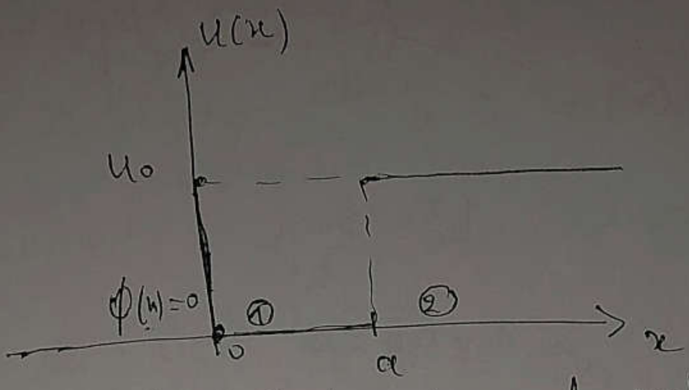
Série 3.

EX 1 :

1°)



Pour $x<0$, le potentiel est infini, donc la probabilité de présence de la particule dans cette région est nulle.

$$\phi(x<0)=0$$

2°) Equation de Schrodinguer independante du temps.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+U(x)\varphi(x)=E\varphi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)-\frac{2m}{\hbar^2}U(x)\varphi(x)=-\frac{2m}{\hbar^2}E\varphi(x)$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U(x)\right)\varphi(x)=0}$$

Dans la région ①, on a $U(x)=0$

l'équation de Schrodinguer dans cette région devient :

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\varphi_1(x)+\frac{2m}{\hbar^2}E\,\varphi_1(x)=0}$$

* Dans la région ② $U(x)=U_0$, l'équation de Schrodinguer devient :

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\varphi_2(x)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U_0\right)\varphi_2(x)=0}$$

3°/ Cas $0 < E < U_0$

a/ La solution générale s'écrit dans la région ①

$$\phi_1(x) = C e^{ik_1 x} + C' e^{-ik_1 x}$$

avec $k_1^2 = \frac{2m E}{\hbar^2}$.

Continuité en $x = 0$:

On a $\phi_1(0) = 0 \iff C = -C'$

donc $\phi_1(x) = 2iC \sin k_1 x = A \sin k_1 x$.

$$\boxed{\phi_1(x) = A \sin k_1 x.}$$

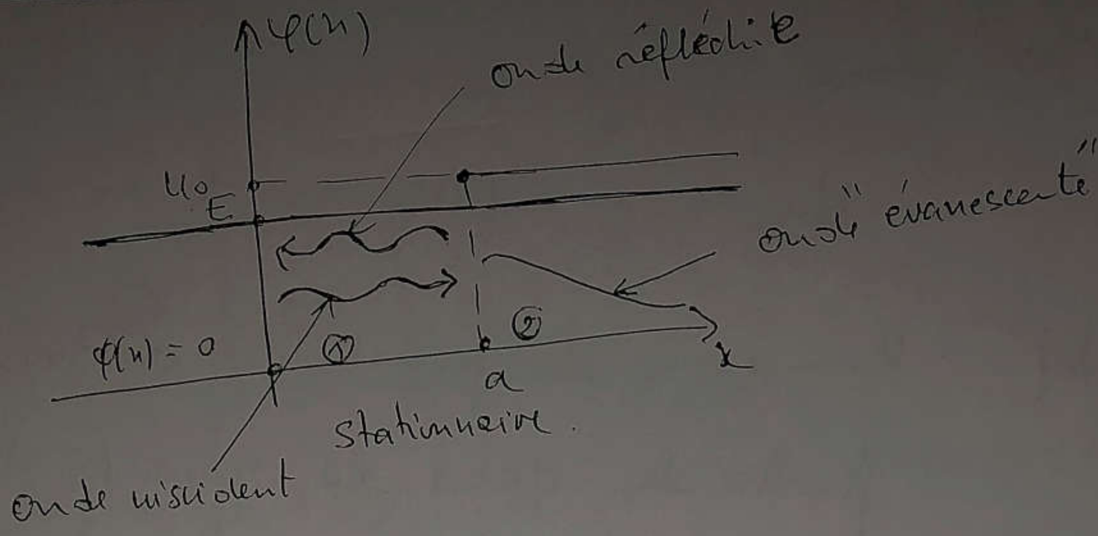
b/ Dans la région ②, la solution de l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\phi_2(x) = B e^{-k_2 x} + B' e^{k_2 x} \quad , \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)$$

Dans la région ②, la fonction d'onde doit être bornée (donc $x \to \infty$, $\phi_2(x)$ doit être bornée)

pour que $\phi_2(x)$ soit bornée, il faut que $B' = 0$.

d'où $\phi_2(x) = B e^{-k_2 x}$ onde "évanescente"



c°) Conditions de continuité au pt $x=a$.

$\phi_1(a)=\phi_2(a) \Leftrightarrow A\sin k_1 a = B e^{-k_2 a}$.

$\phi_1'(a)=\phi_2'(a) \Leftrightarrow A k_1 \cos k_1 a = -B k_2 e^{-k_2 a}$.

d'où $\boxed{\cotg k_1 a = -\dfrac{k_2}{k_1}}$

3°) a°) La densité de probabilité de trouver la particule dans la région ② est

$$\rho(x) = \phi_2(x)\,\phi_2^{*}(x) = |B|^2 e^{-2k_2 x}$$

$$\boxed{\rho(x) = |B|^2 e^{-2k_2 x}}$$

b°) La profondeur de pénétration x_0 est donnée par

$$\rho(x_0) = \frac{\rho(0)}{e} \Leftrightarrow \boxed{x_0 = a + \frac{1}{2k_2}}.$$

4°| a- ~~posst~~ Quand $U_0 \longrightarrow \infty \Leftrightarrow k_2 \longrightarrow \infty$.

donc $\rho(x) \longrightarrow 0$ et $x_0 \longrightarrow a$.

b°| $U_0 \longrightarrow \infty$, la probabilité de trouver la particule dans la région ② st nulle.

donc $\phi_2(x) = 0$

Condition de Continuité en $x = 0$:

$\phi_1(a) = \phi_2(a) = 0$

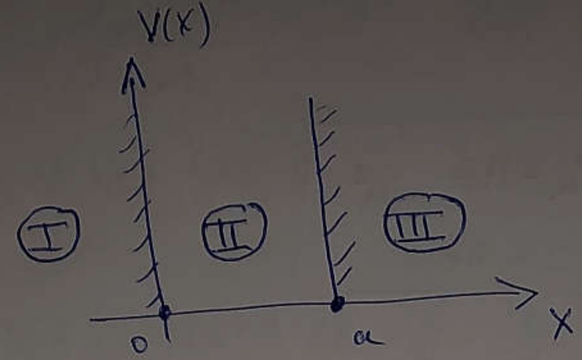
$A \sin k_1 a = 0 \Leftrightarrow k_1 a = n\pi \Leftrightarrow k_1 = \frac{n\pi}{a}$.

L'énergie E de la particule st donnée par:

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot n^2}$$

Ex2:

1°|



2°| Dans la région (I) et (III), le potentiel $V(x) = \infty$, donc la particule ne peut pas se trouver dans ces deux régions

3°| Dans la région (II), on $V(x)=0$, donc l'équation de Schrodinguer s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

3°| la solution générale de cette équation st :

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{avec } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = (A+B)\cos kx + i(A-B)\sin kx.$$

- En $x=0$, on a : $\psi(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \Leftrightarrow A=-B$.
- En $x=a$, on a $\psi(a)=0 \Leftrightarrow ka = n\pi$, $n=1,2,\ldots$

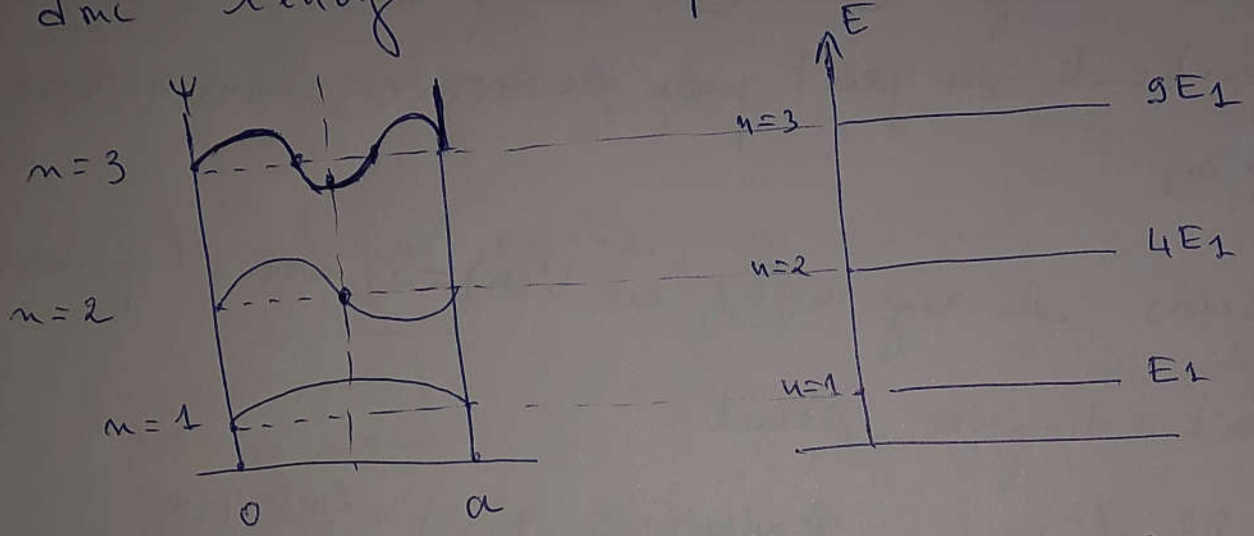
$$\left\{\begin{array}{l}\text{on remplace } (A) \text{ par } (-B),\ \psi(x) = \text{cte} \sin kx \\ \text{puis en } x=a, \text{ on a cte} \sin ka = 0 \Leftrightarrow ka = n\pi\end{array}\right\}$$

donc $k = \frac{n\pi}{a}$.

or $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Leftrightarrow E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot n^2$

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \cdot n^2}$$

donc l'énergie de la particule est quantifiée.



6°) La fonction d'onde $\psi(x)$ est donnée par

$$\psi(x) = C \sin kx = C \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x .$$

7°) Calcul de la cte de normalisation :

$$\int |\psi(x)|^2 dx = |C|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)x \, dx = 1$$

$$\Rightarrow |C^2| \int_0^a \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{a}\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow |C|^2 \left[a - \int_0^a \cos\frac{2n\pi x}{a} dx\right] = 1 \Leftrightarrow C = \sqrt{\frac{2}{a}} .$$

d'où $\boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}}$

8°) La particule est dans l'état:

$$\phi(x,t) = \psi(x)\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

$$\langle x\rangle = \int_0^a \phi^*(x,t)\, x\, \phi(x,t)\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx.$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{a}\int_0^a x\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{a}\right)dx.$$

En intégrant par parties ; on obtient.

$$\boxed{\langle x\rangle = \frac{a}{2}}$$

$(x = x)$ notation.

$$\langle p\rangle = \int_0^a \phi^*(x,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)\right)dx$$

$$\langle p\rangle = -i\hbar\frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\sin\frac{n\pi x}{a}\right]dx.$$

$$\langle p\rangle = -i\hbar\frac{2n\pi}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = 0$$

$\boxed{\langle p\rangle = 0}$ (produit fonction paire par fonction impaire).

9°) $$\langle x^2\rangle = \int_0^a \phi^*(x,t)\, x^2\, \phi(x,t)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\left(1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right)dx$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient (2 fois).

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2(n\pi)^2}}.$$

d'où $$\boxed{\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{a}{2n\pi}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3} - 2}}.$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^a \phi^*(x,t)\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t)\right)dx$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{2\hbar^2}{a}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\Rightarrow \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{a}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2\pi^2}{a} n^2}$$

$$\boxed{\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = n\pi\frac{\hbar}{a}}$$

10°/ Vérifions que la relation d'incertitude d'Heisenberg est vérifiée.

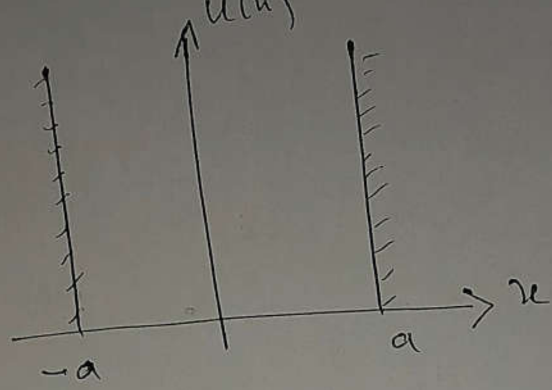
$$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3} - 2}, \text{ on a } \forall n \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3} - 2} \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \Delta x \, \Delta p > \frac{\hbar}{2}.$$

Ex 3 :

On a $U(x) = \begin{cases} U_0\,\delta(x) & ; \ |x| < a \\ \infty & ; \ |x| > a \end{cases}$

U_0 cte positive.



1°) Equation de Schrodinguer

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x)}$$

2°) Cette équation devient dans le cas où $x \neq 0$:

pour $x \neq 0$, $\delta(x) = 0$ et par suite on a :

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0}$$

La fonction d'onde solution de cette équation est :

$$\psi(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad ; \quad \text{avec } k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

on prend $k_1 = k$.

3°) Continuité au pt $x = -a$

$\psi_1(-a) = 0 \iff A e^{-ika} + B e^{+ika} = 0 \iff B = -A e^{-2ika}$

donc $\boxed{\psi_1(x) = C_I \sin k(x+a)}$ avec $\boxed{C_I = 2iA e^{-ika}}$

* Continuité en $x=0$ — On donne la solution sous forme $\psi(x) = C\sin(kx+\varphi)$

$$\psi_{II}(a) = 0 \iff B = -A\,e^{-ika\cdot 2} = -A\,e^{-2ik\cdot a}$$

donc $\boxed{\psi_{II}(x) = C_{II}\sin k(x-a)}$, $C_{II} = 2iA\,e^{ika}$

Autre façon $\psi_{II}(x) = C_{II}\sin(k(x)+\varphi)$ continuité en $x=a$

$\psi_I(x) = C_I \sin kx + \varphi$ continuité en $x=-a$

4°) en $x=0$, on a $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow C_I = -C_{II}$

$$\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0) = \frac{2m}{\hbar^2} U_0\,\psi_{II}(0)$$

$$-2k\cos ka = \frac{2m}{\hbar^2} U_0 \sin k a$$

donc $\boxed{\tan ka = -\frac{\hbar^2}{maU_0} ka} \iff \boxed{\tan y = -\gamma y}$

$$y = k\cdot a \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\hbar^2}{ma\cdot U_0}$$

5°) $\gamma \ll 1$, on a $\tan ka = ka - n\pi$

donc $ka - n\pi = -\frac{\hbar^2}{maU_0} ka$.

$$\iff k\cdot a = \frac{n\pi}{1+\gamma} = n\pi(1-\gamma)$$

$$\iff \boxed{k = \frac{n\pi}{a}(1-\gamma)}$$

d'où $\boxed{E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1-2\gamma)}$.

$n=1$ correspond à l'état fondamental: $E_f = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1-2\gamma)$.

$n=2$ correspond au premier état excité: $E_1 = \frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2}(1-2\gamma)$