Séries Mumériques

Vendredi 27 mars 2020

1 Séries numériques réelles ou complexes

1.1 Définitions et propriétés

Dans tout ce chaptre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1.1 *On appelle série numérique de terme général* $u_n(\ u_n \in \mathbb{K})$ *qu'on note* $\sum_n u_n$, *la suite* $(S_n)_n$ *donnée par:* $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Le réel S_n *est appelé la somme partielle d'ordre* n *de la série.*

Étudier la convergence de cette série c'est voir si la suite $(S_n)_n$ *converge ou non. Nous dirons respectivement que* $\sum_n u_n$ *est convergente ou divergente.*

Si $(S_n)_n$ *converge dans* $\mathbb{K}$ *vers* l *alors on écrira* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l$.

Dans le cas où $(S_n)_n$ converge vers l, le reste d'ordre N: $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ converge vers zéro, puisque $R_N = l - S_N$

Exemple 1.1 La série numérique de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est convergente avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$.

Ici $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \frac{3}{2} \longrightarrow 0$ si $n \to +\infty$
.

Théorème 1.1 *Si la série* $\sum_n u_n$ *est convergente alors son terme général tend vers zéro.*

La réciproque est en général fausse.

Preuve. $(S_n)_n$ converge si et seulement si, elle est de Cauchy, **ce qui implique** $\lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$, Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La réciproque n'est pas toujours vraie:
$\star$ On a bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. En effet,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+n} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-2} + ... + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \\ &\geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} \\ &\geqslant n \times \frac{1}{2n} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

montre que $(S_n)_n$ ne peut pas être de Cauchy, donc elle ne peut pas converger et la dérie $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente même si son terme général tend vers zéro.

■

Théorème 1.2 *Si* $z \in \mathbb{K}$ *est tel que* $|z| < 1$ *alors la série numérique* $\sum_n z^n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Preuve. Il évident que $(1-z)\left(1 + z + z^2 + ... + z^N\right) = 1 - z^{N+1}$, donc

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z}$$

qui tend bien vers $\dfrac{1}{1-z}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\blacksquare$

Définition 1.2 *Une série télescopique est une série numrique $\sum_n u_n$ telle qu'il existe une suite numérique $(a_n)_n$ vérifiant pour tout n, $u_n = a_{n+1} - a_n$.*

Il est claire que

Proposition 1.1 *cette série télescopique est convrgente si, et seulement si, $(a_n)_n$ converge et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n) - a_0$.*

Preuve. $S_N = a_{N+1} - a_0$.

$\blacksquare$

Théorème 1.3 *Si deux séries numériques $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent alors pour tout scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ la série $\sum_n (\alpha u_n + \beta v_n)$ et convergente avec*

$$\sum_n (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_n u_n + \beta \sum_n v_n$$

.

Preuve. Si les sommes partielles d'ordre n de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et de $\sum_n (\alpha u_n + \beta v_n)$ sont respectivement S_N ,S'_N et S''_N alors les suites (S_N) et (S'_N) convergent vers des scalaires S et S' de plus $S''_N = \alpha S_N + \beta S'_N$. La linéarité de la limite permet de conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty} S''_N = \alpha S + \beta S'$.

$\blacksquare$

Théorème 1.4 *Soit $\sum_n a_n + ib_n$ avec (a_n) et (b_n) deux suites de nomres réels. Alors les séries numériques réelles $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ convergent si et* *seulement si la série numérique complexe* $\sum_n (a_n + ib_n)$ *converge. Dans ce cas* $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

La preuve est évidente et identique à la précédente.

Ce résultat permet de ramener l'étude des séries complexes à celle des séries réelles, la raison pour laquelle on ne considérera par la suite que les séries réelles.

1.2 Séries réelles à termes positifs

Définition 1.3 *On dit qu'une série numérique* $\sum_n a_n$ *est à termes positifs si pour tout* $n \geqslant 0$, a_n *est un réel positif.*

Remarque 1.1 la suite (S_n) des sommes partielles d'une série à termes positifs est évidement croissante, donc elle converge si et seulement si, elle est majorée. Cette remarque nous permet d'énoncer

Proposition 1.2 *Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries numériques à termes positifs telles qu'il existe un rang* $n_0 \geqslant 0$ *vérifiant* $u_n \geqslant v_n$, *pour tout* $n \geqslant n_0$. *Alors:*

(i) $\sum_n u_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_n v_n$ *converge.*

(ii) $\sum_n v_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum_n u_n$ *diverge.*

Définition 1.4 *Une série umérique* $\sum_n u_n$ *est dite absolument convergente si la série à terme positifs* $\sum_n |u_n|$ *est convrtgente.*

Exemple 1.2 La série numérique $\sum_n \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{2^n}$ est absolument convergente.

Proposition 1.3 *Toute série numérique* $\sum_n u_n$ *absolument convergente est convergente avec:*

$$|\sum_n u_n| \leqslant \sum_n |u_n|$$

La récipeoque est en général fausse.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a;

$u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$ et $0 \leqslant (|u_n| - u_n) \leqslant |u_n|$. Donc la série $\sum_n (|u_n| - u_n)$ converge et par suite $\sum_n u_n = \sum_n [|u_n| - (|u_n| - u_n)]$ converge. Par ailleurs

$$\left|\sum_{n=0}^{n=N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{n=N} |u_n|$$

Par passage à la limite on aura

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

■

2 Critères de convergence

Théorème 2.1 ***(Règle des équivalences:)*** *Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries numériques à termes positifs telles que* $u_n \sim v_n$ *(ie. ces deux termes sont équivalents). Alors ces deux séries numériques sont de même nature:* $\sum_n u_n$ *converge si et selement si,* $\sum_n v_n$ *converge.*

Preuve. Puisque $\forall n \geqslant 0$, $u_n \sim v_n$ donc ilexiste une suite réelle (e_n) qui converge vers zéro telle que $u_n = v_n (1 + e_n)$. D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geqslant 0 : n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leqslant e_n \leqslant \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$. tout $n \geqslant N_{\frac{1}{2}}$ satisfait $-\frac{1}{2} \leqslant e_n \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $1 - \frac{1}{2} \leqslant 1 + e_n \leqslant 1 + \frac{1}{2}$ et comee $0 \leqslant v_n$ donc $\frac{1}{2} v_n \leqslant v_n (1 + e_n) \leqslant \frac{3}{2} v_n$ qui n'est rien d'autre que;

$\frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$. Il suffit alors d'appliquer la Proposition.1.2. pour conclure. ∎

Théorème 2.2 ***(Règle des séries de Riemann:)*** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

(ii) Le nombre α est supérieur strictement à un (ie. $\alpha > 1$)

Preuve. Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_{n,\beta} = \dfrac{1}{n^\beta} - \dfrac{1}{(n+1)^\beta}$. Il est facile de voir que $\displaystyle\sum_n u_{n,\beta}$ est une série numérique altérnée de somme partielle $S_{N,\beta} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^\beta}$ convrtgenye si et seulement si, $\beta \geqslant 0$.

Par ailleurs, si $\frac{1}{n} \sim 0$, alors le développent limité de ln et exp donne

$$\begin{aligned}
u_{n,\beta} &= \frac{1}{n^\beta}\left[1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right] \\
&= \frac{1}{n^\beta}\left[1 - \exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^\beta}\left[1 - \exp -\beta\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^\beta}\left[1 - \exp -\beta\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^\beta}\left[1 - \exp\left(\frac{-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^\beta}\left[1 - \left(1 + \frac{-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^\beta}\left[\frac{-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{\beta}{n^{\beta+1}} + \frac{1}{n^\beta} \times o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi pour $\frac{1}{n} \sim 0$ on aura, $u_{n,\beta} \sim \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$

Soit maintenant $\alpha \neq 1$ alors pour $(\beta = \alpha - 1)$ on a

$$\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{\alpha - 1}{n^{\alpha-1+1}} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \times u_{n,\alpha-1}$$

donc d'après ce qui précède pour $\alpha \neq 1$,

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n \geqslant 1} u_{n,\alpha-1} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Pour $\alpha = 1$ on a déjà montré que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. D'où le théorème.

■

Théorème 2.3 ***(Règle des séries des*** n^α***)*** *Soit* $\sum_n u_n$ *une série de nombres réels. Si il existe un réel* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim_{n \to +\infty} (n^\alpha u_n) = 0$ *alurs la série* $\sum_n u_n$ *est absolument convergente.*

Preuve. Écrivons la définition de $\lim_{n \to +\infty} (n^\alpha u_n) = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon : n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |n^\alpha u_n| \leqslant \varepsilon$$

donc pour $\varepsilon = 1$

$$\exists N_1 : n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

D'après la règle des séries de Riemann, $\sum_{n \geqslant N_1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. D'après (i)proposition 1.2. $\sum_{n \geqslant N_1} |u_n|$ est convergente et par suite $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ (Lorsqu'on ajoute ou on retranche un nombre fini de termes la nature de la série ne change pas).

■

Théorème 2.4 ***(Règle d' Alember):*** *Soit* $\sum_n u_n$ *série réelle telle que :*

(i) Il existe un entier $N_0 \geqslant 0$ *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$, $u_n \neq 0$

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = K$.

Alors:

- $K < 1 \Rightarrow \sum_n |u_n|$ *converge.*
- $K > 1 \Rightarrow \sum_n |u_n|$ *diverge.*
- *Si* $K = 1$ *on ne peut rien en conclure.*

Preuve. Écrivons la définition de la limite, de l'hypothèse (ii),

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 \geqslant N_0 : n \geqslant N_1 \quad &\Rightarrow \quad \left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - K\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad K - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < K + \varepsilon \qquad (2.1)\end{aligned}$$

• Cas où $0 \leqslant K < 1$,: Soient $K < K_1 < 1$ et $\varepsilon = K_1 - K > 0$, d'après (2.1) il existe un rang $N_1 \geqslant N_0$ tel que tout $n \geqslant N_1$ vérifie

$$|u_{n+1}| < |u_n|\,(K + \varepsilon) = K_1|u_n|$$

donc

$$|u_{n+1}| < K_1|u_n| < K_1^2|u_{n-1}| < K_1^3|u_{n-2}| < \ldots < K_1^{n-N_1+1}|u_{n-(n-N_1)}|$$

Ainsi pour tout $n \geqslant N_1$

$$|u_{n+1}| \leqslant K_1^{n-N_1+1}|u_{N_1}|$$

Si $\varrho = K_1^{-N_1}|u_{N_1}|$ alors tous les entiers $n \geqslant N_1$ satisfont $|u_n| \leqslant \varrho K_1^n$. D'autre part $\sum_{n\geqslant N_1} K_1^n$ converge (car $0 < K_1 < 1$) et $\varrho > 0$ donc $\sum_{n\geqslant N_1} \varrho K_1^n$ est convergente ce qui implique $\sum_{n\geqslant N_1} |u_n|$ est convergente. D'où $\sum_n |u_n|$ est convergente.

• Cas où $1 < K \leqslant +\infty$ On applique le même raisonnement que précédemment, la première inégalité de (2.1) pour $\varepsilon = K_1 - K$ avec $1 < K_1 < K$ nous informe que pour tout $n \geqslant N_1$

$$|u_n| \geqslant \varrho K_1^n \;\text{ où } \varrho = K_1^{-N_1} = cte$$

De $1 < K_1 \in \mathbb{R}$ on conclut que $\sum_n |u_n|$ diverge.

• Cas où $1 < K = 1$ on a pour $n \geqslant 1$; $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$vérifient bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| = 1$. tandisque $\sum\limits_n |u_n|$ diverge et $\sum\limits_n |v_n|$ converge. . ■

Théorème 2.5 ***(Critère de Cauchy):*** *Si une série numérique* $\sum\limits_n u_n$ *vérifie*

$\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = K \in [0, 1[$.

Alors $\sum\limits_n |u_n|$ *converge*

Preuve. On considère $K_1 \in \mathbb{R}$ tel que $K < K_1 < 1$. Pour $\varepsilon = K_1 - K > 0$, il existe $N \geqslant 0$ tel que

$$n \geqslant N \Rightarrow \left||u_n|^{\frac{1}{n}} - K\right| < K_1 - K$$

donc

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n|^{\frac{1}{n}} < K_1$$

Par conséquence,

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n| < K_1^n$$

et comme $\sum\limits_{n\geqslant N} K_1^n$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant N} |u_n|$ et $\sum\limits_n |u_n|$ convergent.

■

2.1 Séries réelles alternées

Définition 2.1 *Une série réelle de terme général* u_n *est alternée si* $(-1)^n u_n$ *garde un signe constant, c'est-à-dire*

$$(-1)^n u_n \geqslant 0, \forall n \geqslant 0 \,ou\, bien\, (-1)^n u_n \leqslant 0, \forall n \geqslant 0$$

.

Un exemple est $\sum\limits_n \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 2.6 ***(Critère des séris alternées:)*** *Si une série alternée* $\sum_n u_n$ *vérifie les deux conditions suivantes:*

1) $(|u_n|)_n$ *est décroissante .*

2) $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$

alors elle est convergente. En plus sa somme L *est du signe de* u_0 *avec*

$$\forall N \geqslant 0, |R_N| := \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_{N+1}|$$

Preuve. Quitte à remplacer $\sum_n u_n$ par $\sum_n(-u_n)$ on peut supposer que $u_0 \geqslant 0$ ce qui impliquera que $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$ $\forall n \geqslant 0$.

Notons $S_N = u_0+u_1+u_2+...+u_N$, on va montrer que les suites $(S_{2N})_{N\geqslant 0}$ et $(S_{2N+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. En effet

$$\begin{aligned} S_{2(N+1)} - S_{2N} &= u_{2(N+1)} + u_{2N+1} \\ &= |u_{2(N+1)}| - |u_{2N+1}| \\ &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

de même

$$\begin{aligned} S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} &= u_{2N+3} + u_{2N+2} \\ &= |u_{2N+2}| - |u_{2N+3}| \\ &\leqslant 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned} S_{2N+1} - S_{2N} &= u_{2(N+1)} \\ &\geqslant 0 \text{ et tend vers zéro} \end{aligned} \tag{2.4}$$

La combinaison de (2.2), (2.3) et (2.4) prouve ce qu'on suggéré. Donc ces deux suites convergent vers la même limite $L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ il existe alors $N_1 \geqslant 0$ et $N_2 \geqslant 0$ tels que

$$N \geqslant N_1 \Rightarrow |S_{2N+1} - L| < \varepsilon$$

et

$$N \geqslant N_2 \Rightarrow |S_{2N} - L| < \varepsilon$$

Ainsi pour $N_3 = \max\{2N_1 + 1, 2N_2\}$

$$N \geqslant N_3 \Rightarrow |S_N - L| < \varepsilon$$

ce qui prouve que la série numérique $\sum_n u_n$ est convergente. Par ailleurs, pour tout $N \geqslant 0$ ona:

$$0 \leqslant S_1 \leqslant S_{2N+1} \leqslant L \leqslant S_{2(N+1)} \leqslant S_{2N} \leqslant S_0$$

ce qui prouve que $0 \leqslant L$ donc L est du signe de u_0 et
$\star$ $|R_{2N+1}| = L - S_{2N+1} \leqslant S_{2(N+1)} - S_{2N+1} = u_{2(N+1)} = \left|u_{2(N+1)}\right| = \left|u_{(2N+1)+1}\right|$
$\star$ $|R_{2N}| = S_{2N} - L \leqslant S_{2N} - S_{2N+1} = -u_{2N+1} = |u_{2N+1}|$.

Ce qui achève la démonstration.

■

Définition 2.2 *Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques. Leur produit de Cauchy est la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ telle que*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + ... + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{n-k}$$

Théorème 2.7 *Le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes est aussi absolument convergent et:*

$$\sum_{n=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{n-k}\right] = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right]\left[\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right]$$

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_n$ et $V_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_n$ puis

$$W_n = \sum_{i=0}^{i=n} w_n = \sum_{i=0}^{i=n}\left(\sum_{j=0}^{j=i} u_j v_{i-j}\right) = \sum_{0\leqslant k,l\leqslant n; k+l=n} u_k v_l$$

Enfin, puisque les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument et donc convergent, on pose $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

$\divideontimes$ On effectue d'abord la démonstration dans le cas particulier où les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont à termes positifs auquel cas dire que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument équivaut à dire que ces séries convergent. On note par $\mathbb{I}_n$ l'ensemble $\mathbb{I}_n = \{0, 1, 2, ...n\}$.

$U_n V_n = \sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} u_k v_l$. Soient alors k et l deux entiers naturels.

$$(k,l) \in \mathbb{I}_n^2 \Rightarrow 0 \leqslant k + l \leqslant 2n \Rightarrow (k,l) \in \mathbb{I}_{2n}^2$$

et donc $\mathbb{I}_n^2 \subset \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 : k + l \leqslant 2n\} \subset \mathbb{I}_{2n}$.

Puisque tous les termes considérés sont positifs, on en déduit que

$$\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} u_k v_l \leqslant \sum_{0\leqslant k+l\leqslant 2n} u_k v_l \leqslant \sum_{0\leqslant k,l\leqslant 2n} u_k v_l$$

En d'autre termes

$$U_n \times V_n \leqslant W_{2n} \leqslant U_{2n} \times V_{2n} \tag{2.5}$$

Par hypothèse, la suite (U_n) converge vers U et la suite (V_n) converge vers V. Ainsi, les suites extraites (U_{2n}) et (V_{2n}) convergent vers U et V respectivement, de sorte que les membres extrèmes de l ' encadrement (2.5) convergent tous les deux vers $U \times V$. (2.5) implique que (W_{2n}) converge vers $U \times V$. D'autre part tous les termes w_n sont positifs, donc la suite (W_n) est croissante donc

$$W_{2n} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n+2} \tag{2.6}$$

La convergence de la suite (W_{2n}) vers $U \times V$ et (2.6) permettent de conclure que (W_{2n+1}) converge vers $U \times V$.

En résumé, les deux suites extraites (W_{2n}) et (W_{2n+1}) convergent et ont même limite $U \times V$. Donc la suite (W_n) converge vers $U \times V$ et le théorème est démontré dans le cas des séries à termes positifs.

⋇ Dans le cas où les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont à termes quelconques et absolument convergentes, pour tout $n \geqslant 0$ posons $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$, $w'_n = \sum_{k+l=n} u'_k v'_l$, $U'_n = \sum_{i=0}^{i=n} v'_n$ $V'_n = \sum_{i=0}^{i=n} v'_n$ puis $W'_n = \sum_{i=0}^{i=n} w'_n$. Pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
|U_nV_n - W_n| &= \left|\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n;k+l>n} u_k v_l\right| \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant k,l\leqslant n;k+l>n} |u_k|\,|v_l| \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant k,l\leqslant n;k+l>n} u'_k v'_l \\
&= U'_nV'_n - W'_n \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Du cas précédent on conclut que $\lim_{n\to+\infty} (U'_nV'_n - W'_n) = 0$ et (2.7) montre que $\lim_{n\to+\infty} (U_nV_n - W_n) = 0$. On en déduite que la suite (W_n) converge et a pour limite UV.

■