Université Moulay Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2019/2020
LST Maths Appl
Module M147

Travaux dirigés : Suites et séries de fonctions
Série 1

Exercice 1
Soit $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer sans intégration $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)dx$.

Exercice 2
Soit la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$$

1. Etudier la convergence uniforme de f_n sur $[0,1]$.
2. Vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

Exercice 3
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx.$$

$I=[0,1]$

Exercice 4

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \frac{\ln(x+n)}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq1} f_n$.
   On note $S = \sum_{n\geq1} f_n$.
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$ $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries. les 3 conditions
3. En déduir que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5
Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Déterminer l'ensemble D_f.

Exercice 6
Soit $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq0} f_n(x)$.

Scanned with CamScanner

2. Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$, calculer $S(x)$.

3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice (Facultatif)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n & si\ x\in[0,n[\\ 0 & sinon \end{cases}$. On note que f_n est continue en n.

1. Construire les graphes de f_1, f_2, f_3 et f_4.
2. Vérifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $f :\to e^{-x}$ sur $[0, +\infty]$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, on pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$
   (a) Montrer que la fonction g_n est positive sur $[0, +\infty[$.
   (b) Monter que pour $n \geq 2$ la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Dans les questions c et d, on prend $n \geq 2$
   (c) Montrer que la fonction g_n admet sur $[0, +\infty[$ un maximum atteint en un certain réel x_n de $]0, n[$.
   (d) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout x de $[0, +\infty[$, $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{ne}$.
   (e) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, +\infty[$

Scanned with CamScanner

Serie 1

Exercice 1

1) Mq $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

On a $\forall n \geq 1$

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^n(1-x)$$

Calculons tout d'abord la limit simple de cette suite

- Si $x=0$, $f_n(0)=0$ et $(f_n(0))_n$ est une suite c^{te} donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$$

- Si $x=1$, $f_n(1)=0$, et $(f_n(1))_n$ est une suite c^{te}, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$$

Scanned with CamScanner

Exo 1

Si $x \in]0,1[$, alors

$0 \leq |f_n(x)| = x^n(1-x) \leq x^n$

or $\lim_{n \to +\infty} x^n = 0$, d'où $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

Conclusion

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Etudions maintenant la convergence uniforme de cette suite

on a f_n est de classe C^∞ et $[0,1]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ alors pour chaque $n \geq 1$, f_n atteint ses bornes.

Calculons $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

ou f est la limite simple qui est nulle (1)

Scanned with CamScanner

Ex01

$f_n(x) - f(x) = f_n(x) = x^n(1-x) = x^n - x^{n+1}$

$f'_n(x) = n x^{n-1} - (n+1) x^n = (n+1) x^{n-1}\left(\frac{n}{n+1} - x\right)$

$f'_n(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = \frac{n}{n+1}$

Il est claire que f_n atteint sa borne supérieure en $x_n = \frac{n}{n+1}$

donc $0 \leq \|f_n - f\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{cvg} 0$$

D'où $(f_n)_n$ converge unif vers la fonction nulle sur $[0, 1]$

2) calculer sans intégration

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n (1-x)\, dx$$

D'après la 1ère question on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right) dx = 0$$

Scanned with CamScanner

EX02

1) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ avec $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \frac{nx}{1+n^2x^4}$$

Toujours on commence par la CV simple car si une suite de f^{cts} converge unif, alors elle conv simplement vers la même limite.

- si $x=0$, $f_n(0)=0 \quad \forall n \geq 1$

donc, $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

- si $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n^2x^4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx^3} = 0$$

Donc $(f_n)_n$ converge simplement

Scanned with CamScanner

Serie 1

EXO2

Vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
si $(f_n)_n$ converge unif, alors elle converge vers la f^{ct} nulle.

~~Or~~ Prenons $x_n = \frac{1}{n}$, $(x_n)_n$ est une suite de pts de $[0,1]$ et verifie

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$$

qui ne tend pas vers 0. Alors $(f_n)_n$ ne converge pas sur $[0,1]$.

2) Verifier que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx$$

on a $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+(nx^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2n[illegible]}{1+[illegible]}$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

et $\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = 0$ CQFD

Scanned with CamScanner

Série 1

EX 03

Determiner $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{n e^{x}}{n+x}\,dx$

Posons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $n\geq 1$
$x \longrightarrow \frac{n e^{x}}{n+x}$

Determinons $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$

En général on ne peut pas intervertir l'intégrale et la limite mais on sait (d'après le cours) si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et comme les f_n sont intégrable sur $[0,1]$, alors on peut permetter l'intégrale et la limite

- Soit $x\in[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n e^{x}}{n+x} = e^{x}$$

Donc $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie

Scanned with CamScanner

Serie 1

EXO3

par $f(x) = e^x \quad \forall x \in [0,1]$

• Etudions la CV uniforme

on a $0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^x}{n+x} - e^x\right|$

$$= \left|\frac{ne^x - ne^x - xe^x}{n+x}\right|$$

$$= \frac{xe^x}{n+x}$$

$$\leq \frac{e^n}{x+n}$$

$$\leq \frac{e}{x+n}$$

$$\leq \frac{e}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

alors (f_n) CV unif vers f sur $[0,1]$ et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 e^x\,dx = e - 1$$

Scanned with CamScanner

Série 1

EX04

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ ou $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\ln(x+n)}{n^2}$$

On a $\forall x \geq 0$, $x+n \geq 1$ et $\ln(x+n) \geq 0$

Soit $x \in [0,+\infty[$, ~~comme~~ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ on a

$$n \leq x+n \leq 2n$$

et ln est une f^{ct} croissante, alors

$$\ln(n) \leq \ln(n+x) \leq \ln(2n) = \ln(2)+\ln(n)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{\ln(n+x)}{n^2} \leq \frac{\ln(2)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}$$

or $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(2)}{n^2}$ et $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(n)}{n^2}$ sont convergente, ce qui montre que $\sum_{n\geq N} \frac{\ln(n+x)}{n^2}$ est convergente

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n+x)}{n^2}$ est convergente

(car si on change un nombre fini .....)

Scanned with CamScanner

2) Mq S est de classe C^2 (série 1)

on a - f_n est classe C^2 $\forall n \geq 1$

et $f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)n^2}$

$f_n''(x) = -\frac{1}{n^2(n+x)^2}$

- $0 \leq |f_n''(x)| \leq \frac{1}{n^2(1+x)^2}$

$\leq \frac{1}{n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente

Donc $\sum f_n''$ converge normalement

Puis elle converge unif localement

- $\sum f_n'(1)$ et $\sum f_n(1)$ sont CV

c/c $\sum f_n$ CV unif localement sur $]0, +\infty[$ vers une f^{ct} qui est de classe C^2 donc S est de classe C^2 et on peut deriver terme à terme

Scanned with CamScanner

Série 1

2)

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} f'_n(x)$$
$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+x)} > 0$$

$$S''(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+x)^2} < 0$$

3) Déduction

- On a $S'(x) > 0 \Rightarrow S$ est croissante
- On a $S''(x) < 0 \Rightarrow S$ est concave

EX 05

Déterminer D_f où $\cancel{f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1+2x)^n}}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$$

- Si $|x| \geq 1 \Rightarrow x^{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ce qui entraîne que $\sum x^{n^2}$ ne converge pas. Donc $D_f \subset]-1,1[$

Scanned with CamScanner

EXO5 Inversement

Soit $x \in]-1,1[$, alors on a

$$x^{n^2} = \underbrace{x^n . x^n . x^n . \dots . x^n}_{n\text{-fois}}$$

Donc

$$0 \leq |x^{n^2}| = |x|^n . |x|^n . \dots . |x|^n$$
$$\leq |x|^n . \underbrace{1 . 1 . \dots . 1}_{(n-1)\text{-fois}}$$
$$\leq |x|^n$$

or $\sum |x|^n$ cv (série géométrique, avec $|x| < 1$

Donc $\sum x^{n^2}$ cv absolument et par suite elle est convergente

et $x \in D_f \Rightarrow]-1,1[\subset D_f$

C/c $D_f =]-1,1[$.

Scanned with CamScanner

Série 1

EX06

1) Etudier la CV simple de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et $\sum f_n(0)$ CV
- Si $x \neq 0$, alors

$\sum_{n\geq 0} \frac{x}{(1+x)^n}$ CV ssi $\sum \frac{1}{(1+x)^n}$ CV

ssi $\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1$

ssi $|1+x| > 1$

ssi $1+x > 1$ ou $1+x < -1$

ssi $x > 0$ ou $x < -2$

ssi $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

C/C $\sum \frac{x}{(1+x)^n}$ CV ssi $x \in]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$

càd la série converge simplement sur $]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$.

2) calculer $S(x)$

Scanned with CamScanner

EX06

On a $S(0)=0$ et $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

$$= x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

$$= x \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}$$

$$= x \frac{1}{\frac{x}{1+x}}$$

$$= x \frac{1+x}{x}$$

$$= 1+x$$

Donc $S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1+x & \text{si } x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[\end{cases}$

3) Mq la serie ne converge pas unif sur $[0,+\infty[$

Comme les f_n sont cont sur $[0,+\infty[$ alors si on a de plus la CV unif

Scanned with CamScanner

Serie 1

Exo 6

Alors S est cont sur $[0,+\infty[$.

et on obtient

$$0 = S(0) = \lim_{x \to 0^+} S(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x) = 1$$

Contradiction

C/C La série ne converge pas unif sur $[0,+\infty[$.

Fin

Scanned with CamScanner

Université Moulay Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2019/2020
LST Maths Appl
Module M147

Travaux dirigés : Séries Entières
Série 2

Exercice 1

1. Etudier la convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\ln(n)} x^n \qquad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} x^n$$

2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{\sqrt{n^2+7n}} x^{7n} \qquad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{E(n\pi)} x^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\beta)}{n} x^n \qquad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}} x^n$$

Exercice 2

En utilisant les séries entières, calculer la somme de la série numérique suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}$$

Exercice 3

Soit $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n dt$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$
4. Montrer que

$$\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt, \quad \forall x \in]-1,1[$$

Scanned with CamScanner

Exercice 4

On considère la série complexe de rayon de convergence R et de somme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

où les a_n sont définis par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que R est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$
2. Montrer que pour tout $z \in D(0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n

Exercice 5

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n

Exercice 5

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}.$$

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
2. Donner le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}$.
3. En déduire $S(x)$
4. Puis la valeur de la somme $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.

$e^{j^2 x}$

Scanned with CamScanner

Série 2

Exo 1

1) L'étude de la CV des séries entières suivantes :

1 – $\sum n^{\ln(n)} x^n$

Calculons tout d'abord le rayon de convergence R de cette série

Prenons $a_n = n^{\ln(n)}$ et appliquons le critère de D'Alembert

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(n^{\ln(n)}\right)^{1/n}$$

$$= n^{\frac{\ln(n)}{n}}$$

$$= e^{\frac{\ln(n)^2}{n}}$$

$$= e^{\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

$$= e \xrightarrow[qd\ n \to +\infty]{} 1$$

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc la série converge sur $]-1,1[$ et diverge pour $|x| > 1$

Pour $|x| = 1$ càd $x = 1$ ou $x = -1$

Dans ces deux cas le terme général ne tend pas vers 0

Scanned with CamScanner

Série 2

1)

Ce qui montre que la série diverge pour $x=1$ et pour $x=-1$

c/c la serie CV ssi $x \in]-1,1[$.

2 – $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} x^n$

On sait qu'une série et sa série dérivée partage le même rayon de convergence, donc

$\sum \frac{\sin(n)}{n^2} x^n$, $\sum \frac{\sin(n+1)}{n+1} x^n$ et $\sum \frac{n+1}{n+2} \sin(n+2) x^n$ ont le même rayon de convergence

or $\left|\frac{n+1}{n+2} \sin(n+2)\right| \underset{+\infty}{\sim} |\sin(n+2)|$

Donc la série $\sum \sin(n+2) x^n$ partage le même rayon de convergence avec les trois séries précédentes

Donc il suffit de calculer le

Scanned with CamScanner

Série 2

1)

rayon de convergence de la série $\sum \sin(n+2)\, x^n$

on a $(\sin(n+2))_n$ est bornée donc $R \geq 1$

Si on remplace x par 1, on obtient $\sum \sin(n+2)$ qui est divergente puisque $(\sin(n+2))_n$ ne tend pas vers 0, ~~alors~~ on conclut que $R \leq 1$. D'où $R = 1$

et par suite la serie converge sur $]-1,1[$ et diverge pour $|x|>1$;

Reste à voir pour $|x| = 1$ ie $x = 1$ ou $x = -1$ Dans ce cas la série converge

c/c La serie converge ssi $x \in [-1, 1]$

Scanned with CamScanner

Série 2

Exo 1

2 Détermination du rayon de Convergence

1 - $\sum \pi^{\sqrt{n^2+7n}}\, x^{7n}$

Prenons $a_n = \pi^{\sqrt{n^2+7n}}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\pi^{\sqrt{n^2+7n}}\right)^{1/n} = \pi^{\sqrt{\frac{n^2+7n}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\ell} \pi$$

$$R' = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\pi}$$

$$R = \sqrt[7]{R'} = \sqrt[7]{\frac{1}{\pi}}$$

2 $\sum \pi^{E(n\pi)}\, x^n$

Prenons $a_n = \pi^{E(n\pi)}$

On a $n\pi - 1 \leq E(n\pi) \leq n\pi$

$$\Rightarrow \pi - \frac{1}{n} \leq \frac{E(n\pi)}{n} \leq \pi$$

$$\Rightarrow \pi^{\pi-\frac{1}{n}} \leq \pi^{\frac{E(n\pi)}{n}} \leq \pi^{\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \pi^{\frac{E(n\pi)}{n}} = \pi^{\pi}$$

$$R = \frac{1}{\ell} = \pi^{-\pi}$$

Scanned with CamScanner

EXO 1

2)

3- $\sum \frac{\cos(n\beta)}{n} x^n$

On sait qu'une série et sa série dérivée ont le même rayon de convergence R.
Donc les deux séries $\sum \frac{\cos(n\beta)}{n} x^n$ et $\sum \cos((n+1)\beta)\, x^n$ ont le même rayon de convergence or le rayon de conv de la serie $\sum \cos((n+1)\beta) x^n$ vaut 1 en effet :
$(\cos((n+1)\beta))_n$ est bornée donc $R \geq 1$ et si on remplace x par un on obtient $\sum \cos((n+1)\beta)$ qui est divergente puisque $(\cos((n+1)\beta))_n$ ne tend pas vers 0

C/C $R = 1$

Scanned with CamScanner

Série 2

Exo 1

2)

4- $\sum n^{(-1)^{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}} x^n$

On a

$$\frac{1}{n} \leq n^{(-1)^{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}} \leq n$$

Or les rayon de convergences des séries $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum n x^n$ valent 1

D'où $R = 1$

Scanned with CamScanner

Série 2

EXO2

Calculer la somme suivante:

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}$$

On a

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

On a les rayons de convergence des séries entières suivantes $\sum \frac{x^n}{n-1}$ et $\sum \frac{x^n}{n}$ valent 1, donc les séries numériques $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, ~~et~~ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ sont convergentes. Posons $S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, $S_2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $S_3 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

Alors $S = S_1 \cancel{+} S_2 + S_3$

Scanned with CamScanner

EX02

Definissons les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^n \quad , \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad , \quad \forall x \in]-1,1[$$

Alors $S_1 = f\left(\frac{2}{5}\right)$, $S_2 = g\left(\frac{2}{5}\right)$

et $S_3 = f\left(\frac{3}{5}\right)$. D'où

$$S = f\left(\frac{2}{5}\right) - g\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right).$$

On a
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-x)^n}{n} \\ &= -x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} \\ &= -x \ln(1-x) \end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

EX02

Ou aussi

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$= -x + \left(x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)$$
$$= -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$= -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-x)^n}{n}$$
$$= -x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}$$
$$= -x - \ln(1-x)$$

Alors

$$S = f\left(\frac{2}{5}\right) - g\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= -\frac{2}{5}\ln\left(1-\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5} + \ln\left(1-\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{5}\ln\left(1-\frac{3}{5}\right)$$
$$= \underbrace{-\frac{2}{5}\ln\left(\frac{3}{5}\right) + \ln\left(\frac{3}{5}\right)} - \frac{3}{5}\ln\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5}$$
$$= \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5}\ln\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5}$$
$$= \frac{3}{5}\left(\ln\left(\frac{3}{5}\right) - \ln\left(\frac{2}{5}\right)\right) + \frac{2}{5}$$
$$S = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{5}$$

Scanned with CamScanner

Serie 2

EXO3

On a $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt > 0$

1) Mq la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ CV

Tout d'abord on a $a_n > 0$, donc la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est alternée
Pour montrer que cette ~~suite~~ série est convergente, il suffit de démontre que la suite $(a_n)_n$ décroît vers 0.

On a $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt - \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$

$$= \int_0^1 \left(\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right) dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{1+t^2}{2} - 1\right)}_{\leq 0} dt$$

d'où $a_{n+1} - a_n \leq 0$ et la suite est décroissante.

Scanned with CamScanner

Série 2

EX03

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

On a $0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq t^2 \leq t$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^2+1}{2} \leq \frac{1+t}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\leq \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2^n(n+1)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

C/C La série $\sum (-1)^n a_n$ converge

2) Mq la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge

On sait que $(1-t)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+t^2}{2} \geq t$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \geq t^n \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \geq \int_0^1 t^n dt$$

Scanned with CamScanner

Série 2

Ex 03

D'où $a_n \geq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \geq 0$

or $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge

on conclut que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est divergente.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

D'après la première question, on a $R \geq 1$ et d'après la deuxième question $R \leq 1$, D'où

$$R = 1.$$

4) Mq $\sum a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt$, $\forall x \in]-1,1[$.

On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} x\right)^n dt$$

Soit $(f_n)_n$ la suite de f^{cts} définie par $f_n : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \left(\frac{1+t^2}{2} x\right)^n$

Scanned with CamScanner

Série 2

EX03

Mq $\sum f_n$ cv normalement

on a $|f_n(t)| \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n |x^n|$

$\leq |x|^n$ (ne dépend pas de t)

or $\sum |x|^n$ cv (car $|x|<1$)

Donc $\sum f_n$ converge normalement

Puis elle converge uniformément

La chose qui nous permet d'intervertir

l'intégrale et $\sum$.

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{2} x\right)^n \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{1+t^2}{2} x} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{2 - x - xt^2} dt$$

CQFD

Scanned with CamScanner

Série 2

EXO4

1) Mq R est superieur ou égal à $\frac{1}{4}$

Par recurrence montrons que

$|a_n| \leq 4^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

on a: $|a_0| = 1 \leq 4^0$

$|a_1| = 3 \leq 4^1$

Supposons que la proposition de recurrence est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n+1. On a:

$$|a_{n+1}| = |3a_n - 2a_{n-1}|$$
$$\leq 3|a_n| + 2|a_{n-1}|$$
$$\leq 3 \cdot 4^n + 2 \cdot 4^{n-1}$$
$$\leq 3 \cdot 4^n + 4^n$$
$$\leq 4^{n+1}$$

$C/c \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n| \leq 4^n$

Scanned with CamScanner

Serie 2

Ex 04

Considérons maintenant la série entière $\sum 4^n z^n$, son rayon vaut $\frac{1}{4}$

on a $|a_n| \leq 4^n$ d'où

$$R \geq \frac{1}{4}.$$

2) Mq pour tout $z \in D(0,R)$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

On a pour tout $z \in D(0,R)$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\
&= a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \\
&= 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n \\
&= 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} z^n - 2a_{n-2} z^n)
\end{aligned}$$

Puisque les deux séries $\sum_{n=2}^{+\infty} 3a_{n-1} z^n$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} (-2a_{n-2}) z^n$ sont convergentes alors

Scanned with CamScanner

Série 2

Ex 04

$$f(z) = 1 + 3z + 3z \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^{n-1} - 2z^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^{n-2}$$

$$= 1 + 3z + 3z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

(glissement d'indice)

$$\cancel{= 1 + 3(2z}$$

$$= 1 + 3z\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\right) - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$$= 1 + 3z f(z) - 2z^2 f(z)$$

$$\Rightarrow (1 - 3z + 2z^2) f(z) = 1$$

$\forall z \in D(0, R)$, on a $1 - 3z + 2z^2 \neq 0$

(sinon on obtient $0 = 0 \cdot f(z) = 1$)

On conclut que $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 3z + 1}$

3) Déduction

On a : $2z^2 - 3z + 1 = 2z(z-1) - (z-1)$

$$= (2z-1)(z-1)$$

$$= (1-2z)(1-z).$$

Scanned with CamScanner

Serie 2

Exo4

Donc

$$f(z) = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}$$

$$= \frac{\alpha}{1-2z} + \frac{\beta}{1-z}$$

$$= \frac{\alpha - \alpha z + \beta - 2\beta z}{(1-2z)(1-z)}$$

Donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (\alpha+\beta) + \beta = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \beta = -1$ et $\alpha = 2$

et $f(z) = \dfrac{2}{1-2z} - \dfrac{1}{1-z}$

Pour $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+1} z^n$

$\hookrightarrow$ série de rayon de convergence égale à 1

Pour $|2z| < 1$ i.e $|z| < \frac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$ de rayon de convergence égal à $\frac{1}{2}$

Scanned with CamScanner

Ex 04

On obtient

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ sous la forme de la somme de deux séries entières dont leurs rayons sont différents

et donc $R = \inf(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$

et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1) z^n$

et $a_n = 2^{n+1} - 1$

Vérification

$a_0 = 2^1 - 1 = 1$

$a_1 = 2^2 - 1 = 3$

Scanned with CamScanner

Série 2

Ex 05

1)

NB: On peut vérifier facilement que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$ vaut $+\infty$

On a $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

Calculons $1 + j^k + j^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$

on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists q \in \mathbb{N}$ tq

$k = 3q + r$ avec $0 \leq r \leq 2$

et $r \in \mathbb{N}$.

Les cas possibles sont

- $r = 0$
- $r = 1$
- $r = 2$

si $r = 0$, $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^{3q} + j^{6q}$

$= 1 + (j^3)^q + (j^3)^{2q}$

$= 3$

si $r = 1$, $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^{3q}) j^r + (j^{6q}) \cdot j^{2r}$

$= 1 + j + j^2$

$= 0$

si $r = 2$, $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^{3q}) j^2 + (j^{6q}) j^4$

$= 0$

Scanned with CamScanner

Exo5 Série 2

2)
$$e^{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$
$$e^{jx}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{j^{n}}{n!}x^{n}$$
$$e^{j^2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{j^{2n}}{n!}x^{n}$$

Et comme les trois séries ont le même rayon de convergence $R=+\infty$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, on a:

$$e^{x}+e^{jx}+e^{j^2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+j^{n}+j^{2n}}{n!}x^{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(3n)!}\cdot x^{3n}$$
$$=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}x^{3n}$$
$$=3\,S(x)$$

3) $S(x)=\frac{1}{3}\left(e^{x}+e^{jx}+e^{j^2x}\right)$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}=S(1)=\frac{1}{3}\left(e+e^{j}+e^{j^2}\right)$

Fin

20

Scanned with CamScanner

Université Moulay Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2019/2020
LST Maths Appl
Module M147

Travaux dirigés : Séries de Fourier
Série 3

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, paire et vérifiant

$$f(x) = x \text{ sur } [0, \pi]$$

1. Calculer la série de Fourier de f.
2. Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f.
3. Déterminer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$
4. En déduire
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{1=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ sur }]0, \pi]$$

1. Préciser la convergence de la série de Fourier de f. La convergence est-elle uniforme ?
2. Calculer la série de Fourier de f.
3. En déduire la convergence et la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$
4. Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3

Soit f une fonction réelle développable en série de Fourier. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f, ceux des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x)\cos(x) \text{ et } h(x) = f(x)\sin(x)$$

Exercice 4

Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = cos(\alpha t) \text{ sur }]-\pi, \pi]$$

1. Montrer que f admet une série de Fourier convergente sur $\mathbb{R}$. Préciser le type de convergence.
2. Expliciter les coefficients de Fourier de f.
3. Pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$, montrer l'égalité
$$\cot \text{an} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - (n\pi)^2}$$

Exercice (Facultatif)

Déterminer les fonctions 2π-périodiques solutions de l'équation différentielle

$$(E) : \ y' + \beta y = f$$

où f est une fonction 2π-périodique (dérivable) et $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Application $f(x) = cos(4x) + sin(3x)$ et $\beta = 3$.

1

Série 3 : correction d'exercices

Rappel

Définition (fonction continue par morceaux)

Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de I telle que

- f est continue sur les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$;
- f admet une limite à droite en $a = x_0, \dots, x_{n-1}$ et une limite à gauche en $x_1, \dots, x_n = b$.

Définition (fonction dérivable par morceaux)

Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable par morceau sur $I = [a,b]$ (relativement à une subdivision $x_0 < \dots < x_n$ de I) si

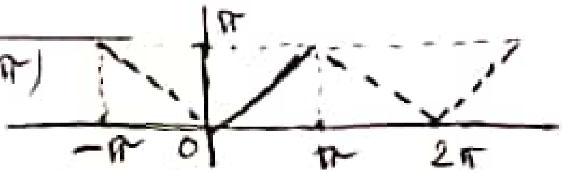
- f est continue par morceau sur I
- f est dérivable sur les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$;
- la dérivée f' admet une limite à droite en $a = x_0, \dots, x_{n-1}$ et une limite à gauche en $x_1, \dots, x_n = b$.

Définition (fonction de classe C^1 par morceaux)

Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est de classe C^1 par morceaux sur I (relativement à une subdivision $x_0 < \dots < x_n$ de I) si

- f est de classe C^1 sur les intervalles $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$;
- f et sa dérivée f' possède des limites finies à gauche et à droite en x_{k-1} et x_k, $k = 1, \dots, n$;

(f paire $\Rightarrow f(-\pi) = f(\pi) = \pi$)



Exercice 1

1. Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$

- $a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \underset{\text{(par parité)}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \pi.$

• Pour $n \geq 1$: $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

(par parité) $= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right).$

Donc $\begin{cases} a_{2k}(f) = 0, & \forall k \geq 1 \\ a_{2k+1}(f) = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}, & \forall k \geq 0. \end{cases}$

Par suite $SF(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$

2. f est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux donc d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$,

$$SF(f)(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}^{n} a_n \cos nx = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = f(x)$$

3. Pour $x = 0$, $f(0) = 0$ donc on obtient

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

La formule de Parseval donne $\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2 dx$

or $\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}^{+\infty}|a_n(f)|^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2(2k+1)^4}$

donc, $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{4\pi^2 - 3\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

3

4. D'abord $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ existe et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

De même $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ existe et on a :

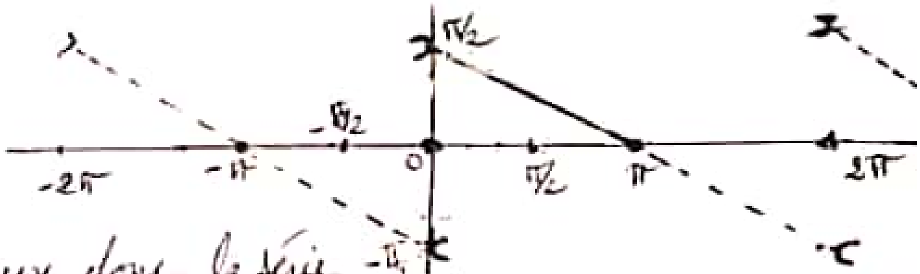
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{16}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \frac{15}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15\times 6} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 2



1. f 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux donc la série de Fourier de f converge simplement vers $f(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}$ où f est continue, et vers $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ en ses points de discontinuité.

f n'est pas continue en 0 car f est impaire donc $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x)+f(x)=0 \Rightarrow f(0)=0$ et $f(0^+)=\frac{\pi}{2}$, $f(0^-)=-\pi/2$.

donc f ne converge pas uniformément.

2. f est impaire donc $a_n(f) = 0 \ \forall n \geq 0$.

$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$, la fonction $x \mapsto f(x)\sin nx$ est paire

paire $= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\, dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\pi-x}{2}\cos nx\right] - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx$

$b_n(f) = \frac{1}{n}$ donc le développement en série de Fourier de f s'écrit $SF(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

3. f est continue en 1 donc la série de Fourier de f converge vers $f(1)$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$

4. Par la formule de Parseval on a $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)^2}{4} dx = \frac{1}{6\pi}\left[-(\pi - x)^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3

on a $g(x) = f(x)\cos x$ et $h(x) = f(x)\sin x$.

f est une fonction réelle développable en série de Fourier donc

$b_0(g) = b_0(h) = 0$, $a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx = a_1(f)$ et

$b_0(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\sin x\, dx = b_1(f)$.

$\forall n \geq 1 \quad a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x \cos nx\, dx$ or $\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

donc, $\quad a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \frac{\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)}{2}\, dx$

d'où $\quad a_n(g) = \frac{a_{n+1}(f) + a_{n-1}(f)}{2}$

$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x \sin nx\, dx$ or $\cos x \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$

donc, $\quad b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \frac{\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)}{2}\, dx$

d'où $\quad b_n(g) = \frac{b_{n+1}(f) - b_{n-1}(f)}{2}$

de même, $\forall n \geq 1$

$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x \cos nx\, dx$ or $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

donc $a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{\sin((n+1)x)+\sin((1-n)x)}{2}\,dx$

d'où $a_n(h) = \frac{b_{n+1}(f) - b_{n-1}(f)}{2}$

$b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x \sin nx\, dx$ or $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

donc $b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{\cos((n-1)x)-\cos((n+1)x)}{2}\,dx$

d'où $b_n(h) = \frac{a_{n-1}(f) - a_{n+1}(f)}{2}$

Exercice 4

1. f est 2π-périodique localement intégrable donc développable en série de Fourier.

on a $f(t+2k\pi) = f(t)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, pour $k=-1$ et $t=\pi$

$f(\pi - 2\pi) = f(\pi) \Leftrightarrow f(-\pi) = f(\pi)$.

De plus f est continue sur $]-\pi,\pi]$ $\lim_{t \to (-\pi)^+} \cos \alpha t = \cos(-\alpha\pi)$ (f est paire)

$= \cos(\alpha\pi)$

$= f(\pi) = f(-\pi)$

donc f est continue sur $[-\pi,\pi]$

$\lim_{t\to(-\pi)^+} \frac{f(t)-f(-\pi)}{t+\pi} = f'_d(-\pi) \in \mathbb{R}$ (existe).

ainsi f est continue, de classe C^1 par morceau sur $[-\pi,\pi]$ d'après le théorème de Dirichlet sa série de Fourier converge Normalement donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2. f est une fonction pair donc la fonction $x \mapsto f(t)\sin nt$ est impair d'où $b_n(f) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (par parité)

$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos \alpha t \cos nt\, dt$ intégration par partie

$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\cos \alpha t\, \frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}}_{0} + \frac{2\alpha}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin \alpha t \sin nt\, dt$ intégration par partie

$= -\frac{2\alpha}{\pi n^2}\left[\sin \alpha t \cos nt\right]_0^{\pi} + \frac{2\alpha^2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \cos \alpha t \cos nt\, dt$

Série 3

Exercice 3
Soit f une fonction réelle développable en série de Fourier. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f, ceux des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x)\cos(x) \quad \text{et} \quad h(x) = f(x)\sin(x)$$

Solution :
Pour $n = 0$, on a

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)dx = a_1(f) \quad \text{et} \quad a_0(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)dx = b_1(f)$$

Pour $n = 1$, on obtient

$$a_1(h) = b_1(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2x)dx = \frac{1}{2}b_2(f)$$

Pour $n \geq 1$, on a

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos((n+1)x)+\cos((n-1)x)) = \frac{1}{2}(a_{n+1}(f)+a_{n-1}(f))$$

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos((n-1)x)-\cos((n+1)x)) = \frac{1}{2}(a_{n-1}(f)-a_{n+1}(f))$$

et pour $n \geq 2$,

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\sin((n+1)x)+\sin((n-1)x)) = \frac{1}{2}(b_{n+1}(f)+b_{n-1}(f))$$

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\sin((n+1)x)-\sin((n-1)x)) = \frac{1}{2}(b_{n+1}(f)-b_{n-1}(f))$$

de même, $\forall n \geq 1$

$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x \cos nx \, dx$ or $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

donc $a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \frac{\sin(n+1)x + \sin((n-1)x)}{2} dx$

d'où $a_n(h) = \frac{b_{n+1}(f) - b_{n-1}(f)}{2}$

$b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x \sin nx \, dx$ or $\sin x \sin y = \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}$

donc $b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \frac{\cos(n-1)x - \cos((n+1)x)}{2} dx$

d'où $b_n(h) = \frac{a_{n-1}(f) - a_{n+1}(f)}{2}$

Exercice 4

1. f est 2π-périodique localement intégrable donc developpable en série de Fourier.

on a $f(t+2k\pi) = f(t)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, pour $k=-1$ et $t=\pi$

$f(\pi - 2\pi) = f(\pi) \iff f(-\pi) = f(\pi)$.

De plus f est continue sur $]-\pi,\pi]$ $\lim\limits_{t \to (-\pi)^+} \cos \alpha t = \cos(-\alpha\pi)$ (f est paire)

$= \cos(\alpha\pi)$

$= f(\pi) = f(-\pi)$

donc f est continue sur $[-\pi,\pi]$

$\lim\limits_{t \to (-\pi)^+} \frac{f(t) - f(-\pi)}{t+\pi} = f'_d(-\pi) \in \mathbb{R}$ (existe).

ainsi f est continue, de classe C^1 par morceau sur $[-\pi,\pi]$ d'après le théorème de Dirichlet sa série de Fourier converge Normalement donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2. f est une fonction pair donc la fonction $x \mapsto f(t)\sin nt$ est impair d'où $b_n(f) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
(par parité)

$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos \alpha t \cos nt \, dt$ integration par partie

$= \frac{2}{\pi}\left[\cos\alpha t \, \frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2\alpha}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin\alpha t \sin nt \, dt$ integration par partie

$= -\frac{2\alpha}{\pi n^2}\left[\sin\alpha t \cos nt\right]_0^{\pi} + \frac{2\alpha^2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \cos\alpha t \cos nt \, dt$

$$a_n(f) = \frac{2\alpha(-1)^{n-1}}{\pi n^2}\sin\alpha\pi + \frac{\alpha^2}{n^2}a_n(f) \qquad (\cos n\pi = (-1)^n \ \forall n\in\mathbb{N})$$

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)a_n(f) = (-1)^{n-1}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi n^2}$$

donc, $a_n(f) = (-1)^{n-1}\dfrac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$

pour $n=0$ $\quad a_0(f) = \dfrac{2\sin\alpha\pi}{\pi\alpha}$

3. La Série de Fourier de f, $SF(f)$ converge uniformément donc converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. D'où

$$\forall t\in\mathbb{R} : f(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}\cos(nt)$$

pour $t=\pi$, on a

$$\cos\alpha\pi = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}.$$

$$\frac{\cos\alpha\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\alpha\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\pi(n^2-\alpha^2)}$$

$$\operatorname{Cotan}\alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha\pi}{(\alpha\pi)^2-(n\pi)^2}$$

Posons $x=\alpha\pi$, puisque $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ donc $\alpha\pi\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ donc $x\notin\pi\mathbb{Z}$ et on a

$$\operatorname{Cotan} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-(n\pi)^2}$$

Exercice 5

La fonction f est dérivable donc continue et par suite localement intégrable et comme elle est 2π-périodique donc développable en série de Fourier. Ainsi la solution y de l'équation différentielle $(E): y'+\beta y = f$ $(\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$ s'écrit $y(x) = \dfrac{a_0(y)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(y)\cos nx + b_n(y)\sin nx)$.

on a $y(x) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(y)\cos nx + b_n(y)\sin nx\right)$ $\boxed{7}$

donc $\beta y(x) = \frac{\beta a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\beta a_n(y)\cos nx + \beta b_n(y)\sin nx\right)$.

et $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-n a_n(y)\sin nx + n b_n(y)\cos nx\right)$.

De l'équation (E), on obtient

$a_0(f) = a_0(y)\beta \Rightarrow a_0(y) = \frac{a_0(f)}{\beta}$

et $\begin{cases} -n a_n(y) + \beta b_n(y) = b_n(f) \\ n b_n(y) + \beta a_n(y) = a_n(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta n a_n(y) + \beta^2 b_n(y) = \beta b_n(f) & (1) \\ n^2 b_n(y) + n\beta a_n(y) = n a_n(f) & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 b_n(y) + n^2 b_n(y) = \beta b_n(f) + n a_n(f) & (1)+(2) \\ n^2 b_n(y) + n\beta a_n(y) = n a_n(f) & (2) \end{cases}$

d'où

$(1)+(2) \Rightarrow \boxed{b_n(y) = \frac{\beta b_n(f) + n a_n(f)}{\beta^2 + n^2}}$

$(2) \Rightarrow n b_n(y) + \beta a_n(y) = a_n(f)$

$\Rightarrow \beta a_n(y) = a_n(f) - n b_n(f)$

$\Rightarrow \beta a_n(y) = a_n(f) - n \frac{\beta b_n(f) + n a_n(f)}{\beta^2 + n^2}$

$\Rightarrow a_n(y) = \frac{\beta^2 a_n(f) + \cancel{n^2 a_n(f)} - n\beta b_n(f) - \cancel{n^2 a_n(f)}}{\beta(\beta^2 + n^2)}$

$\Rightarrow a_n(y) = \frac{\beta(\beta a_n(f) - n b_n(f))}{\beta(\beta^2 + n^2)}$

$\Rightarrow \boxed{a_n(y) = \frac{\beta a_n(f) - n b_n(f)}{\beta^2 + n^2}}$

Application : $f(x) = \cos 4x + \sin 3x$ et $\beta = 3$

on a $a(f) = 0 \Rightarrow a_0(y) = 0$ et $a_1(f) = a_2(f) = a_3(f) = 0$.

$b_1(f) = b_2(f) = b_4(f) = 0$ et $a_4(f) = b_3(f) = 1$.

$\forall\ n \geq 5,\ a_n(f) = b_n(f) = 0$.

donc $a_1(y) = a_2(y) = 0$

pour $n = 3$

$$a_3(y) = \frac{\beta \times a_3(f) - 3 b_3(f)}{\beta^2 + 3^2} = \frac{3\times 0 - 3\times 1}{3^2 + 3^2} = \frac{-3}{2\times 3^2} = \frac{-1}{6}$$

$$b_3(y) = \frac{\beta b_3(f) + 3 a_3(f)}{\beta^2 + 3^2} = \frac{3\times 1 + 3\times 0}{3^2+3^2} = \frac{3}{2\times 3^2} = \frac{1}{6}$$

pour $n = 4$

$$a_4(y) = \frac{\beta a_4(f) - 4 b_4(f)}{\beta^2 + 4^2} = \frac{3\times 1 - 4\times 0}{9 + 16} = \frac{3}{25}$$

$$b_4(y) = \frac{\beta b_4(f) + 4 a_4(f)}{3^2 + 4^2} = \frac{3\times 0 + 4\times 1}{9+16} = \frac{4}{25}$$

et $\forall n \geq 5\ a_n(y) = b_n(y) = 0$

donc

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{3}{25}\cos 4x + \frac{4}{25}\sin 4x}$$

Université Moulay Ismail

F. S. T. Errachidia

Département de Mathématiques

A. U. 2018/2019

LST Maths Appl

Module M147

Travaux dirigés : Calcul de résidus

Exercice 1 *1. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x^2 + ixy^3$. Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que $f_{|U}$ est holomorphe ?*

2. Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Si $z = x + iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = \ln|z| + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
Montrer que f est holomorphe sur U.

Exercice 2 *1. Calculer par la formule intégrale de Cauchy :*

$$\int_C \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z.$$

où C est le cercle unité $|z| = 1$ parcouru dans le sens direct.

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sin\theta)\, e^{\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

Exercice 3 *Soit f la fonction définie par*

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$

1. Déterminer les pôles de f avec leur ordre de multiplicité.

2. Calculer $Res(f, \frac{i\pi}{2})$.

3. Soient R un réel strictement positif et $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R$, R, $R+i\pi$ et $-R+i\pi$ orienté dans le sens positif. On notera également $\gamma_1(R)$ le segment orienté de $-R$ à R, $\gamma_2(R)$ le segment orienté de R à $R+i\pi$, $\gamma_3(R)$ le segment orienté de $R+i\pi$ à $-R+i\pi$ et $\gamma_4(R)$ le segment orienté de $-R+i\pi$ à $-R$.

(a) Justifier que $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2(R)} f(z)\mathrm{d}z = 0$

(b) Justifier que $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4(R)} f(z)\mathrm{d}z = 0$

(c) Exprimer $\int_{\gamma_3(R)} f(z)\mathrm{d}z$ en fonction de $\int_{\gamma_1(R)} f(z)\mathrm{d}z$

(d) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x$

Exercice 4 *Soit Γ_R le conteur défini par le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamétre $[-R, R]$ parcouru dans le sens direct, avec $R > 1$.*

1. Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z$.

2. En déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}.$$

3. Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Serie 4

Conditions de Cauchy-Riemann

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Ecrivant un nombre complexe z sous la forme $z = x+iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. f peut être vue comme une fonction de deux variables, qu'on écrit $f(x,y) = P(x,y) + i\varphi(x,y)$. Supposons que f soit différentiable en $z_0 = (x_0, y_0)$, comme fonction de deux varibles. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit holomorphe en z_0 est que les équations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Ex01

1)
$z = x + iy$

$f(z) = x^2 + ixy^3$

f holomorphe en z ssi f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann avec $P(x,y) = x^2$ et $Q(x,y) = xy^3$

on a . $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$,

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y^3$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 3xy^2$

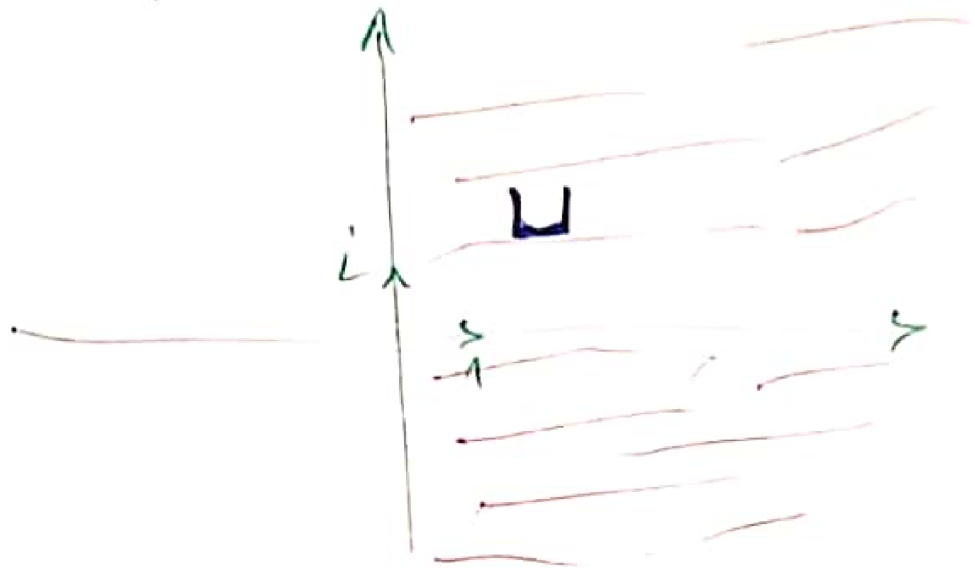
Donc f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en z ssi $z = 0$ et puisque $\{0\}$ ne contient aucun ouvert de $\mathbb{C}$, alors il n'existe aucun ouvert U de $\mathbb{C}$ tq $f/_U$ est holomorphe

Serie 4

Exo 1

1)

$U = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) > 0 \}$



$$f(z) = \ln(|z|) + i \,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$= \ln\left((x^2+y^2)^{1/2}\right) + i \,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Donc $P(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$\varphi(x,y) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{(y/x)'_x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y/x^2}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$$
$$= -\frac{y}{x^2+y^2}$$

EXO1

2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{(y/x)'_y}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1/x}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

On voit facilement que les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées sur U ainsi que f est holomorphe sur U.

EXO2

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow e^z \end{array}$

f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et C est un chemin fermé orienté positivement, alors d'après la formule intégrale de Cauchy on obtient

$$\int_C \frac{f(z)}{z-0}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i$$

Exo 2

2) Déduction

$$\int_C \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i$$

Sur C on a $z = e^{i\theta}$ où $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow \frac{dz}{z} = i\,d\theta.$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{e^z}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} i\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{(\cos\theta + i\sin\theta)}\, d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\, e^{i\sin\theta}\, d\theta.$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\left(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\right)d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin(\theta))\,d\theta - \int_0^{2\pi} \sin(\sin(\theta))\,e^{\cos\theta}\,d\theta$$

et par identification, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sin(\theta))\, e^{\cos(\theta)}\, d\theta = 2\pi.$$

Série 4

Exercice 3 Solution :

1. *Ecrivons $z = a + ib$ de sorte que $e^{2z} = e^{2a}e^{2ib}$. Prenons le module. On obtient $e^{2a} = 1$ et donc $a = 0$. On a ensuite $e^{2ib} = -1 = e^{i\pi}$ dont les solutions sont $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{i\frac{\pi}{2} + ik\pi\}$. Puisque $e^z + e^{-z} = 0$ si et seulement si $e^{2z} = -1$, donc les pôles de f sont $\{i\frac{\pi}{2} + ik\pi\}$ qui sont des pôles simples.*

2. *Posons $h(z) = e^{iz}$ et $g(z) = e^z + e^{-z}$. Alors*

$$Res(f, \frac{i\pi}{2}) = \frac{h(\frac{i\pi}{2})}{g'(\frac{i\pi}{2})} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i} = -i\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

3. (a) *On a*

$$\int_{\gamma_2(R)} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{ie^{iR-t}}{e^{R+it} + e^{-R-it}}dt = ie^{iR}\int_0^\pi \frac{e^{-t}}{e^Re^{it} + e^{-R}e^{-it}}dt$$

On majore en utilisant l'inégalit triangulaire

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_2(R)} f(z)dz\right| &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{e^R - e^{-R}}dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{1}{e^R - e^{-R}}dt \\ &\leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient le résultat demandé.

(b) *De la même manière que la question précédente.*

(c) *On a*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3(R)} f(z)dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}}dx \\ &= \int_{R}^{-R} \frac{e^{-\pi}e^{ix}}{-e^x - e^{-x}}dx \\ &= e^{-\pi}\int_{\gamma_1(R)} f(z)dz \end{aligned}$$

(d) *On a*

$$\int_{\Gamma(R)} f(z)dz = (1 + e^{-\pi})\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}}dx + \int_{\gamma_2(R)} f(z)dz + \int_{\gamma_4(R)} f(z)dz$$

Faisant tendre R vers $+\infty$ en utilisant les questions précédentes, on a

$$\pi e^{-\frac{\pi}{2}} = (1 + e^{-\pi})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}}dx$$

On en déduit que

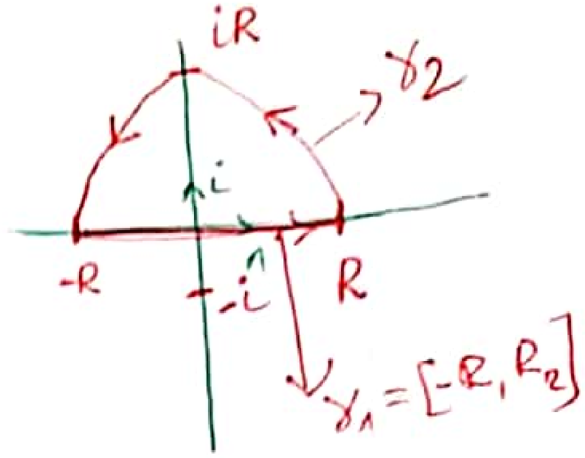
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}}dx = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

Prenant la partie réelle de cette égalité, on obtient le résultat demandé.

Série 4

Exo 4

1] Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$



On a :

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

Donc

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_R}\left(\frac{e^{iz}}{z-i} - \frac{e^{iz}}{z+i}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z+i}dz$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z-i}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z+i}dz\right)$$

$$= \pi e^{i(i)} - 0$$ (-i se trouve à l'exterieur du chemin)

$$= \frac{\pi}{e}$$

Déduction de la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

Exo 4

2) On a

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

or $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx \quad (z=x)$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$$

et $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta \quad (z=Re^{i\theta})$

$$= iR\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}e^{i\theta}d\theta$$

Passons à la norme

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\right| = R\left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}e^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\leq R\int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1}d\theta$$

$$\leq \frac{R\pi}{R^2-1} \xrightarrow[\text{qd } R\to+\infty]{} 0$$

Série 4

EX04

2) D'où $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz=0$, Alors

$$\frac{\pi}{e}=\int_{H_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

$$=\int_{-R}^{R}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx+\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx+\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx.$$

3) Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$$

Considerons la fonction suivante :

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$z\longrightarrow\frac{1}{1+z^4}$$

Déterminons les pôles de f

z pôles de f ssi z racine de polynôme $1+z^4$

Exo 4

3) On a : $z^4+1=0$ ssi $z^4=-1$

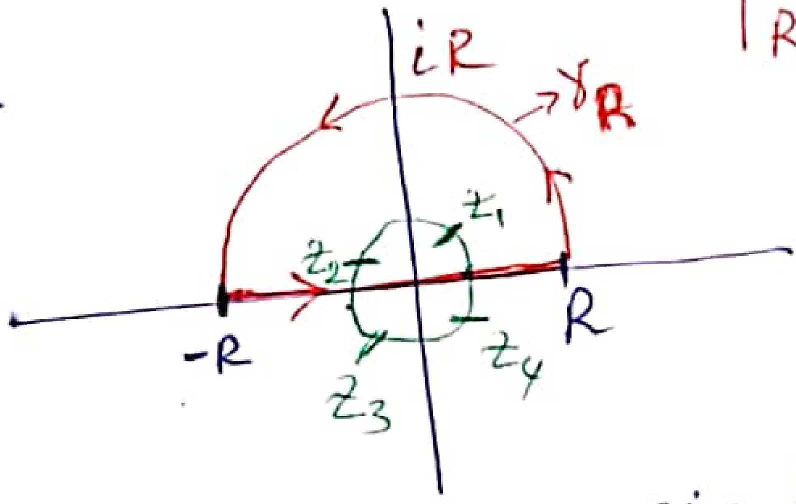
ssi $z^4=e^{i\pi+i2k\pi}$

ssi $z=e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{k\pi}{2}}$

Alors les pôles de f sont $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}$ sont tous des pôles simples et considérons le chemin suivant

$\Gamma_R=[-R,R]\cup\gamma_R$

$R>1$



c'est un chemin orienté positif et contient deux pôles z_1 et z_2

D'après le Théorème des résidus on a

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(Res(f,z_1)+Res(f,z_2)\right)$$

EXO4

3) Posons $h(z) = 1$ et $g(z) = 1 + z^4$

alors $\operatorname{Res}(f, z_1) = \dfrac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \dfrac{1}{4 z_1^3}$

$$= \frac{z_1}{-4}$$

De même $\operatorname{Res}(f, z_2) = \dfrac{z_2}{-4}$

et $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \, \frac{z_1 + z_2}{-4}$

$$= 2\pi i \, \frac{\cancel{2} i \sin(\frac{\pi}{4})}{-\cancel{4}}$$

$$= -\pi \sin(\tfrac{\pi}{4}) = + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

on a aussi

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz$$

Car sur $[-R, R]$ on a $z = x$.

Série 4

Ex 04

On a $\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^4 e^{i4\theta}}\, iRe^{i\theta}\,d\theta$$

$$\begin{pmatrix} z = Re^{i\theta} \\ dz = iRe^{i\theta}\,d\theta \end{pmatrix}$$

Passons à la norme

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = R\left|\int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{1+R^4 e^{i4\theta}}\,d\theta\right|$$

$$\leq R\int_0^{\pi} \frac{1}{R^4-1}\,d\theta$$

$$\leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{cq d} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

Donc $\frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

12

Fin