Université My Ismail **Année Univer. 2019-2020**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Crrection de la série n^{o}3

Exercice1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Considérons $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction: $\mathit{\Gamma} : x \longmapsto \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$ est de classe C^1 et déterminer sa dérivée $\mathit{\Gamma}'$.

Soluion: La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = f(x)$. Par hypothèse φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. donc $\mathit{\Gamma} = F \circ \varphi$ est la composée de deux fonctions de classe C^1, donc $\mathit{\Gamma}$ l'est aussi avec $\mathit{\Gamma}'(x) = F' \circ \varphi(x) \times \varphi'(x)$

Exercice2 Calculer les limites des suites suivantes lorsque $n \to +\infty$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}\ ,\ b_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}\ ,\ c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\ ,\ d_n = n^2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^3+n^3}$$

Soluion: Cet exercice utilise le résultat du cours qui affirme que:
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction Riemann intégrable, alors la suite*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),\ n \geqslant 1$$

converge vers $\int_a^b f(t)dt$ *quand* $n \to +\infty$

Applications: • Étudions la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n) = \int_a^b f(t)dt$$

avec $b-a=1, a+k\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{k}{n}$ et $f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)=\dfrac{k}{n}$. Il est clair que $a=0, b=1$ et $f(t)=t$. Donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(a_n) &= \int_0^1 tdt\\ &= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

• Pour la suite

$$b_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$$

on a bien:

$$\begin{aligned}b_n &= n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(b_n) &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}dt\\ &= [\arctan(x)]_0^1\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

• L'étude de la suite $c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$ nécessite l'introduction de deux suites auxiliaires pour pouvoir appliquer le résultat du cours ci-dessus. Il s'agit de

$c'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$ et de $c''_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{1+kn}$ qui vérifient:

$$\begin{aligned}
c'_n - c''_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[2^{\frac{k}{n}}\left(1-\frac{1}{1+kn}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\left(\frac{kn}{1+kn}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[2^{\frac{k}{n}}\left(\frac{1}{\frac{1}{kn}+1}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[2^{\frac{k}{n}}\left(\frac{1}{\frac{1}{k}+n}\right)\right] \\
&= c_n
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $2^{\frac{k}{n}} = \exp\left(\frac{k}{n}\ln(2)\right) \leqslant \exp\left(\ln(2)\right) = 2,\ \forall k = 1, 2, ...n$ et $1+n \leqslant 1+kn \Rightarrow \dfrac{1}{1+kn} \leqslant \dfrac{1}{1+n}$ donc

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant c''_n \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+n} \\
&= \frac{2n}{n(1+n)} \\
&< \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} c''_n = 0$ et les deux suites $(c_n)_{n\geqslant 1}$, $(c'_n)_{n\geqslant 1}$ tendent vers la même limite si on montre que la deuxième est convergente. Remaequons que dans c'_n les termes obtenus pour $k=0$ et $k=n$: $\alpha_n = \frac{1}{n}$ et $\beta_n = \frac{2}{n}$ tendent vers zéro donc les ajourer ou les retrancher ne change pas la convergence et la limite. Or d'après le résultat du cours ci-dessus appliqué à $[a,b] = [0,1]$ et $f(t) = 2^t$ on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} c'_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^t dt = \left[\frac{1}{\ln(2)}e^{t\ln(2)}\right]_0^1 = \frac{1}{\ln(2)}$$

Conclusion: $\lim_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1}{\ln(2)}$

- Par la même méthode on a;

$$d_n = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^3+n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+1}$$

converge bien vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^3+1}dt$. Pout calculer cette intégrale il faut décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{t^3+1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^3+1} &= \frac{1}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)} \\
&= \frac{1}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2-t+1}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{t^3+1}dt &= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2-t+1}\right) dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t}{t^2-t+1}dt + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t}{t^2-t+1}dt + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t}{t^2-t+1}dt + \frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t}{t^2-t+1}dt + \frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^1 \frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\ln(2)
\end{aligned}$$

Conclusion: la suite (d_n) est convergente avec

$$\lim_{n\to+\infty}\left[n^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^3+n^3}\right]=\frac{1}{3}\ln(2)$$

Exercice3: Calculer les limites des suites suivantes lorsque $n\to+\infty$:

$$u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\ ,\ v_n=\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Solution: • Considérons la suite $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$:

Il est clair que $\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)>0$, pour tout $k=1,2,...,n$. Donc $\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ est bien défini. Par conséquence $u_n>0$. Pour tous $n\geqslant 1$ posons $w_n=\ln\left(u_n\right)$ qui est défini et satisfait:

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)+\frac{\ln(2)}{n} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2)}{n}\right)=0$, il s'en suit, tenant compte de la propriété des sommes de Riemann ci-dessus, que

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]=\int_0^1\ln\left(1+t^2\right)dt$$

Une intégration par partie avec $u' = 1$ et $v = (1+t^2)$ nous mène à:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} w_n &= \left[t\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\
&= \left[t\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2+2-2}{1+t^2}dt \\
&= \left[t\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2 - \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \left[t\ln\left(1+t^2\right) - 2t + 2\arctan(t)\right]_0^1 \\
&= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

La continuité de la fonction $x \mapsto \exp(x)$ (en fait au point $x_0 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$ sera suffisante) permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(w_n\right) = \exp\left(\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2\exp\left(-2+\frac{\pi}{2}\right).$$

•Pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ est un réel strictement positif, puisque $\frac{(2n)!}{n!n^n} > 0$. Ainsi $z_n = \ln\left(v_n\right)$ est bien défini et vérifie:

$$\begin{aligned}
z_n &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!(n+1)(n+2)...(n+n)}{n!n.n...n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n} \times \frac{n+3}{n} \times ... \times \frac{n+n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\left((1+\frac{1}{n}) \times (1+\frac{2}{n}) \times (1+\frac{3}{n}) \times ... \times (1+\frac{n}{n})\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

De la propriété des sommes de Riemann ci-dessus résulte que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} z_n &= \int_0^1 \ln(1+t)dt \\
&= [t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt \\
&= [t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}dt \\
&= [t\ln(1+t) - t + \ln(1+t)]_0^1 \\
&= 2\ln(2) - 1 \\
&= \ln\left(\frac{4}{e}\right)
\end{aligned}$$

De la continuité de la fonction $x \mapsto \exp(x)$ au point $\ln\left(\frac{4}{e}\right)$ on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \exp(z_n) = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{4}{e}\right)\right) = \frac{4}{e}$$

Exercice4: Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$G_1 = \int_0^1 \frac{1}{t\,(t-1)}dt\,,\; G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

Solution:

• La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(t-1)}$ n'est pas bornnée sur la compact $[0,1]$ donc c'est une integrale généralisée qui a deux points de singularité 0 et 1. D'où la convergence de G_1 est équivalente à la convergence des intégrales impropres

$$G_{1,1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,(t-1)}dt \;\text{ et }\; G_{1,2} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t\,(t-1)}dt$$

⋇ Pour tout rél x tel que $0 < x < \frac{1}{2}$ si $G_{1,1}(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,(t-1)} dt$ alors

$$\begin{aligned}
G_{1,1}(x) &= \int_x^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1}\right] dt \\
&= \left[\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\right]_x^{\frac{1}{2}} \\
&= -\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \\
&= \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} (G_{1,1}(x)) = -\infty$. Donc $G_{1,1}$ est divergente, par suite G_1 diverge.

• Les bornes d'intégration de $G_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ sont infinies, donc c'est une intégrales impropre. Elle converge si, et seulement si, $G_{2,1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$ et $G_{2,2} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ convergent.

⋇ Pour tout réel a strictement négatif, $G_{2,1}(a) = \displaystyle\int_a^0 xe^{-x^2} dx$ vérifie:

$$\begin{aligned}
G_{2,1}(a) &= -\frac{1}{2}\int_a^0 \exp'\left(-x^2\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\exp\left(-x^2\right)\right]_a^0 \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $G_{2,1}$ est convergente avec $G_{2,1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}$

⋇ De même si b est un réel strictement positif, alors $G_{2,2}(b) = \displaystyle\int_0^b xe^{-x^2} dx$

vérifie:

$$\begin{aligned} G_{2,2}(b) &= -\frac{1}{2}\int_0^b \exp'\left(-x^2\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\exp\left(-x^2\right)\right]_0^b \\ &= \frac{1}{2}\left(1-e^{-b^2}\right) \end{aligned}$$

Si on fait tendre b vers $+\infty$ on verra alors que $G_{2,2}$ est convergente avec $G_{2,2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$

Conclusion: G_2 est convergent avec $G_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$
.

Exercice5: On se propose d'intégrer dans $]0,+\infty[$ l'équation différentielle:

$$(E)\ :\ y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2.$$

1. Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle:
$(E_1)\ :\ z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$
3. Intégrer (E_1) sur $]0,+\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$.

Correction. Résolvons léquation differentielle:

$$(E)\ :\ y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2.$$

1. Pour $a > 0$, $y_0(x) = ax$ est une solution particulière de (E) si, seulement si, $y_0'(x) - \frac{y(x)}{x} - y_0^2(x) = -9x^2$ si, seulement si, $-a^2x^2 = -9x^2$ avec $a > 0$, cela est équivalent à: $a = 3$ et donc $y_0(x) = 3x$

2. Le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme

l'équation (E) en

$$
\begin{aligned}
(E_1) \quad &: \quad \left(3+\frac{z'(x)}{z^2}\right)-\frac{1}{x}\left(3x-\frac{1}{z(x)}\right)-\left(3x-\frac{1}{z(x)}\right)^2=-9x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 3+\frac{z'(x)}{z^2(x)}-3+\frac{1}{xz(x)}-9x^2+\frac{6x}{z(x)}-\frac{1}{z^2(x)}=-9x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z'(x)}{z^2(x)}+\frac{1}{xz(x)}+\frac{6x}{z(x)}-\frac{1}{z^2(x)}=0 \\
&\Leftrightarrow \quad z'(x)+\frac{z(x)}{x}+6xz(x)-1=0 \\
&\Leftrightarrow \quad z'(x)+(6x+\frac{1}{x})z(x)=1
\end{aligned}
$$

3. L'équation homogène (H_1) de (E_1) est:

$$(H_1): z'(x)+(6x+\frac{1}{x})z(x)=0 \Leftrightarrow \frac{dz(x)}{dx}=-(6x+\frac{1}{x}) \Leftrightarrow \frac{dz}{z}=-(6x+\frac{1}{x})dx$$

Par intégration on aura

$$\ln|z|=-3x^2-\ln|x|+cte=-3x^2+\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)+cte$$

donc $z_0(x)=\frac{\kappa}{x}e^{-3x^2}$, $\kappa\in\mathbb{R}$ est la solution générale de (H').
Remarquons que $z_p(x)=\frac{1}{6x}$ est une solution particulière de (E_1). En effet:

$$-\frac{1}{6x^2}+\left(6x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{6x}=1$$

Ainsi, la solution génétale de (E_1) est

$$z(x)=\frac{1}{6x}+\frac{\kappa}{x}e^{-3x^2},\ \kappa\in\mathbb{R}$$

qui sont bien définies sur]0,+∞[.

[0] **Tout(e) étudiant(e) ayant une (ou des) questions sur cette correction ou autre est prié de me rédiger sa problématique via Whatsapp au N° 0694583317. Je lui enverrai (in chaa allah) les réponses par son Whatsapp. Rigueur et patience aident à mener à bout tout travail aussi difficile que soit-il. Tourner la page SVP**

4. La solution générale de (E) est

$$y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)} = 3x - \frac{1}{\frac{1}{6x} + \frac{\kappa}{x}e^{-3x^2}},\ \kappa \in \mathbb{R}$$

Ainsi

$$y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + \kappa e^{-3x^2}},\ \kappa \in \mathbb{R}$$