Université My Ismail
F. S. T. Errachidia
Départ. de Maths

Année Univer. 2019-2020
Parcours MIP. S2 Analy2
Resp. Mustapha Laayouni

Crrection de la série n^{o}2

Exercice1: Calculer les intégrales suivantes:

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx,\ J_2 = \int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, a > 0$$

,

$$J_3 = \int_0^1 x \arctan x dx,\ J_4 = \int_1^2 x^n \ln x dx \,(n \neq -1)$$

solution:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \sin'(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{\frac{3}{2}}\right)'(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\left(\sin^{\frac{3}{2}}\right)(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{a^3} \int_0^a \frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Posonx $\frac{x}{a} = \tan(t)$ donc $dx = a\dfrac{dt}{\cos^2(t)}$, $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $x = a \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

D'où:

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\cos^3(t)dt}{\cos^2(t)} \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)dt = \left[\frac{1}{a^2}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Pour calculer

$$J_3 = \int_0^1 x\arctan x dx$$

on utilise une intégration par partie: $u' = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $v = \dfrac{x^2}{2}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}J_3 &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 1+\frac{-1}{x^2+1}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Pour calculer J_4 ($n \neq -1$ l'égalité est traitée dans la première série) on utilise une intégration par partie: $u = \ln(x)$ et $v' = x^n$ donc $u' = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ et

$$\begin{aligned}J_4 &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{n+1}\int_1^2 x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right)\right]_1^2\end{aligned}$$

Exercice2: Calculer les primitives suivantes:

$$K_1(x) = \int \frac{dx}{x^3-1}\,,\ K_2(x) = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$K_3(x) = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x - 1}\ ,\ K_4(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$$

solution: • Pour calculer $K_1(x)$ on décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{x^3-1}$ pour avoir:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right]$$

Donc

$$\begin{aligned}
K_1(x) &= \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right] dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Remarquons que $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$ et pour $u = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ (donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$) on obtient

$$\begin{aligned}
K_1(x) &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2} \ltimes \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}dx - \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(u) + cte
\end{aligned}$$

avec $u = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ et cte est une constante réelle. D'où:

$$K_1(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

• On va calculer l'intégrale $K_2(x)$ à l'aide du changement de variable $t - x = \sqrt{x^2+x+1}$ de sorte que $(t-x)^2 = x^2+x+1$ et par suite $x = \dfrac{t^2-1}{2t+1}$ et

$$\sqrt{x^2+x+1} = t - x = \frac{t^2+t+1}{2t+1}.$$

D'autre part,

$$dx = d\left(\frac{t^2-1}{2t+1}\right) = \left(\frac{t^2-1}{2t+1}\right)' dt = 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt$$

et

$$1+x = \frac{t\,(t+2)}{2t+1}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
K_2(x) &= \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} \\
&= \int \frac{2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt}{\frac{t\,(t+2)}{2t+1} \times \frac{t^2+t+1}{2t+1}} \\
&= \int \frac{2dt}{t\,(t+2)} \\
&= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right) dt \\
&= \ln|\frac{t}{t+2}| + cte
\end{aligned}$$

avec $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$, ainsi

$$K_2(x) = \ln|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{2+x+\sqrt{x^2+x+1}}| + \kappa\,,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

Il est à noter que dans le calcul, par des changements de variables, d'une intégrale sans bornes c'est-à-dire une primitive $K(x)$ il faut toujours donner le résultat final en fonction de votre variable de départ x.

- Calculons

$$K_3(x) = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x - 1}$$

Si on pose $t = \cos(x)$ alors

$$K_3(x) = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x - 1} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x - 1} = \int \frac{dt}{t^3 - 1} = K_1(t)$$

Donc

$$\begin{aligned} K_3(x) &= K_1(t) \\ &= \frac{1}{3} \ln|t-1| - \frac{1}{6} \ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sachant que $t = \cos(x)$ il en découle que

$$K_3(x) = \frac{1}{3} \ln(1-\cos(x)) - \frac{1}{6} \ln\left(\cos(x)^2 + \cos(x) + 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right)\right) + \kappa,$$

avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

Plus généralement pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle en sin et cos,

$$K(x) = \int F(\sin(x), \cos(x))\, dx$$

le plus souvent, le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ donne la solution (cela ne veut pas dire que c'est le seul dont on dispose, comme on va le voir dans le calcul de $K_4(x)$ et L_1 ci-dessous).

Posons $t = \tan(\frac{x}{2})$ donc

$$t^2 + 1 = \tan^2(\frac{x}{2}) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \Rightarrow cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{t^2+1}$$

Or $cos^2(\frac{x}{2}) = \dfrac{\cos(x)+1}{2}$ donc

$$\frac{\cos(x)+1}{2} = \frac{1}{t^2+1} \Rightarrow \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Par ailleurs

$$\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2\cos(\frac{x}{2})\tan(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2\cos^2(\frac{x}{2})\tan(\frac{x}{2}) = 2\frac{1}{t^2+1}t$$

Par suite $\sin(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$ et $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{2t}{1-t^2}$. Comme $t = \tan(\frac{x}{2})$ donc $x = 2\arctan(t)$ et par dérivations, $dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$ Par exemple, calculons $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{5-3\cos(x)}$. Si on posons $t = \tan(\frac{x}{2})$ alors

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1}{5-3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{dt}{1+4t^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}\,,\ u = 2t \\
&= \frac{1}{2}\arctan(u) + \kappa\,,\ \kappa \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(2\tan(\frac{x}{2})\right) + \kappa\,,\ \kappa \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

• Pour déterminer $K_4(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x}\,dx$, le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ donne la solution mais les calculs seront plus long que le suivant: $\theta = \tan(x)$, pour lequel on a:

$$x = \arctan(\theta) \Rightarrow dx = \frac{d\theta}{1+\theta^2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{\tan^2(x)+1} = \frac{1}{1+\theta^2} \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2 = \frac{\theta^2}{1+\theta^2}$$

de manière à ce que

$$\begin{aligned}
K_4(x) &= \int \frac{\frac{d\theta}{1+\theta^2}}{\frac{\theta^2}{1+\theta^2} \times \frac{1}{\left(1+\theta^2\right)^2}} \\
&= \int \frac{\left(1+\theta^2\right)^2}{\theta} \, d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{\theta^2} + 2 + \theta^2\right) d\theta \\
&= -\frac{1}{\theta} + 2\theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \kappa \, , \, \kappa \in \mathbb{R} \\
&= -\frac{1}{\tan(x)} + 2\tan(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x) + \kappa \, , \, \kappa \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Exercice3. Intégrales de Wallis: Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$ si $n \in \mathbb{N}$.
(i) Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
(ii) Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n.

Solution; (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx \geqslant 0$ car; $\sin^n(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus $1 \geqslant \sin(x) \geqslant 0$ donc $\sin^n(x) \geqslant \sin^{n+1}(x)$ etpar suite $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\, dx = I_{n+1}$.

(ii) Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \sin^2(x)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \left(1 - \cos^2(x)\right) dx \\
&= I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(x)\sin^n(x) \qquad (0.1)
\end{aligned}$$

Intégrons par partie (0.1) avec $u = \cos(x)$ et $v' = \cos(x)\sin^n$ on aura donc: $u' = -\sin(x)$, $v = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(x)$ et

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= I_n - \frac{1}{n+1}\left[\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx \\ &= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2} \end{aligned} \tag{0.2}$$

De (0.2) découle que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

Application numérique;

$*$ Pour $n = 2p$ pair, en calculant I_2, I_4 et I_6 on remarque que:

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times ... \times 5\times 3\times 1}{2p\times 2\,(p-1)\times ... \times 4 \times 2} I_0$$

qu'on va montrer par induction;

$I_2 = I_{0+2} = \dfrac{0+1}{0+2} I_0 = \dfrac{1}{2} I_0$. Supposons alors la propriété vraie pour p montrons la pour $p+1$.

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{2(p+1)-1}{2(p+1)} \times I_{2p}$$

et par hypothèse de récurrence, $I_{2(p+1)}$ vérifie la formule désirée.

$*$ De même pour les entiers impairs on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2p\times 2(p-1)\times ... \times 4\times 2}{(2p+1)(2p-1)\times ... \times 5\times 3\times 1}$$

Exercice4: Calculer les intégrales suivantes:

$$L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \, , \, L_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$L_3 = \int_0^{\ln 4} \frac{1}{shx + chx} dx \, , \, L_4 = \int_2^4 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x} dx$$

Solution: • Pour calcuker $L_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ on a:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)\tan(x)\cos(x) = 2\cos^2(x)\tan(x)$$

donc $L_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2(x)\tan(x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$. Posons $\theta = \tan(x)$. Alors

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\theta^2},\ \sin^2(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta^2},\ dx = \frac{d\theta}{1+\theta^2}$$

et $x = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$, $x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = 1$. D'où

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2\int_0^1 \frac{\theta \dfrac{1}{1+\theta^2}}{\dfrac{1}{(1+\theta^2)^2} + \dfrac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2}} \frac{d\theta}{1+\theta^2} \\
&= \int_0^1 \frac{2\theta}{\theta^4+1} d\theta \\
&= \int_0^1 \frac{d(\theta^2)}{(\theta^2)^2+1} \\
&= \left[\arctan(\theta^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

• Par le changement de variable $t = e^x$ ($dt = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$) et la décomposition en éléments simples on aura:

$$\begin{aligned}
L_2 &= \int_1^e \frac{t-1}{t+1}\frac{dt}{t} \\
&= \int_1^e \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1}\right) dt \\
&= [2\ln(t+1) - \ln(t)]_1^e \\
&= -1 + \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)^2
\end{aligned}$$

- En remarquant que $ch(x) + sh(x) = e^x$ il s'en suit que pour $t = e^x$:

$$\begin{aligned} L_3 &= \int_1^e \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \right]_1^e \\ &= 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

- $L_4 = \displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x\ln(x)} dx$. On pose $t = \sqrt{1+\ln(x)}$, donc:

$$\ln(x) = t^2 - 1 \Rightarrow x = e^{t^2-1} \text{ et } dx = 2te^{t^2-1} dt$$

$$\begin{aligned} L_4 &= \int_{\sqrt{1+\ln(2)}}^{\sqrt{1+\ln(4)}} \frac{t \times 2te^{t^2-1}}{(t^2-1)\, e^{t^2-1}} dt \\ &= \int_{\sqrt{1+\ln(2)}}^{\sqrt{1+\ln(4)}} \frac{2t^2}{t^2-1} dt \\ &= \int_{\sqrt{1+\ln(2)}}^{\sqrt{1+\ln(4)}} 2 + \frac{2}{t^2-1} dt \\ &= \int_{\sqrt{1+\ln(2)}}^{\sqrt{1+\ln(4)}} \left[2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{+-1} \right] dt \\ &= [2 + \ln|t-1| - \ln|t+1|]_{\sqrt{1+\ln(2)}}^{\sqrt{1+\ln(4)}} \end{aligned}$$