f^3(\xi_x) \quad \textbf{où} \quad a < \xi_x < b. \tag{2}$$

6. **Montrer que $\forall x \in [a, b]$,**

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{2M_3\,(b-a)^3}{81} \quad \textbf{où} \quad M_3 = \sup_{[a,b]} \left| f^{(3)} \right|.$$

<u>Exercice 4:</u>
On connait les valeurs d'une fonction f aux points $x = -1$, 0, 1 et 2.

$$f(0) = 0 \quad f(-1) = 3 \quad f(1) = 3 \qquad f(2) = 4$$

Déterminer le polynôme de degré 1 qui approche f au sens de moindres carré.

<u>Exercice 5:</u>
On connait les valeurs d'une fonction f aux points $x = 0$, 1 et 2.

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 6 \qquad f(2) = 2$$

Déterminer la spline naturelle $S(x)$ interpolant f.

<u>Exercice 6:</u> Meilleure approximation au sens de Tchebychev
Dans la majoration de l'erreur d'interpolation de Lagrange, il est intéressant de chercher les points x_i de telle sorte que : $\max\limits_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)\dots(x-x_n)|$ soit minimal. Soient les polynômes de Tchebychev définis par $Tn(x) = \cos(n \arccos(x))$pour $x \in [-1, 1]$ et $n \geq 0$.

1. **Vérifier que $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ et en déduire que T_n est un polynôme de degré n de la forme $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + ...$**

2. **Donner les racines et les extremum de T_n.**

3. **Soit $q(x) = 2^{n-1}x^n + ...$ et $q(x) \neq Tn(x)$. Montrer que**

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| < \max_{x\in[-1,1]} |q(x)|.$$

   Conclure

4. **Etendre ce résultat à un intervalle $[a, b]$.**

5. **Comparer la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur $[-8, 8]$ avec :**

   - **le polynôme d'interpolation obtenu à partir de $n = 10, 20, ..$ points équidistants.**
   - **le polynôme d'interpolation obtenu à partir de $n = 10, 20, ..$ points de Tchebychev.**