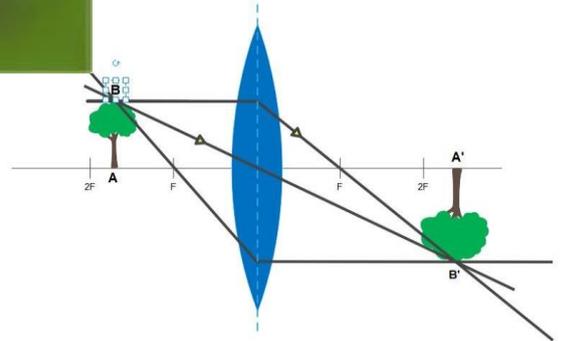




جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL



كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES



Optique géométrique

Pr. H. BOUGHALEB

Edition 2025

Page vierge

Table des matières

Chapitre 1	<i>Lois de l'optique géométrique, réflexion et réfraction</i>	1
Chapitre 2	<i>Formation d'images, stigmatisme, aplanétisme et approximation de Gauss</i>	17
Chapitre 3	<i>Miroirs et dioptries</i>	29
Chapitre 4	<i>Lentilles minces</i>	67
Chapitre 5	<i>Vision et instruments optiques</i>	89
Annexe A	<i>Spectre électromagnétique</i>	101

PAGE VIERGE

Chapitre 1

Lois de l'optique géométrique : réflexion et réfraction

- ✚ Le mot **optique** vient du grec « *optikos* » qui signifie « *relatif à la vue* ».
- ✚ L'optique désigne la branche de la physique qui étudie les phénomènes de la **vision** et du comportement de la **lumière** dans son milieu environnant.
- ✚ L'optique géométrique est une sous-branche de l'optique qui considère que la lumière se propage selon un modèle dit des « **rayons lumineux** », en négligeant les phénomènes d'interférence ou de diffraction.

1. Bases de l'optique géométrique

1.1. La Lumière qu'on voit

- Selon le *modèle ondulatoire*, la lumière est considérée comme une superposition d'ondes électromagnétiques de différentes longueurs d'onde.
- Dans un milieu donné, une onde électromagnétique **monochromatique** est caractérisée par les grandeurs :
 - ✓ **fréquence** (f) définit comme le nombre de cycles (oscillations complètes) par unité de temps. Son unité est *hertz* (Hz), $1 \text{ Hz} = 1 \text{ cycle par seconde}$.
 - ✓ **longueur d'onde** (λ) définit comme la distance entre deux « crêtes », ou « creux », consécutifs le long de l'onde périodique. Son unité est *mètre* (m). Néanmoins, pour des raisons pratiques on utilise souvent des sous-unités du mètre telles le *micromètre* ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) ou encore le *nanomètre* ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) ; voir Annexe A (Tableau A2).
 - ✓ **vitesse de propagation** (v) où $v = \lambda \times f$.

➤ Lors de la propagation d'une onde électromagnétique **monochromatique** dans différents milieux, sa **fréquence** f reste **inchangée** (sa fréquence est fixée par la source émettrice) : seules sa longueur d'onde λ et sa vitesse de propagation v varient, tout en observant bien sûr la relation $v = \lambda \times f$.

- La lumière **visible** du spectre électromagnétique (voir *Annexe A* pour plus de détails) désigne les radiations dont les longueurs d'onde dans le **vide** sont situées entre : 400 nm (0.4 μm) et ~ 800 nm (0.8 μm) : $400 \text{ nm} < \lambda_{\text{visible}} < 800 \text{ nm}$.

1.2. Milieu Transparent, Homogène et Isotrope

- Généralement, on suppose que les milieux (optiques) dans lesquels la lumière est susceptible de se propager sont des milieux **T**ransparents, **H**omogènes et **I**sotropes (THI en abrégé) où :
 - ✓ **Transparent** : signifie qu'il n'y **pas** de phénomène d'**absorption** de la lumière à la traversée du milieu ;
 - ✓ **Homogène** : signifie que les caractéristiques optiques du milieu sont **identiques** en **tout point** du milieu (pas d'endroit privilégié dans le milieu) ;
 - ✓ **Isotrope** : signifie que les caractéristiques optiques sont **identiques** dans **toute direction** de propagation dans le milieu (pas de direction privilégiée).
- Dans un milieu THI, la propagation de la lumière est identique quelle que soit la direction ou le lieu de propagation dans le milieu.

1.3. Indice de réfraction d'un milieu

- L'**indice de réfraction** (ou *indice optique*) n d'un milieu THI est défini comme le rapport de la célérité de la lumière dans le vide (c) par la vitesse dans le milieu considéré (v) :

$$n \text{ (indice de réfraction)} = \frac{c \text{ (vitesse de la lumière dans le vide)}}{v \text{ (vitesse dans le milieu considéré)}}$$

$$n = \frac{c}{v} \quad \heartsuit \quad (1.1)$$

- L'indice de réfraction n est :
 - ✓ une grandeur **sans dimension** ;
 - ✓ **toujours supérieur ou égal à l'unité** (puisque $v \leq c$) : $n \geq 1$
 - ✓ **constant** pour un milieu THI.

➤ Ci-après les indices de réfraction de quelques milieux :



Ainsi, dans la pratique $1 \leq n \leq 2$ avec peu de milieux d'indice supérieur à 2.

- Un milieu ② est dit **moins réfringent** qu'un milieu ① si $n_{②} < n_{①}$.
Un milieu ② est **plus réfringent** que le milieu ① lorsque $n_{②} > n_{①}$.
- La **loi de Cauchy** : La plupart des milieux THI ont un indice de réfraction n qui obéit à la loi de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} \quad (1.2)$$

où λ_0 est la longueur d'onde de la lumière étudiée dans le **vide** ; A et B sont des constantes positives qui dépendent de la nature du milieu.

Une conséquence de cette loi étant le phénomène de **dispersion** de la lumière blanche puisque, on a alors : $n_{violett} > n_{bleu} > n_{jaune} > n_{rouge}$ (voir Annexe A).

1.4. Longueur d'onde

- Dans le **vide**, toute onde électromagnétique se propage à la vitesse (de la lumière) $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette **célérité** c est la même quelle que soit la fréquence de l'onde électromagnétique et quel que soit le référentiel galiléen considéré : c'est une **constante universelle**.
- Dans le **vide**, toute lumière **monochromatique** de fréquence f (fixée, rappelons-le, par la source émettrice) possède donc une longueur d'onde λ_0 telle que :

$$c = \lambda_0 \times f \quad (1.3)$$

Mais dans un milieu THI d'indice de réfraction n , cette même lumière (de fréquence f) se propagera avec une vitesse de propagation v (différente de c) et possédera alors une longueur d'onde (dans ce milieu) λ_n telle que :

$$v = \lambda_n \times f \quad (1.4)$$

Des équations (1.3) et (1.4) il vient donc :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_n} = \frac{c}{v} = n \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} \quad \heartsuit \quad (1.5)$$

Ainsi, par rapport à sa longueur d'onde dans le vide λ_0 , une onde lumineuse voit sa longueur d'onde λ_n (dans un milieu THI d'indice n) réduite d'un facteur n .

1.5. Cadre de l'optique géométrique : modèle des rayons lumineux

- Le cadre approximatif de l'optique géométrique est valable tant que :

La longueur d'onde de la lumière (λ) est **très faible** devant les dimensions (D) de l'appareil ou dispositif optique (miroirs, lentilles, trous ... etc.) : $\lambda \ll D$.

Cette approximation garantit de fait l'absence de tout phénomène de diffraction ou d'interférences.

■ Rayons lumineux

- En optique géométrique, on considère que la lumière se **propage** selon le modèle des « **rayons lumineux** » où chaque « **rayon** » représente la « trajectoire » de la lumière pour aller d'un point à un autre.
- Le modèle des rayons lumineux est un modèle idéalisé de la propagation de la lumière qui considère que :
- ✓ La lumière se propage en **ligne droite** dans un milieu THI.
 - ✓ Les rayons lumineux sont des segments de droites **orientés** dans le **sens** de propagation de la lumière.
- Les rayons lumineux sont des constructions théoriques qui ne sont pas arbitraires : leur propagation est régie par des règles simples de géométrie qui traduisent les lois de l'optique géométrique.

■ Faisceaux lumineux

- Un **faisceau** lumineux est un ensemble **continu** de rayons lumineux (considérés indépendants les uns des autres).
- La Figure 1.1 (a)-(d) présente divers profils de faisceaux lumineux : faisceaux **parallèles** (a) ; **coniques, divergents** (b) ou **convergents** (c) ; **diffus** (d).

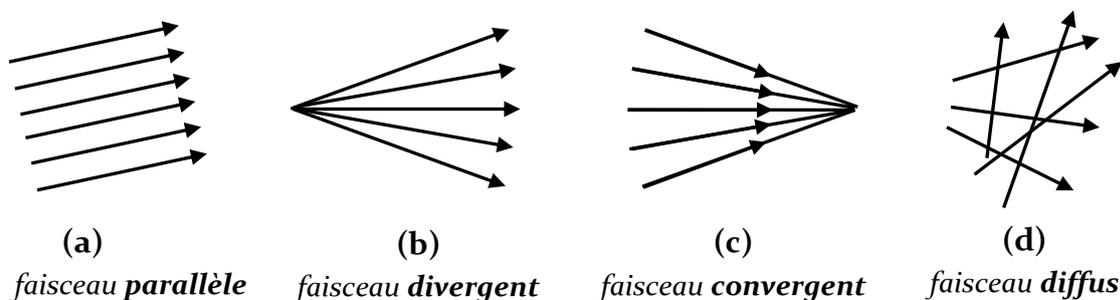


Figure 1.1 : Les divers profils d'un faisceau lumineux : faisceau parallèle (a) ; faisceau conique, divergent (b) ou convergent (c) ; faisceau diffus (d).

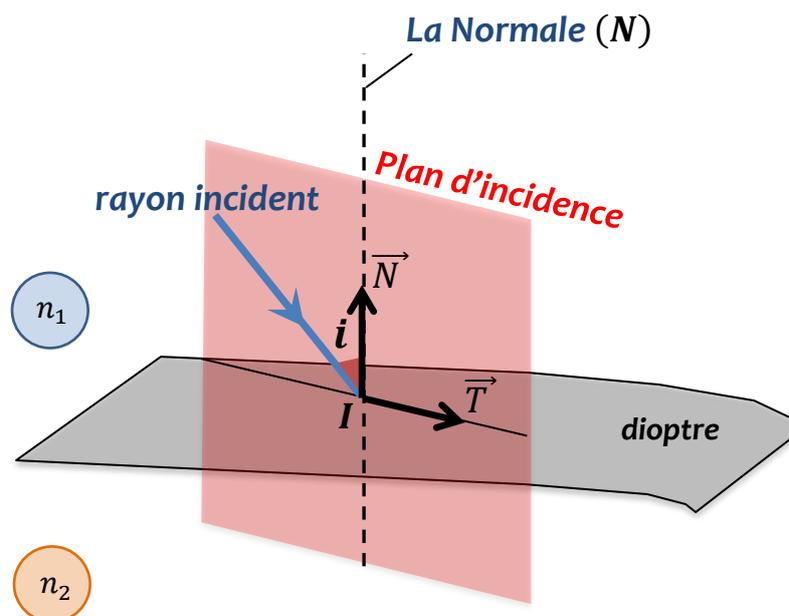
2. Lois de Snell-Descartes

2.1. Première loi de Snell-Descartes: plan d'incidence

- Vocabulaire : On désigne par,
 - ✓ **dioptre** : surface de séparation entre deux milieux d'indices différents.
 - ✓ **rayon incident** : rayon lumineux arrivant à l'interface d'un dioptre ou d'un miroir.
 - ✓ **point d'incidence** : point de contact d'un rayon incident avec un dioptre ou un miroir.
- Soit un *rayon incident* arrivant au point d'incidence I à l'interface d'un dioptre séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 . Au voisinage de I , localement la surface étant assimilée à un plan (*plan tangent*), on définit (voir Figure 1.2) :
 - ✓ **La normale N** : droite **perpendiculaire** à ce *plan tangent* **et** passant par I .
 - ✓ **plan d'incidence** : plan formé par le rayon incident **et** la normale N au dioptre ou au miroir.
 - ✓ **angle d'incidence** : angle (i) entre le rayon incident et la normale N .
- La première loi de Snell-Descartes énonce que :

Rayon incident, rayon réfléchi et rayon réfracté sont (tous les trois) dans le plan d'incidence.

Autrement dit, le rayon incident, le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont **coplanaires** (situés dans un même plan) : le plan d'incidence.



| Figure 1.2 : Plan d'incidence (illustration).

2.2. Deuxième loi de Snell-Descartes : réflexion

➤ La deuxième loi de Snell-Descartes stipule que :

$$\text{L'angle de réflexion } (r) \text{ est égal à l'angle d'incidence } (i) : \\ r = i \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

où l'angle de réflexion (r) est l'angle entre le rayon **réfléchi** et la normale N . (voir illustration Figure 1.3)

➤ **Remarque** : Si on adoptait des angles **orientés** c.-à-d. un sens d'orientation pour les angles alors l'équation (1.6) s'écrit : $r = -i$.

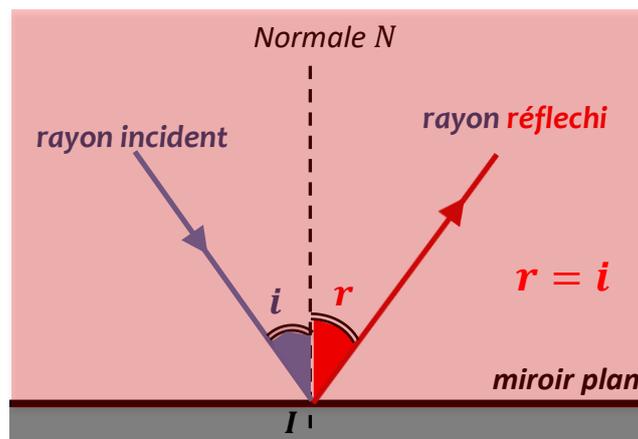
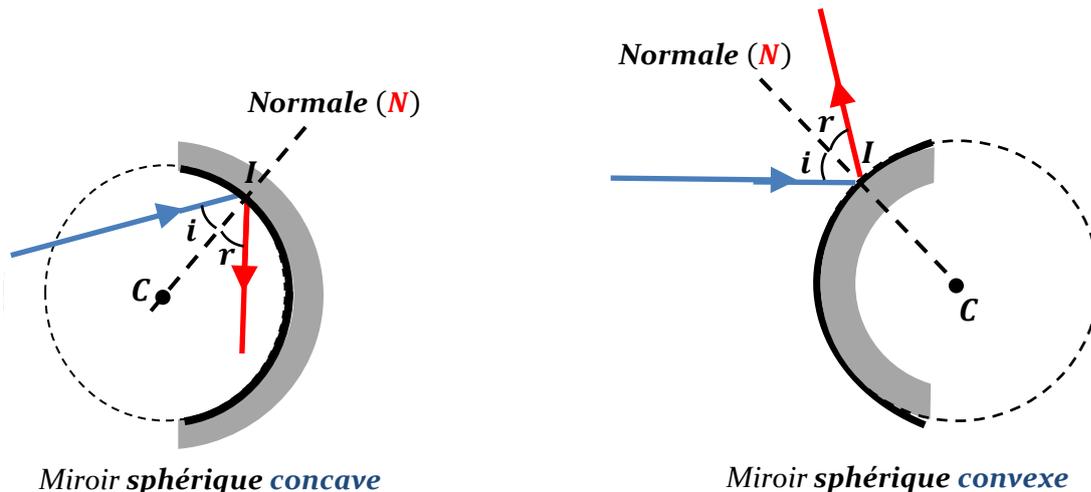


Figure 1.3 : Réflexion de la lumière par un miroir plan – le rayon réfléchi est situé dans le plan d'incidence (ici, le plan de la figure).

➤ Dans le cas d'une surface réfléchissante **sphérique** (**miroir sphérique**), la **normale** N en un point d'incidence I est la droite passant **par I et** par le **centre de courbure** C du miroir sphérique (voir illustrations à la Figure 1.4).



Miroir sphérique **concave**

Miroir sphérique **convexe**

Figure 1.4 : Réflexion sur un **miroir sphérique** – concave vs convexe – Représentation de la normale N , des rayons et angles d'incidence et de réflexion.

2.3. Troisième loi de Snell-Descartes : réfraction

- Quand la lumière se propage d'un milieu d'indice n_1 (avec une vitesse v_1) vers un milieu d'indice n_2 (avec une vitesse $v_2 \neq v_1$), elle change de direction à l'interface du dioptre séparant les deux milieux. Ce changement de direction de propagation est le phénomène de **réfraction**.
- La troisième loi de Snell-Descartes stipule que :

Les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 sont liés par la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \heartsuit \quad (1.7)$$

où l'angle de réfraction (i_2) est l'angle entre le rayon **réfracté** et la normale N .

■ Pour $n_2 > n_1$: Réfraction

- Dans le cas $n_2 > n_1$, on a :
 - ✓ $i_2 < i_1$: le rayon **réfracté se rapproche** de la normale au dioptre ; et ce, d'après (1.7) et puisque la fonction « sinus » est croissante entre 0° et 90° .
 - ✓ Pour tout rayon incident, le rayon **réfracté existera toujours**.
- La Figure 1.5 illustre un rayon réfracté à l'interface d'un dioptre plan dans le cas $n_2 > n_1$.

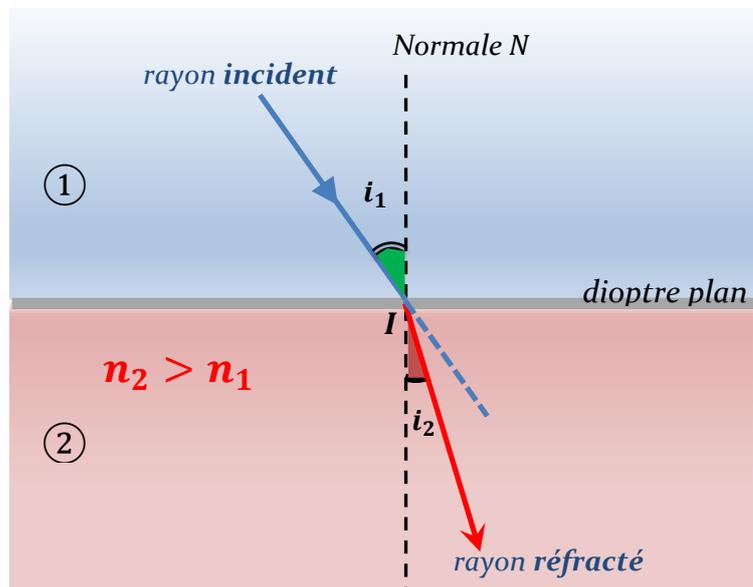


Figure 1.5 : Cas : $n_2 > n_1$ – Réfraction de la lumière à l'interface d'un dioptre plan, le rayon **réfracté existera toujours** avec :
 $i_2 < i_1$

■ Pour $n_2 < n_1$: Cas de la **Réflexion totale**

➤ Lorsque $n_2 < n_1$, il existe un **angle limite** d'incidence (i_{1Lim}) égal à :

$$i_{1Lim} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad \heartsuit \quad (1.8)$$

✓ Pour $i_1 \leq i_{1Lim}$, le rayon réfracté **existe** et il **s'éloigne** de la normale au dioptre dans ce cas ($i_2 > i_1$) ; noter au passage que le cas limite $i_1 = i_{1Lim}$ correspond alors à un rayon réfracté rasant ($i_2 = 90^\circ$).



✓ Si $i_1 > i_{1Lim}$ (et avec $n_2 < n_1$) on a le phénomène de **réflexion totale** : le rayon incident est **réfléchi** à l'interface du dioptre et il n'y a pas de rayon réfracté dans ce cas.

➤ La Figure 1.6 illustre l'émergent d'un rayon incident à l'interface d'un dioptre plan lorsque $n_2 < n_1$ et ce pour les trois cas : $i_1 < i_{1Lim}$, $i_1 = i_{1Lim}$ et $i_1 > i_{1Lim}$.

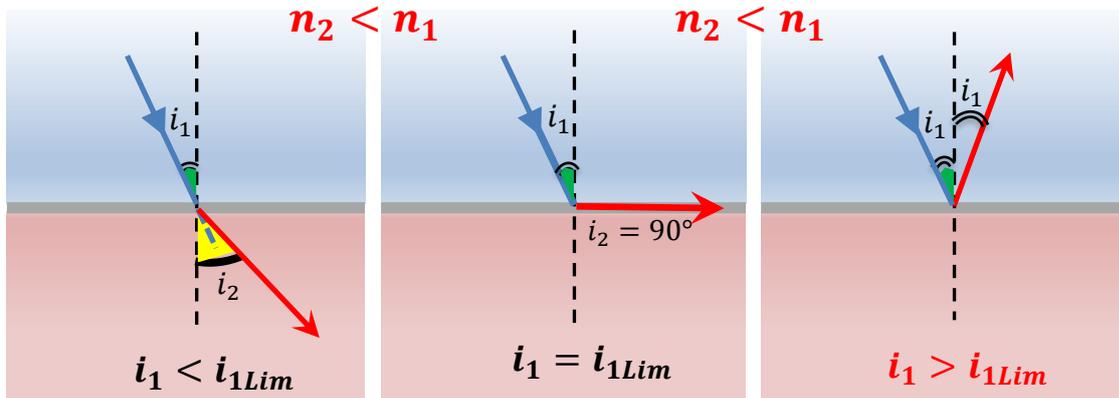


Figure 1.6 : Cas $n_2 < n_1$ – illustration de l'émergent à l'interface d'un dioptre plan. Pour :

- ✓ $i_1 \leq i_{1Lim}$: **réfraction**
- ✓ $i_1 > i_{1Lim}$: **réflexion totale**

2.4. Principe de retour inverse de la lumière

➤ Les lois de Snell-Descartes ne font pas intervenir le sens de propagation de la lumière. En accord avec le principe de retour inverse de la lumière, un rayon lumineux se propageant dans le sens inverse du milieu d'indice n_2 , avec un angle d'incidence i_2 , sera réfracté dans le milieu d'indice n_1 avec un angle de réfraction i_1 tel que : $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$.

➤ Tout trajet suivi par la lumière dans un sens peut l'être dans le sens opposé.

➤ Principe de retour inverse de la lumière énonce que :

Le trajet suivi par la lumière ne dépend pas du **sens de parcours**

2.5. Principe de Fermat

- En 1650, le mathématicien *Fermat* énonça le principe suivant :
 « Pour aller d'un point *A* à un point *B*, la lumière suit le **chemin optique extrémal** (minimal ou maximal) »

■ CHEMIN OPTIQUE

- Par définition le **chemin optique** est le produit du **chemin géométrique** d'un rayon dans un milieu par l'**indice de réfraction** de ce milieu :

Le **chemin optique** pour aller d'un point *A* à un point *B*, noté $[AB]$ ou encore $L(AB)$, est défini par : $[AB] = L(AB) = \int_A^B n ds$, où *s* est l'**abscisse curviligne**.

- Dans un milieu THI, l'**indice de réfraction** dit milieu étant constant ($n = cte$), le long du trajet lumineux, le **chemin optique** $[AB]$ s'écrit donc :

$$[AB] = n AB \quad \text{où, } AB \text{ est le chemin géométrique}$$

Ainsi, dans ce cas, le **chemin optique** est proportionnel à la longueur parcourue dans le milieu (d'indice, ***n***) entre les deux points *A* et *B*, sachant que la longueur la plus courte est celle joignant en **ligne droite** les points *A* et *B* (c'est en fait une conséquence du principe de *Fermat*).

2.6. Diamètre apparent d'un objet

- Considérons une balle de rayon *r* éclairée par un faisceau lumineux situé à une distance *d* de la balle. En traçant les rayons extrêmes, l'image de cette balle, recueillie sur un écran situé à une distance *D* de la balle, possède un rayon *R* (voir Figure 1 ci-contre). Il existe alors une relation entre *r* et *R*.

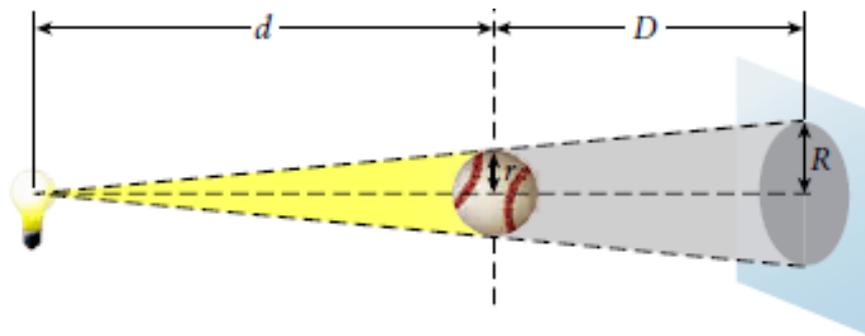
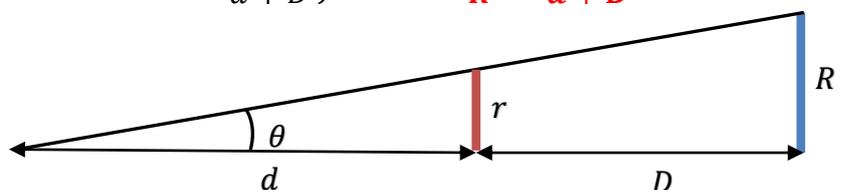


Figure 1 : Aspect géométrique - une balle éclairée par un faisceau lumineux.

En effet, en considérant la figure ci-après, il vient alors :

$$\left\{ \tan \theta = \frac{r}{d} \quad \& \quad \tan \theta = \frac{R}{d + D} \right\} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{d}{d + D}$$

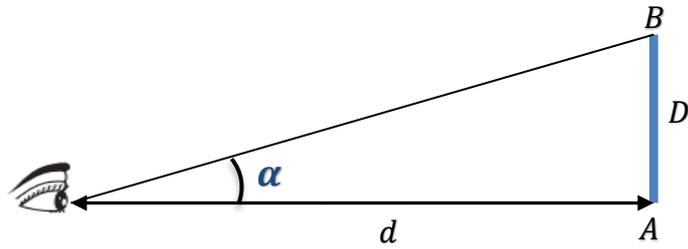
C'est l'expression du théorème de Thalès.



▪ DÉFINITION

➤ Le **diamètre apparent** d'un objet est défini comme l'**angle** sous lequel on voit l'objet.

➤ La Figure ci-contre illustre le diamètre apparent (α) d'un objet AB , de diamètre D et placé à une distance d .

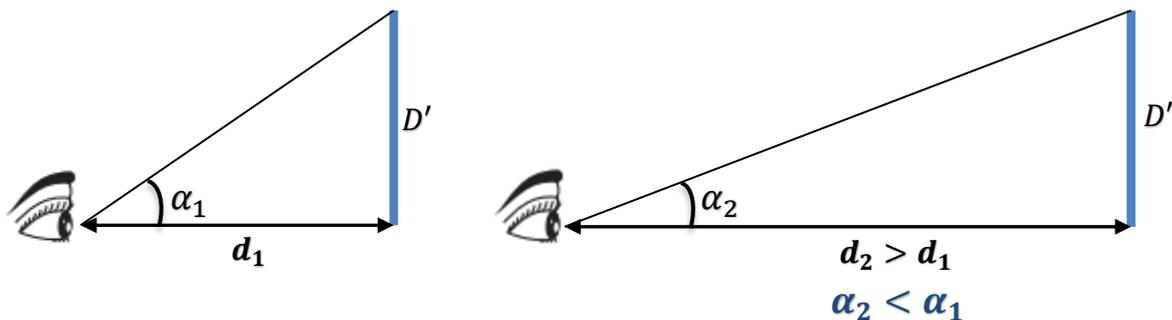


Le diamètre apparent de l'objet AB s'écrit alors :

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{AB}{d} \Rightarrow \alpha \approx \frac{D}{d}$$

▪ PROPRIÉTÉ

➤ La Figure ci-après illustre les diamètres apparents (α_1, α_2) d'un même objet, de diamètre D' , mais vu à deux distances différentes (d_1 et d_2). On déduit alors immédiatement que $\alpha_2 < \alpha_1$ puisque, $d_2 > d_1$.



▪ REMARQUE IMPORTANTE

➤ Dans le Système International d'unités (SI), le diamètre apparent α (comme tous les angles) s'exprime en **radian** (rad). Néanmoins, en optique géométrique on exprime habituellement les mesures angulaires en **degrés** ($^\circ$) voire des fois en **minutes d'arc** ($'$) et **secondes d'arc** ($''$).

➤ Signalons que les degrés sont subdivisés comme suit :

- ✓ 360 degrés ($^\circ$) dans un cercle complet ;
- ✓ 60 minutes d'arc ($'$) dans un degré : $1^\circ = 60'$;
- ✓ 60 secondes d'arc ($''$) en une minute d'arc : $1' = 60''$.

En résumé, on a :

$1^\circ = 60' = 3\,600''$ ♡

3. Compléments

3.1. Fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice est formée de deux milieux transparents : le « cœur » cylindrique et d'indice n_c , entouré par la « gaine » d'indice n_g avec $n_g < n_c$. L'ensemble est entouré d'une enveloppe protectrice opaque (voir Figure 1.7).

On désire déterminer l'angle d'incidence maximal appelé « **angle d'acceptance** » qui permet le guidage de la lumière dans la fibre. La *face d'entrée* (interface air-cœur) étant perpendiculaire à l'axe de la fibre.

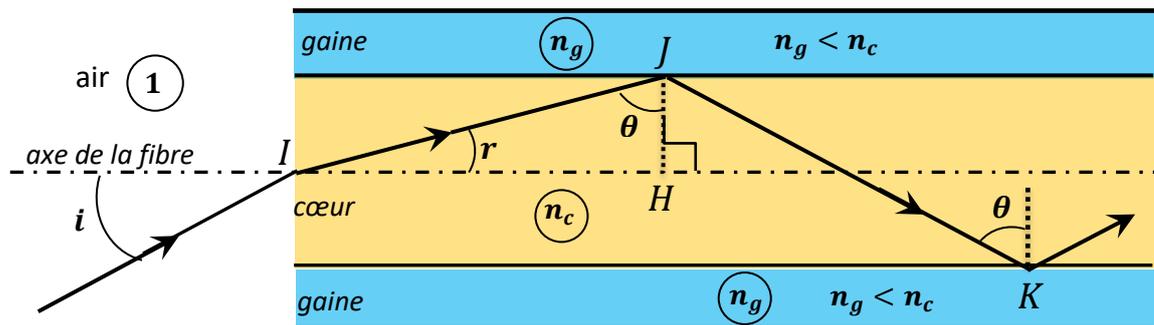


Figure 1.7 : Fibre optique à saut d'indice (schéma simplifié).

- Montrer qu'il existe un angle d'incidence maximum (i_{max}) au-dessus duquel la lumière n'est plus réfractée à l'interface cœur-gaine ; autrement dit, pour toute incidence $i > i_{max}$, la lumière subira une *réflexion totale* à l'interface cœur-gaine. Déterminer l'expression de i_{max} en fonction de n_g et n_c .

SOLUTION : En suivant la marche du rayon, il vient :

- A la face d'entrée de la fibre optique : le rayon incident arrive à l'interface air-cœur de la fibre, au point I , avec une incidence i . Noter au passage que la normale en I à la face d'entrée est l'axe de la fibre optique.
- En I , le rayon est réfracté (il existera toujours) et la loi de réfraction en I donne :

$$\sin i = n_c \sin r \quad (1)$$
 Or, r et θ sont des angles complémentaires : $\theta = \frac{\pi}{2} - r$ (cf. triangle IJH). L'équation (1) s'écrit alors : $\sin i = n_c \cos \theta = n_c \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ (2)
- En J , le rayon arrive avec une incidence égale à θ et on désire avoir une **réflexion totale** en J , à l'interface cœur-gaine. Dans ce cas, le 2^e milieu (la gaine, d'indice n_g) est moins réfringent que le 1^{er} milieu (le cœur, d'indice n_c), $n_g < n_c$, il existe donc un angle d'incidence limite θ_{Lim} égal à :

$$\theta_{Lim} = \sin^{-1} \left(\frac{n_g}{n_c} \right)$$

Pour avoir une réflexion totale en J , il faut alors que $\theta > \theta_{Lim}$, soit :

$$\sin \theta \geq \frac{n_g}{n_c} = \sin \theta_{Lim} \quad \Leftrightarrow \quad n_c \sin \theta \geq n_g \quad (3)$$

D'autre part, l'équation (2) s'écrit : $\sin i = n_c \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{n_c^2 - n_c^2 \sin^2 \theta}$ (4)

Des équations (3) et (4), il vient alors :

$$\sin i = \sqrt{n_c^2 - n_c^2 \sin^2 \theta} \leq \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = \sin i_{Max}$$

Au final, on aura réflexion totale en J pour tout rayon d'incidence $i \leq i_{Max}$ où :

$$i_{Max} = \sin^{-1} \left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2} \right) \quad (1.9)$$

i_{Max} est appelé « **angle d'acceptance** » de la fibre optique et $O_N = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ est appelée Ouverture Numérique de la fibre optique.

Pour $i \leq i_{Max}$, on a réflexion totale en J et l'angle de réflexion sera alors égal à θ . Le rayon arrive ensuite en K avec une incidence θ (cf. Figure 1.7) à l'interface cœur-gaine (dans cet ordre/sens), donc avec la même situation qu'en J ; aussi, on aura également réflexion totale en K . Et ainsi-de-suite pour tous les points d'incidence suivants à l'interface cœur-gaine. C'est justement cette propriété qui permet le guidage de la lumière dans la fibre optique.

3.2. lame à faces parallèles

- La Figure 1.8 illustre une lame à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur e . Montrer que le rayon lumineux émergent de la lame à faces parallèles sort parallèle au rayon incident mais décalé d'une distance d qu'il faut déterminer.

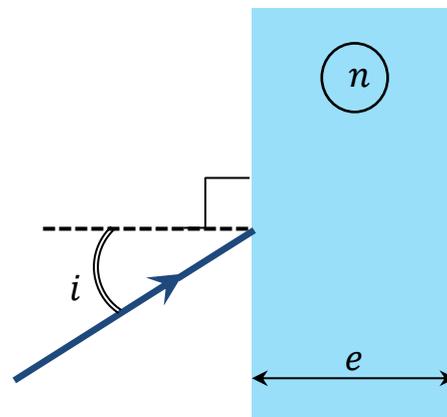


Figure 1.8 : lame à faces parallèles d'indice « n » et d'épaisseur « e ».

- **SOLUTION** : La Figure 1.9 représente la marche du rayon traversant une lame à faces parallèles placée dans l'air. On en déduit que le rayon lumineux émerge de la lame à faces parallèles **sans être dévié** (c.à.d. parallèle au rayon incident) mais **décalé** d'une certaine distance d .

A partir de la Figure 1.10 il vient :

- en considérant le triangle (IJK) : $d = JK = IJ \sin(i - r)$
- en considérant le triangle (IJL) :

$$IJ = \frac{IL}{\cos r} = \frac{e}{\cos r}$$

D'où l'expression du décalage d :

$$d = e \times \frac{\sin(i - r)}{\cos r} \quad (1.10)$$

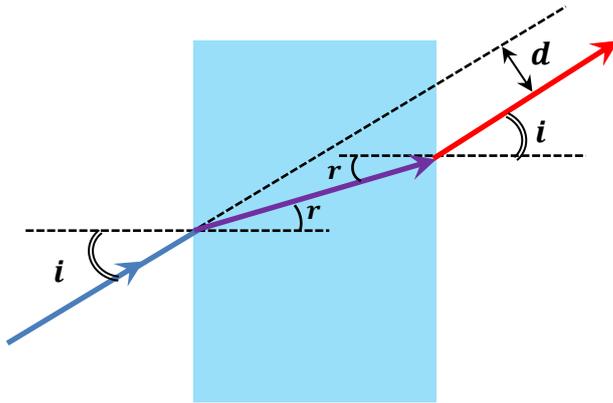


Figure 1.9 : *Lame à faces parallèles – Marche d'un rayon.*

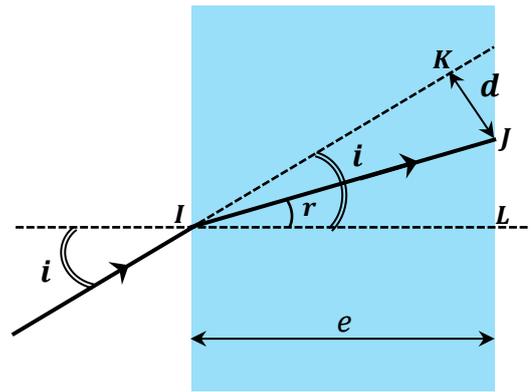


Figure 1.10 : *Lame à faces parallèles – Décalage d du rayon incident*

3.3. Prisme

- On place dans l'air un prisme d'angle au sommet A et d'indice n . Soit i l'angle d'incidence. On suppose que le rayon émerge du prisme tel indiqué à la Figure 1.11. Déterminer l'angle de déviation D du rayon incident.

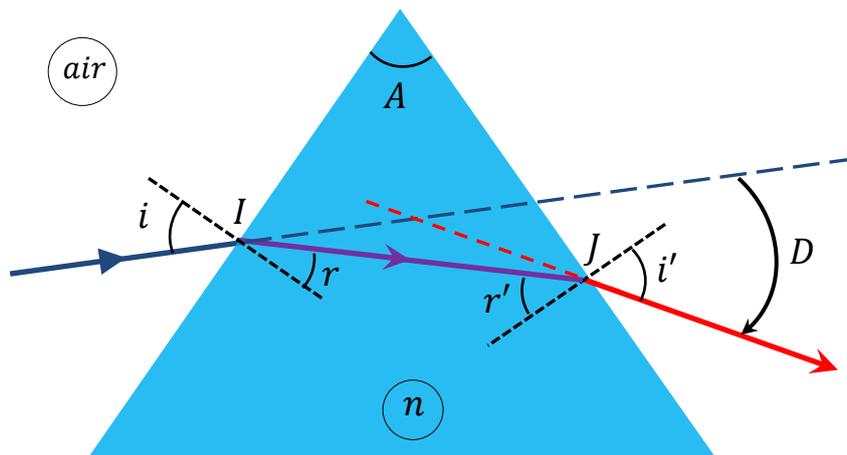


Figure 1.11 : *Prisme – déviation d'un rayon incident par un prisme.*

- **SOLUTION** : En considérant les notations de la Figure 1.11, il vient :

- à l'entrée du prisme, la loi de réfraction en I s'écrit : $\sin i = n \sin r$ (1)

- à la sortie du prisme, la loi de réfraction en J s'écrit : $\sin i' = n \sin r'$ (2)

- relation angulaire (triangle IAJ) :

$$\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + A = \pi \quad \Rightarrow$$

$$A = r + r' \quad \heartsuit \quad (1.11)$$

- angle de déviation D :

$$D = (i - r) + (i' - r') = i + i' - r - r'$$

En tenant compte de la relation précédente (1.11), il vient finalement :

$$D = i + i' - A \quad \heartsuit \quad (1.12)$$

➤ **REMARQUES :**

- ✓ Les angles sont considérés non orientés sauf la déviation D qui, elle, est un angle *orienté* : D étant **dirigée** (orientée) vers la **base** du prisme.
- ✓ La **dispersion** de la lumière *blanche* à la traversée d'un prisme (voir Figure 1.12) est une conséquence du fait que la déviation D est inversement proportionnelle à la longueur d'onde : D est **plus importante** quand la *longueur d'onde* est **faible** ; ou encore, étant donné que les indices de réfraction sont telles que $n_{violet} > n_{bleu} > n_{jaune} > n_{rouge}$, la déviation est alors plus importante en allant du *violet* au *rouge* ($D_{violet} > D_{bleu} > D_{jaune} > D_{rouge}$).

Noter que le phénomène de la dispersion de la lumière blanche se trouve à la base du phénomène de l'arc-en-ciel où la goutte d'eau joue le rôle du prisme.

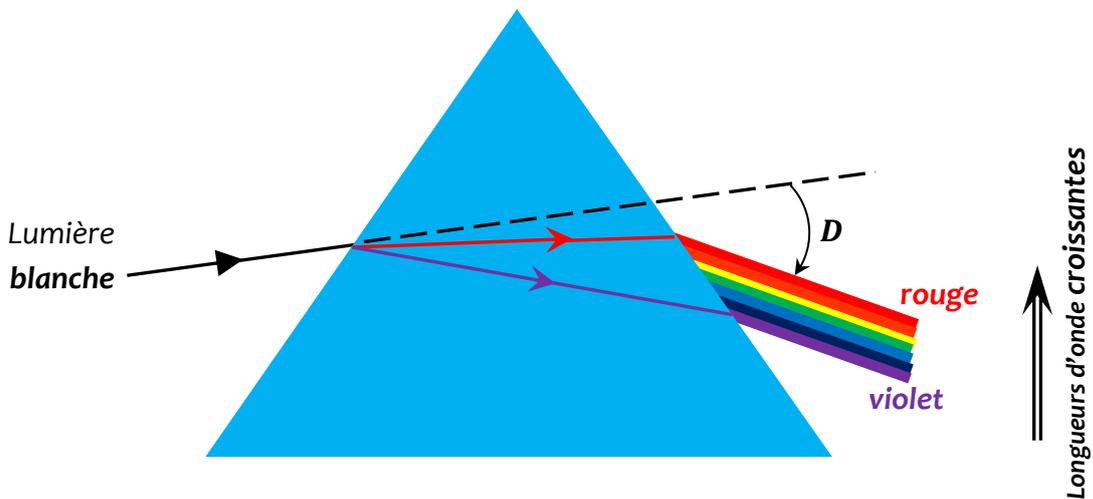


Figure 1.12 : Prisme – dispersion de la lumière blanche à la traversée d'un prisme.
(les déviations sont exagérées sur le schéma).

À RETENIR – FORMULAIRE

- Une onde électromagnétique **monochromatique** est caractérisée par trois grandeurs : une fréquence f , une longueur d'onde λ et une vitesse de propagation v , avec :

$$v = \lambda \times f$$

- Dans le **vide**, la **vitesse de la lumière** est $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et on a :

$$c = \lambda_0 \times f \quad (\lambda_0 : \text{longueur d'onde dans le vide})$$

- Dans un milieu THI d'indice de réfraction n , la vitesse de propagation de la lumière est : $v = \lambda_n \times f$. La fréquence f étant fixée par la source émettrice et λ_n est la longueur d'onde dans ledit milieu, avec :

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$$

- L'**indice de réfraction** n d'un milieu est :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

- Les trois **lois de Snell-Descartes** :

➤ 1^{ère} : Les rayons incident, réfléchi et réfracté sont dans le **plan d'incidence**.

➤ 2^{ème} : L'angle de **réflexion** (r) est égal à l'angle d'incidence (i) : $r = i$

➤ 3^{ème} : Les angles d'incidence i_1 et de **réfraction** i_2 sont liés par la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

✓ Lorsque $n_2 > n_1$, le rayon **réfracté** existera **toujours**.

✓ Lorsque $n_2 < n_1$, il existe un angle d'incidence **limite** : $i_{1Lim} = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$

❖ Si $i_1 \leq i_{1Lim}$, le rayon **réfracté** **existera**.

❖ Si $i_1 > i_{1Lim}$, il y a **réflexion totale** (pas de rayon réfracté).

PAGE VIERGE

Chapitre 2

Formation d'images, stigmatisme, aplanétisme et approximation de Gauss

1. Système optique

- Un **système optique** est un ensemble d'éléments optiques représentés par un certain nombre de milieux THI et séparés par des surfaces de formes géométriques simples généralement (plans, portions de sphères, etc.). On distingue plusieurs types de systèmes optiques.
- **Miroir vs Dioptre**
 - ✓ Si la surface entre deux milieux successifs est **réfléchissante** on a un **miroir** ;
 - ✓ Sinon, si cette surface n'est pas réfléchissante, il s'agit alors d'un **dioptre**.
- **Système Dioptrique vs Catadioptrique**
 - ✓ Un système est dit **dioptrique** s'il ne contient que des dioptres (aucun miroir).
 - ✓ Un système est dit **catadioptrique** s'il contient un ou plusieurs miroirs.
- **Système centré : axe optique**
 - ✓ Un système est dit **centré** s'il possède une symétrie de révolution autour d'un axe Δ appelé alors **axe optique** du système centré.
 - ✓ Un rayon arrivant suivant l'axe optique n'est pas dévié : l'axe optique représente la trace d'un rayon lumineux particulier.

2. Notion d'objet et d'image – réel(le) ou virtuel(le)

➤ Définitions :

- ✓ Un *point lumineux* est un **objet réel**, lorsque les rayons s'y coupent réellement ; c'est un **objet virtuel** quand les rayons ne s'y rencontrent que par leurs prolongements.
- ✓ L'**image** d'un objet par un système optique (S) est **réelle** si on peut la **projeter** sur un écran ; cette **image** est virtuelle dans le cas contraire.

➤ Dans la pratique :

- ✓ Un **objet** est **réel** si on peut le toucher.
- ✓ Une **image** est **réelle** si on peut la **recueillir** sur un écran (sans utiliser un autre système optique).
- un objet (A) et son **image** (A'), **réel(le)s** et/ou **virtuel(le)s**. Y sont représentés en pointillés les prolongements des rayons lorsque ceux-ci ne correspondent pas à des trajets réellement suivis par la lumière.

- On dit que A' est l'**image** de A à travers le système optique (S), symboliquement :

$$A \xrightarrow{(S)} A'$$

- Soit un système **dioptrique** (S) : La Figure 2.1 illustre les quatre cas possibles pour un **objet** A et son **image** A' , **réel(le)s** et/ou **virtuel(le)s**. On y a représenté **en pointillés** les **prolongements** des rayons lorsque ceux-ci ne correspondent pas à des trajets réellement suivis par la lumière.
- Un **objet** est **réel** s'il est situé **en amont** (à l'avant) du système optique (S).
- Un **objet virtuel** pour un système (S_2) sera en fait **nécessairement** l'**image** (intermédiaire) d'un objet réel à travers un autre système optique (S_1) ; voir illustration Figure 2.2 : pour (S_2), A' est un **objet virtuel** ; et en fait, A' est l'image d'un **objet réel** A par (S_1).



Attention : tenir compte du **sens** de propagation de la lumière.

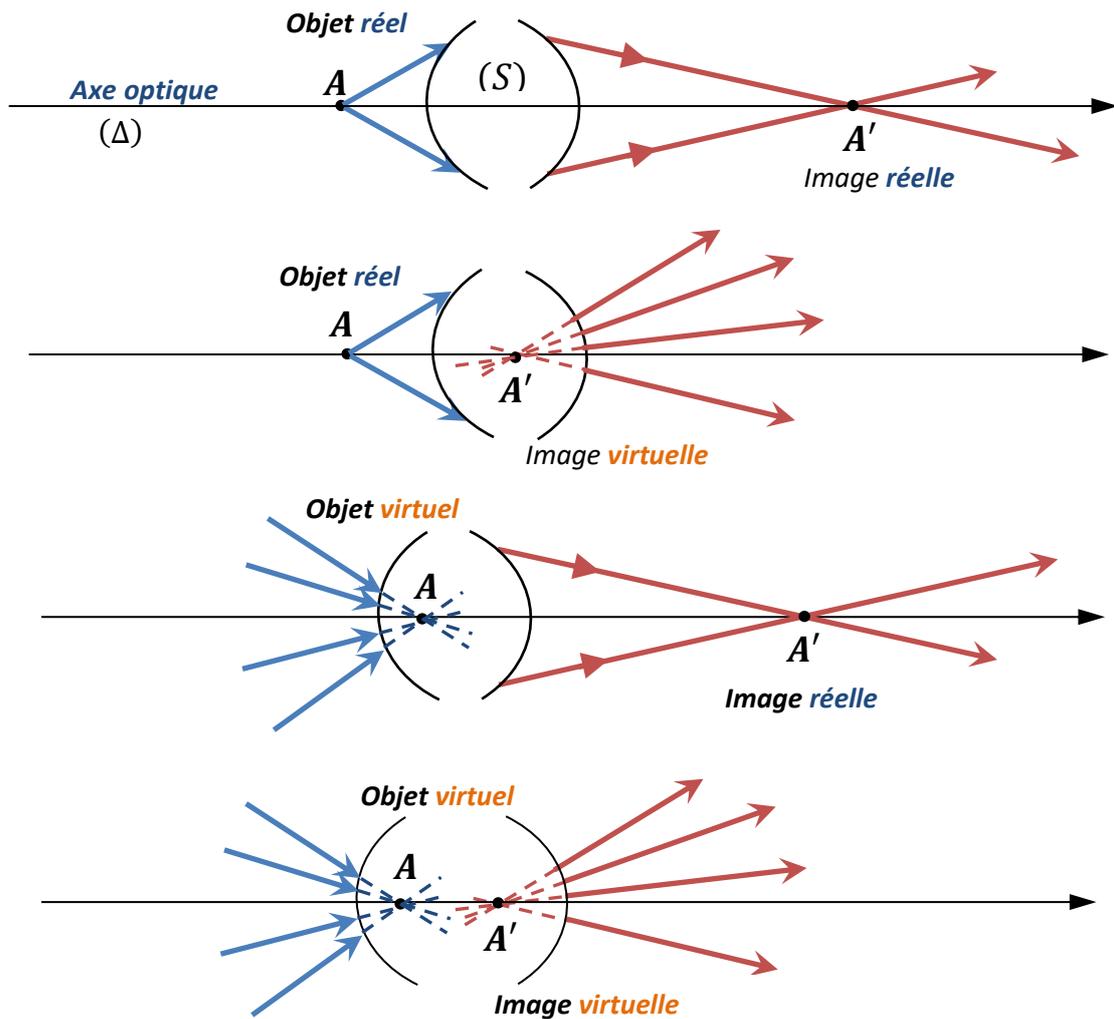


Figure 2.1 : Cas d'un système **dioptrique** (S) – illustrations des quatre cas possibles, d'un objet A et de son images A', réel(le)s et/ou virtuel(le)s) : $A \xrightarrow{(S)} A'$.

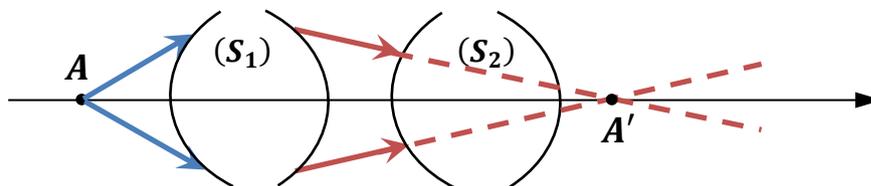


Figure 2.2 : **Objet virtuel** – A' est un objet **virtuel** pour (S2) : c'est en fait l'image d'un objet réel A à travers (S1).

- Les Figures 2.3 & 2.4 illustrent les quatre espaces : « *espaces objet réel /vs virtuel* » et « *espaces image réelle /vs virtuelle* ».
- Un **objet** est :
 - ✓ **réel** s'il est situé **en amont** (à l'avant) du système optique
 - ✓ **virtuel** s'il est situé **après** le système optique
- L'**image** formée par un système **dioptrique** est :
 - **réelle** si elle se trouve **après** le système dioptrique
 - **virtuelle** si elle est **à l'avant** du système dioptrique.
- L'**image** formée par un système **catadioptrique** est :
 - **réelle** si elle est **à l'avant** du système catadioptrique
 - **virtuelle** si elle se trouve **après** le système catadioptrique.

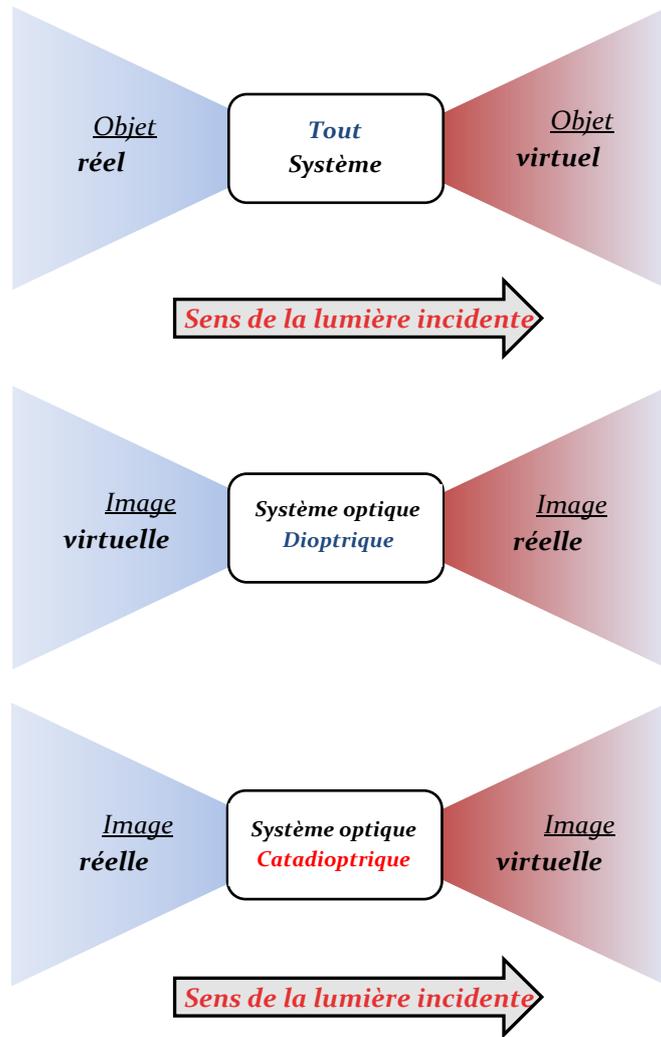


Figure 2.3 : Les quatre « espaces - objet réel », « - objet virtuel », « - image réelle » et « - image virtuelle » pour les deux systèmes optiques (catadioptrique et dioptrique).

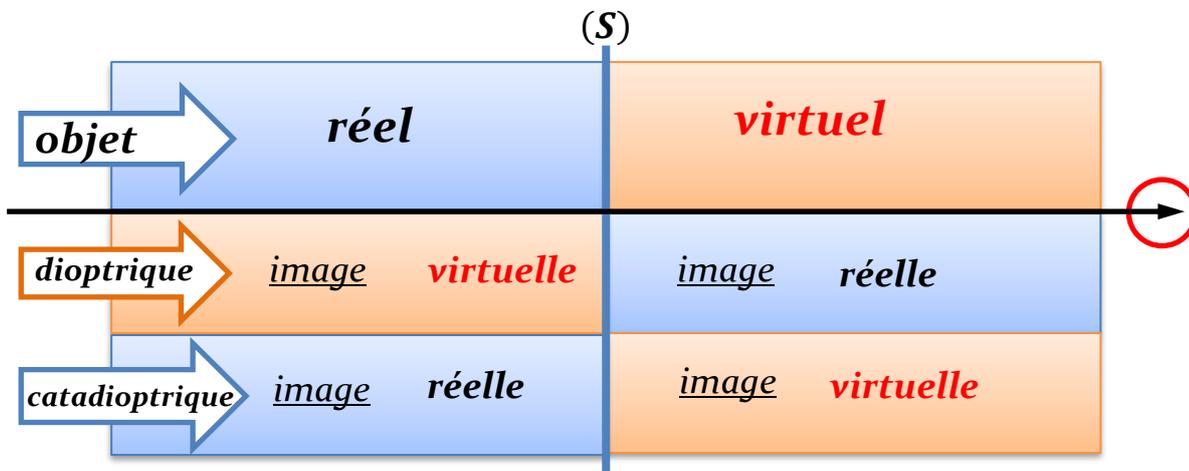


Figure 2.4 : Les quatre espaces « objet réel vs virtuel », « image réelle vs virtuelle » – Les espaces « **images** » s'inversent entre système dioptrique et catadioptrique.

3. Stigmatisme

- Un système optique (S) réalise le **stigmatisme** pour un point *objet* A **et** son point *image* A' **si tout** rayon **issu** de A , lorsqu'il émerge de (S) , **passé** par A' . Les deux points A et A' sont alors dits **conjugués** pour le système (S) .

⚠ Le **stigmatisme** traduit une correspondance « **point** » par « **point** »

- Un système optique est dit **rigoureusement stigmatique** si tout point A possède **un** **conjugué** A' **unique**, un et un seul A' (voir Figure 2.5).
- Le stigmatisme **rigoureux** permet en particulier d'énoncer que « si un point *objet* A est **sur l'axe optique**, son **conjugué** A' sera **nécessairement** situé **sur l'axe optique** ».

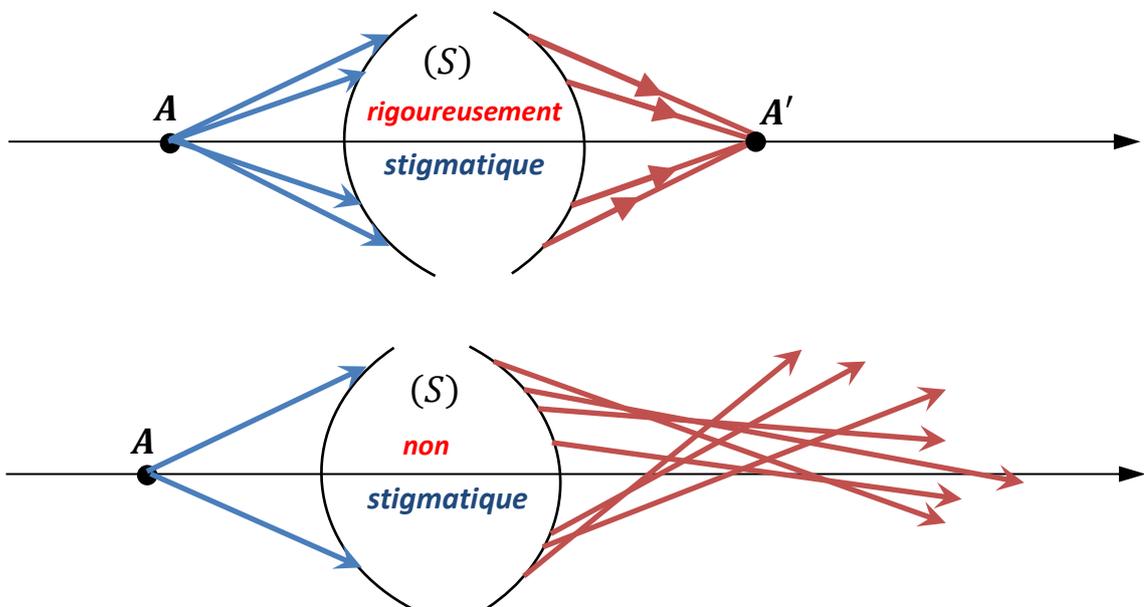


Figure 2.5 : **Stigmatisme** d'un système optique (illustration).

4. Aplanétisme

Soit (S) un système centré, d'axe optique Δ , **rigoureusement stigmatique** pour un couple de points (A, A') . Soit B un point du **plan transverse** ($\perp \Delta$) passant par A .

- Le système (S) est dit **aplanétique** pour A et A' **si** le point B' , **conjugué** du point B , se trouve dans le **plan transverse** ($\perp \Delta$) **passant** par A' (voir Figure 2.6).

⚠ L'**aplanétisme** traduit une correspondance « **plan transverse** » par « **plan transverse** ».

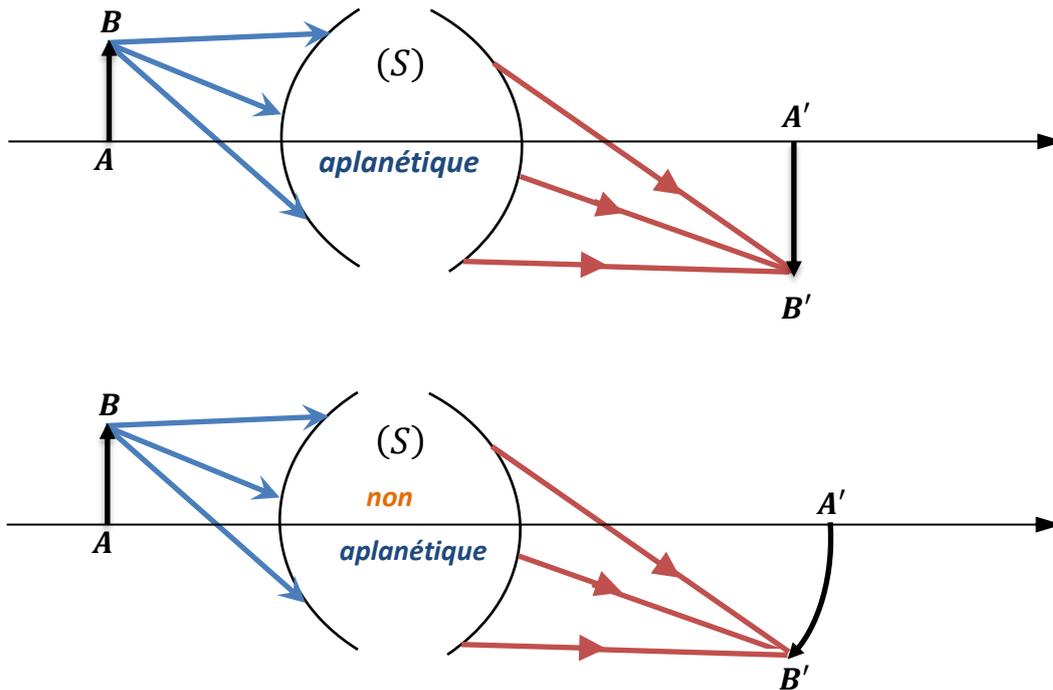


Figure 2.6 : Aplanétisme d'un système optique (illustration).

5. Conditions de Gauss

- Les *conditions de Gauss* : ce sont les conditions des rayons dits **paraxiaux**, soit :
 - ✓ l'**angle** que fait chaque rayon avec l'axe optique du système est **faible** (de l'ordre de grandeur de quelques degrés) ;
 - &
 - ✓ les **rayons** sont **peu inclinés** par rapport à l'axe optique : le point d'incidence doit être proche du centre optique. Autrement dit, la **hauteur** du point d'incidence à l'axe optique doit être **faible** devant les rayons de courbure des dioptries et miroirs du système.
- Dans la pratique, ces deux conditions se traduisent bien souvent par une seule : « les **angles d'incidence** des rayons doivent rester **petits** ».



Les **conditions de Gauss** permettent d'assurer à tout système optique un **stigmatisme** et un **aplanétisme approchés**.

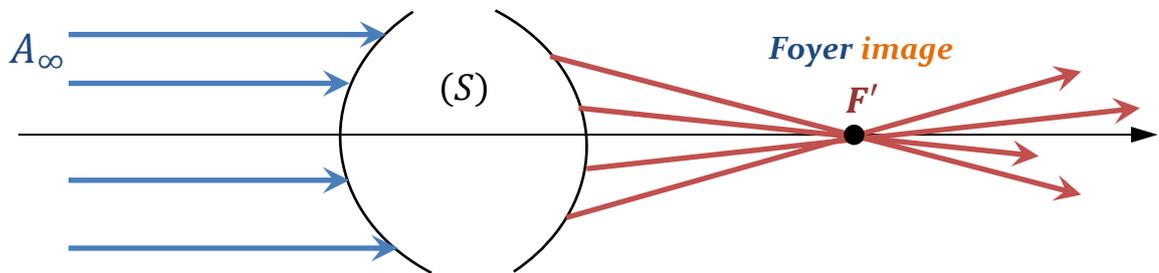
6. Notion de foyer et de plan focal

6.1. Foyer image

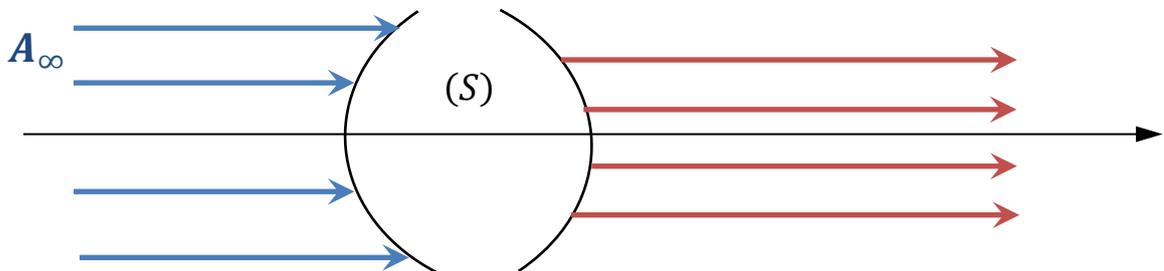
➤ Le **foyer image** F' d'un système (S) est l'**image** d'un **objet** situé à l'**infini** dans la **direction** de l'axe optique (voir Figure 2.7) : $A_\infty \xrightarrow{(S)} F'$

Objet à l'infini dans la direction de l'axe optique $\xrightarrow{(S)}$ **Foyer image** (F')

- Lorsque le foyer image F' est à distance **finie** (voir exemple de la Figure 2.7), le système (optique) est dit **focal**.
- Si le foyer image F' est rejeté à l'**infini** (voir Figure 2.8), le système est dit **afocal**.



| **Figure 2.7** : Foyer image F' d'un système optique (S) focal.



| **Figure 2.8** : Système **afocal** - Le foyer image F' est rejeté à l'**infini**.

6.2. Plan focal image et foyer image secondaire

- Le **Plan focal image** d'un système est le plan **perpendiculaire** à l'axe optique **et** passant par le **foyer image** F' .
- L'image de tout objet B_∞ situé à l'infini **mais non** dans la direction de l'axe optique est un **foyer image secondaire** (F'_S) (voir Figure 2.9) :

$$B_\infty \xrightarrow{(S)} F'_S$$

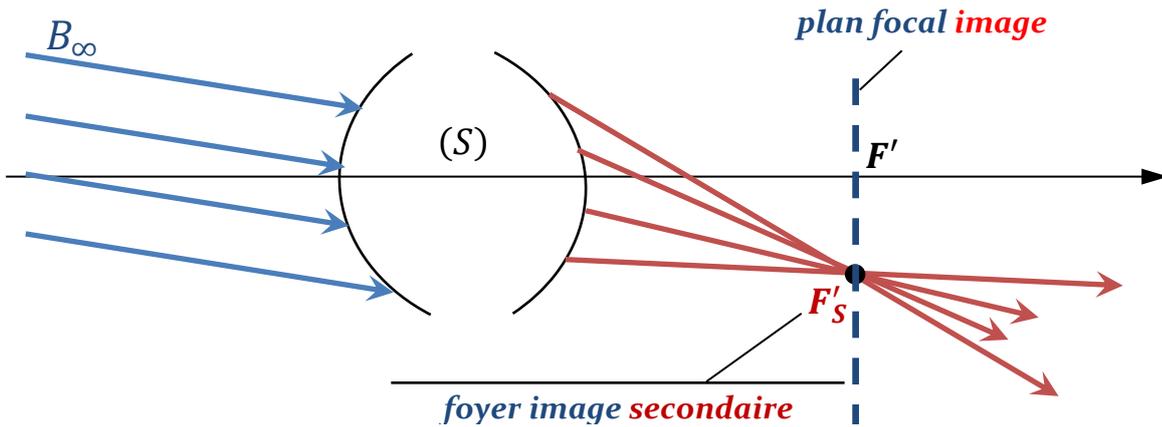


Figure 2.9 : Plan focal *image* et foyer *image secondaire* (F'_S) d'un système optique centré (S).

6.3. Foyer objet

- Le **foyer objet** F a son **image** rejetée à l'**infini** dans la **direction** de l'axe optique. Un rayon incident passant par F donne un rayon émergent parallèle à l'axe optique



(voir Figure 2.10) : $F \xrightarrow{(S)} A'_\infty$

Foyer **objet** $F \xrightarrow{(S)}$ image située à l'**infini** dans la **direction** de l'axe

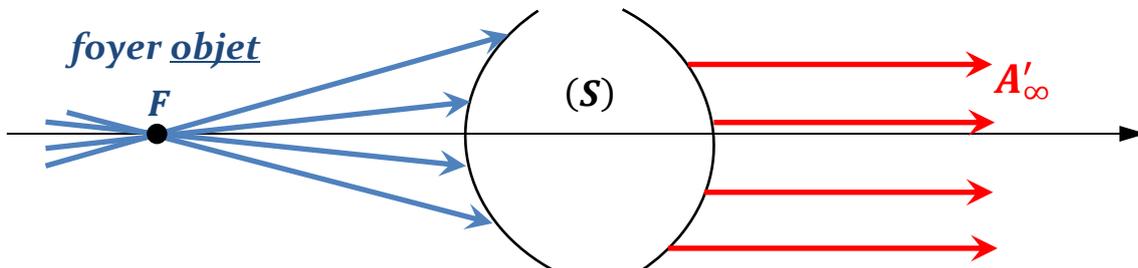


Figure 2.10 : Foyer **objet** F d'un système optique centré (S).

6.4. Plan focal objet et foyer objet secondaire

- Le **plan focal objet** d'un système est le plan perpendiculaire à l'axe optique **et** passant par le **foyer objet** F .
- Tout point (autre que F) du **plan focal objet** est un **foyer objet secondaire** (F_S).
- L' image de tout **foyer objet secondaire** (F_S) est rejetée à l'infini (B'_∞) mais non pas dans la direction de l'axe optique (voir Figure 2.11) : $F_S \xrightarrow{(S)} B'_\infty$

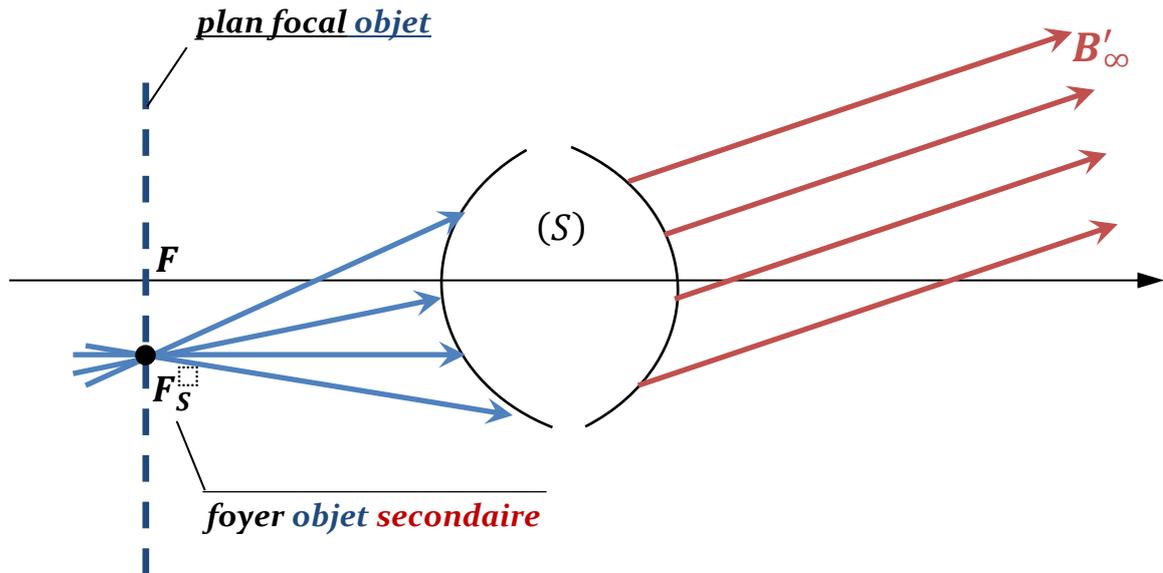


Figure 2.11 : Plan focal **objet** et foyer **objet secondaire** (F_S) d'un système centré (S).

6.5. Remarques

- Le principe de retour inverse de la lumière implique que :
Pour un système **focal**, si F' est à distance finie F sera également à distance finie.
- **ATTENTION** :

⚠ Les foyers objet (F) et image (F') ne sont **pas conjugués** l'un de l'autre par le système optique.

7. Formation d'image : constructions graphiques

- Grace aux *conditions de Gauss*, **deux** rayons lumineux suffisent pour déterminer graphiquement l'image d'un objet. Généralement, on a recours à quelques points remarquables du système optique tels *foyers*, *sommet* ou encore *centre* de dioptries et/ou miroirs constituant le système optique.
- Pour les constructions graphiques, nous adopterons les conventions et règles suivantes :
 - ✓ Les **axes** (horizontal et vertical) sont **orientés** : **positions** et **tailles**, des *objets* et de leurs *images* seront représentées par des grandeurs **algébriques**.
 - ✓ Les objets et images **réel(le)s** seront représentés en « **trait-plein** »
 - ✓ Les objets et les images **virtuel(le)s** seront représentés en « **pointillés** ».
 - ✓ Les **prolongements** des rayons (*réels*) seront représentés en « pointillés ».

8. Relation de conjugaison et grandissement d'un système

- Le *stigmatisme* d'un système sera traduit par une **relation de conjugaison** qui lie les *abscisses* (positions) des points conjugués A et A' sur l'axe optique du système.
- L'*aplanétique* d'un système l'image $A'B'$, d'un objet AB situé dans un plan transverse, est située elle aussi dans un plan transverse.
- On définit le **grandissement** (*transversal*) noté γ par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \heartsuit$$

- Le **grandissement** γ est une grandeur **algébrique** : γ peut être positif ou négatif.
- En **valeur absolue** $|\gamma|$ est le rapport de la **taille** de l'*objet* ($|\overline{AB}|$) par la **taille** de son *image* ($|\overline{A'B'}|$).
- La valeur ou le signe du *grandissement* γ peut nous renseigner sur certaines propriétés de l'image, sachant les correspondantes suivantes :

Grandissement γ « propriété » correspondante

$\gamma < 0$	image renversée (inversée) - par rapport à l'objet
$\gamma > 0$	image est droite (à l'endroit) - par rapport à l'objet
$ \gamma < 1$	taille de l'image plus petite - que celle de l'objet
$ \gamma > 1$	taille de l'image plus grande - que celle de l'objet
$ \gamma = 1$	taille de l'image égale à celle de l'objet

À RETENIR – FORMULAIRE

- « **Espace objet** » : un **objet** est **réel** s'il est situé **en amont** (à l'avant) du système optique ; sinon, il est virtuel (attention au **sens** de propagation de la lumière).
- « **Espace image** » :
 - Système **dioptrique** : l'**image** est **réelle** si elle se trouve **après** le système optique ; et l'**image** est **virtuelle** si elle est **en amont** (à l'avant) du système optique. A l'inverse ;
 - Système **catadioptrique** : l'**image** est **virtuelle** si elle se trouve **après** le système optique ; et l'**image** est **réelle** si elle est **en amont** (à l'avant) du système optique.
- Le **stigmatisme** traduit une correspondance : « **point** » par « **point** ».
- L'**aplanétisme** traduit une correspondance « **plan transverse** » par « **plan transverse** »
- Les **conditions de Gauss** imposent aux rayons d'être **paraxiaux** et, permettent d'assurer à tout système optique un **stigmatisme** et un **aplanétisme approchés**.
- Le **foyer image** F' est l'**image** d'un **objet** situé à l'infini dans la direction de l'axe optique : $A_\infty \xrightarrow{(S)} F'$
- Le **foyer objet** F a son **image** rejetée à l'infini dans la direction de l'axe optique :

$$F \xrightarrow{(S)} A'_\infty$$

- Les foyers objet F et image F' ne sont **pas conjugués** l'un de l'autre par le système optique.
- Soit $A'B'$ l'**image** d'un objet AB à travers un système optique, on définit le **grandissement** (*transverse*) par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

La valeur ou le signe du **grandissement** γ peut nous renseigner sur certaines propriétés de l'**image** (voir tableau de correspondances).

PAGE VIERGE

Chapitre 3

Miroirs et dioptries

1. Miroirs plans

- Considérons une personne qui regarde le haut d'une rose à travers un miroir plan (voir Figure ci-contre). La rose étant à une distance d_0 du miroir, et on suppose que son image est à la distance d_1 du miroir.

Etablir la relation entre les distances d_0 et d_1 .

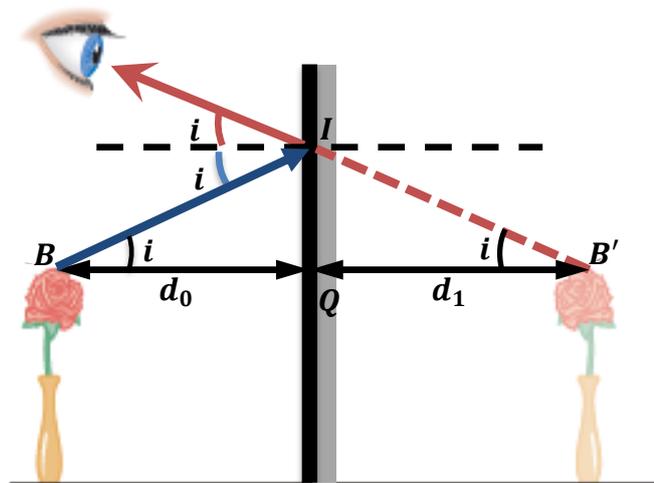
D'après la loi de réflexion, nous savons que l'angle de réflexion est égale à l'angle d'incidence ($r = i$). Le point B' étant l'image du point B à travers le miroir. En considérant les deux triangles, (BQI) et $(B'QI)$, il vient :

$$\tan i = \frac{QI}{d_0} \quad \& \quad \tan i = \frac{QI}{d_1}$$

On en déduit : $d_1 = d_0$.

Ainsi, l'objet (la rose ici) et son image sont **symétriques par rapport** au miroir plan.

- Les Figures 3.1 (a)-(c) illustrent des cas de réflexion sur un miroir plan.
- Le miroir plan est le seul système optique qui soit rigoureusement aplanétique et rigoureusement stigmatique.



Miroir plan – Réflexion et distance de l'image d'un objet.

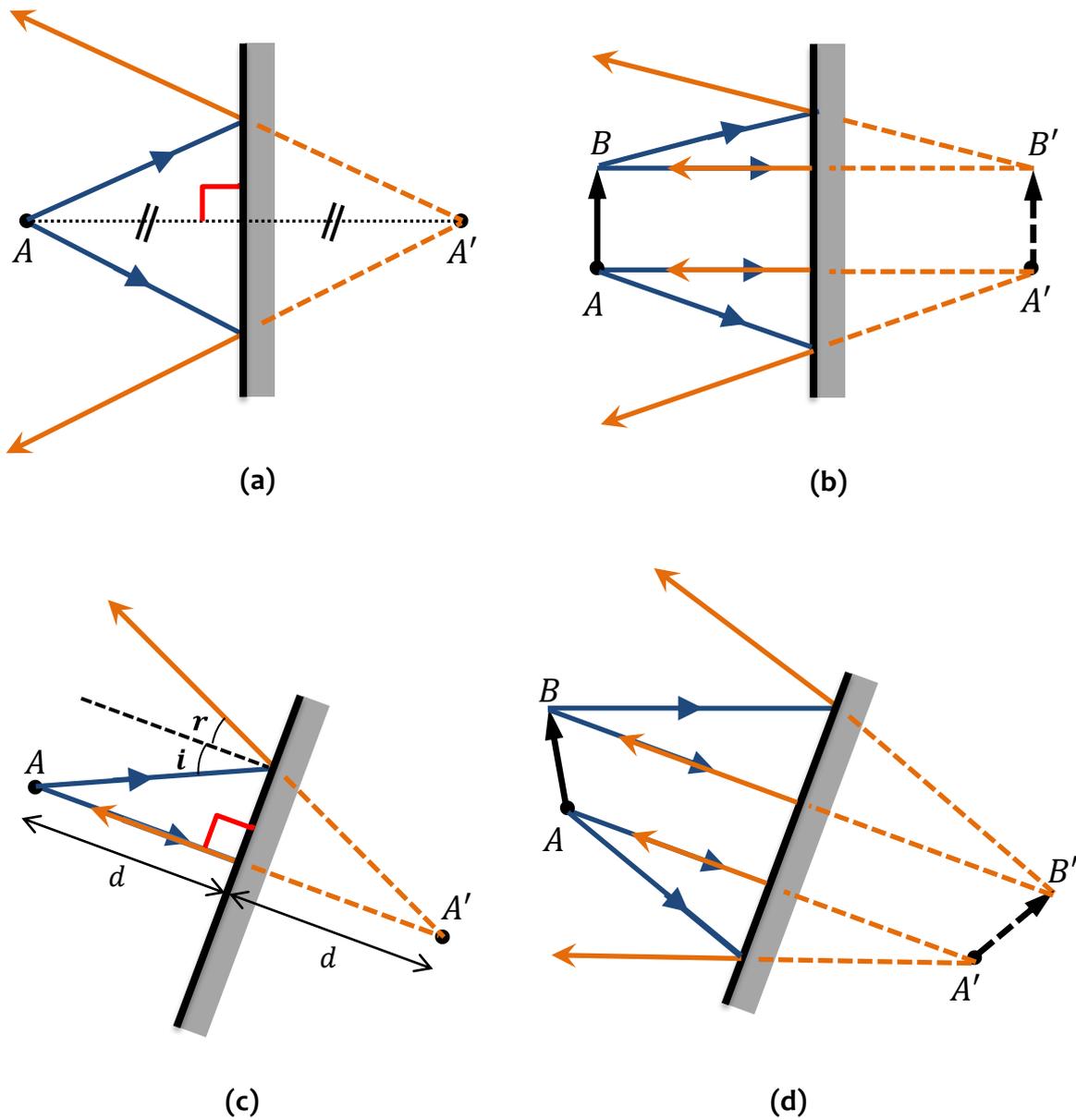


Figure 3.1 (a)-(c) : Réflexion sur un miroir plan (illustrations).

1.1. Relation de conjugaison d'un miroir plan de sommet S – $M_P(S)$

➤ Un objet A et son image A' sont **symétriques** par rapport au miroir plan :

$$\overline{SA'} = -\overline{SA} \quad \heartsuit \quad (3.1)$$

➤ L'équation (3.1) traduit la *relation de conjugaison* du miroir plan, elle peut s'écrire encore sous la forme équivalente :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = 0 \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

avec, symboliquement : $A \xrightarrow{\text{Miroir Plan de sommet } S} A'$ ou encore $A \xrightarrow{M_P(S)} A'$

1.2. Grandissement d'un miroir plan

La Figure 3.1 (b) montre que l'**image** $\overline{A'B'}$ d'un objet \overline{AB} est **droite** (dans le même sens que \overline{AB}) et de **même taille** que l'objet ($|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|$), ce qui se traduit respectivement par : $\gamma > 0$ et $|\gamma| = 1$. Soit finalement : $\gamma = +1$.

➤ Grandissement (transversal) d'un miroir plan est égal à l'unité :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +1 \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

1.3. Foyers objet et image d'un miroir plan

➤ Le **miroir plan** est un système **afocal** : les **foyers objet et image** sont rejetés à l'**infini** (dans la direction de l'axe optique). En effet, à partir de la relation de conjugaison du miroir plan (3.2) et des définitions relatives aux *foyers* objet et image (Cf Chapitre 2), il vient :

$$\checkmark \quad A_\infty \xrightarrow{M_P(S)} F' : \quad \frac{1}{SA_\infty} = 0 \quad \& \quad (3.2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{SF'} = 0 : F' \text{ est rejeté à l'infini}$$

$$\checkmark \quad F \xrightarrow{M_P(S)} A'_\infty : \quad \frac{1}{SA'_\infty} = 0 \quad \& \quad (3.2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{SF} = 0 : F \text{ est rejeté à l'infini}$$

2. Miroirs sphériques

2.1. Définitions et caractéristiques géométriques d'un miroir sphérique

- Un miroir sphérique est une calotte sphérique (portion de sphère) réfléchissante de centre C . L'axe de symétrie de cette calotte étant l'axe optique qui passe donc par le centre C du miroir et coupe le miroir en son sommet S .
- **Caractéristiques géométriques** d'un miroir sphérique :
 - ✓ **Centre** C du miroir, le centre de la sphère réfléchissante dont une partie constitue le miroir.
 - ✓ **Axe optique**, l'axe de symétrie de la calotte sphérique passant par le centre de courbure C et qui coupe le miroir en son sommet S .
 - ✓ **Sommet** S du miroir, le point intersection entre l'axe optique et la surface réfléchissante du miroir.
 - ✓ **Rayon** du miroir R : selon le contexte et les données, il peut alors s'agir soit du rayon de courbure R ($R > 0$) du miroir ou bien du **rayon algébrique** défini par : $R = \overline{SC}$ qui peut être positif ou négatif. Dans ce cours, on adoptera plutôt la seconde « définition ».



➤ **Attention** : tenir compte du **sens** de propagation de la lumière.

- Deux types de miroirs sphériques (voir Figure 3.2) : Selon le signe du rayon (algébrique) R , on distingue les miroirs **concaves** ($R = \overline{SC} < 0$) et **convexes** ($R = \overline{SC} > 0$). La Figure 3.3 illustre en outre le cas d'une inversion du **sens** de propagation de la lumière.

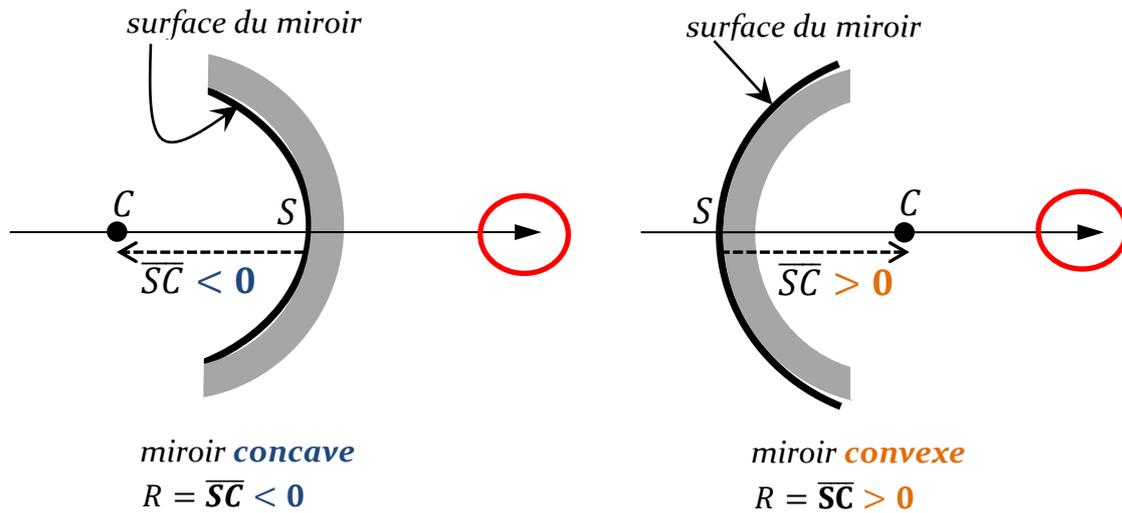


Figure 3.2 : Miroirs sphériques **concave** et **convexe** : aspect et identification des caractéristiques géométriques d'un miroir sphérique : centre C , sommet S et rayon R .

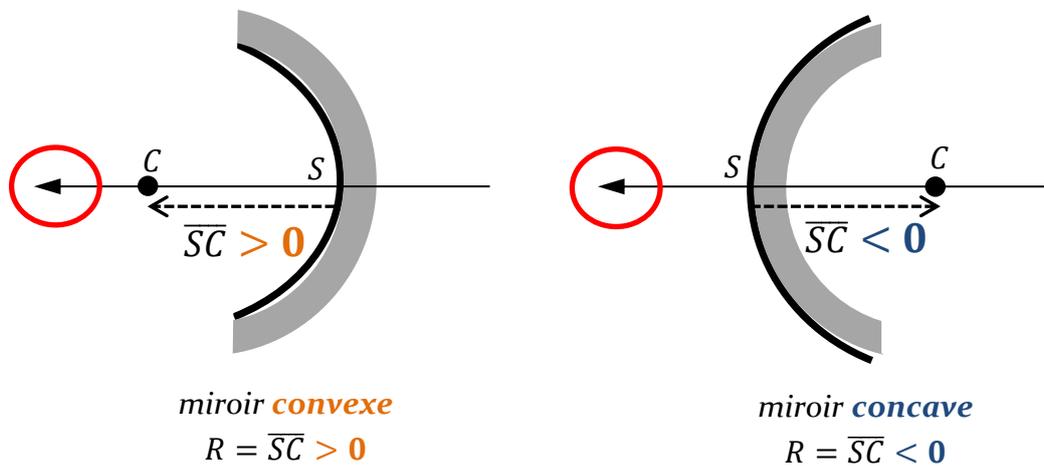


Figure 3.3 : Miroirs sphériques **concave** et **convexe** en inversant le **sens** de propagation de la lumière.

2.2. Réflexion à la surface d'un miroir sphérique

- La Figure 3.4 illustre la réflexion à la surface de miroirs sphériques concave et convexe ; avec, d'après la loi de réflexion, égalité des angles d'incidence et de réflexion : $r = i$.

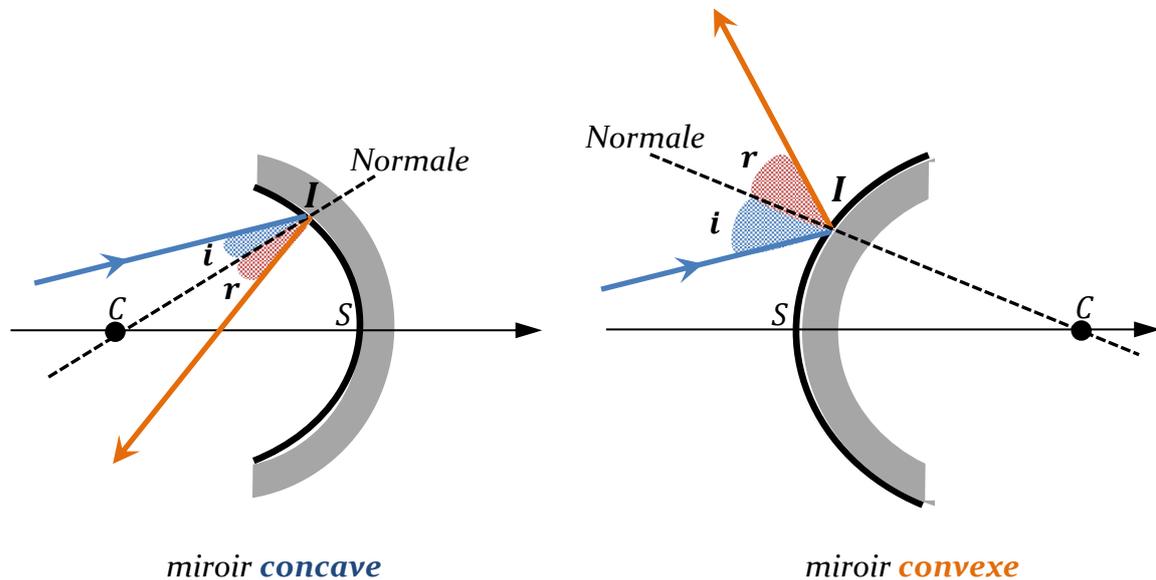


Figure 3.4 : Illustration du phénomène de réflexion à la surface des miroirs sphériques concave et convexe.

■ POINTS PARTICULIERS

- **Centre C du miroir sphérique :** tout rayon passant par le centre C arrive en fait sur le miroir sphérique avec une incidence nulle, après réflexion il revient alors sur lui-même en repassant par C (voir Figure 3.5-a).

Le centre C du miroir sphérique est son propre conjugué, symboliquement :

$$C \xrightarrow{\text{Miroir Sphérique de centre } C (M_S(C))} C$$

- **Sommet S du miroir sphérique :** tout rayon arrivant en S sur le miroir est réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique (voir illustration à la Figure 3.5-b). Le sommet S du miroir sphérique est son propre conjugué, symboliquement :

$$S \xrightarrow{\text{Miroir Sphérique de sommet } S (M_S(S))} S$$

- **Foyer F du miroir sphérique :** les deux **foyers** du miroir sphérique sont **confondus** ($F' = F$) et se trouvent au **milieu** du segment $[CS]$ (voir §2.6 ci-après).

- Tout rayon incident parallèle à l'axe optique sera réfléchi par le miroir sphérique de telle sorte que le rayon réfléchi correspondant passe par le foyer image $F' (= F)$ et tout rayon incident passant par F , une fois réfléchi, émerge parallèle à l'axe optique, le principe de retour inverse est ici manifeste (voir Figures 3.6 & 3.7).

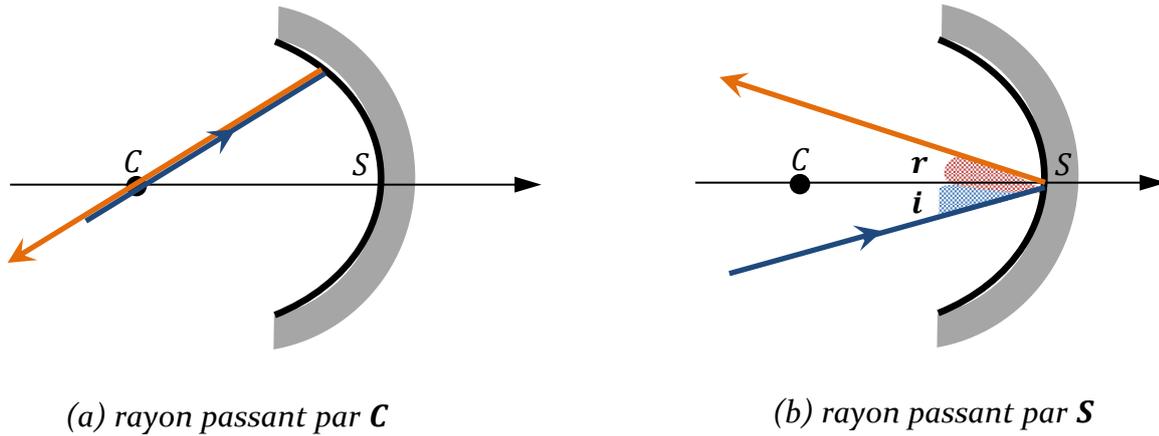


Figure 3.5 : Miroir sphérique – points particuliers

- (a) Réflexion d'un rayon incident passant par le centre C .
- (b) Réflexion d'un rayon incident passant par le sommet S .

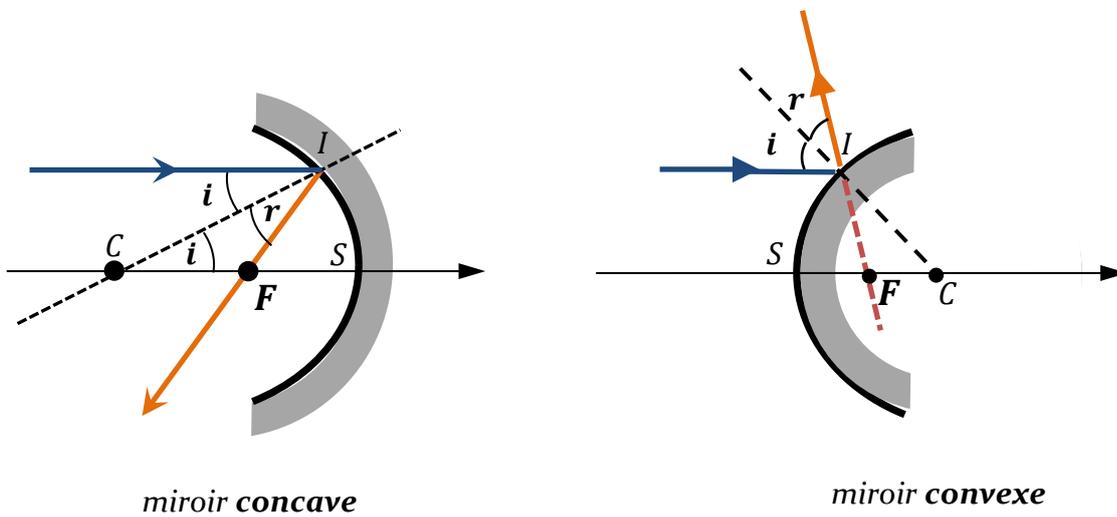


Figure 3.6 : Miroir sphérique - Réflexion d'un rayon incident parallèle à l'axe optique : le rayon réfléchi passe par le foyer F du miroir sphérique ($F' = F$).

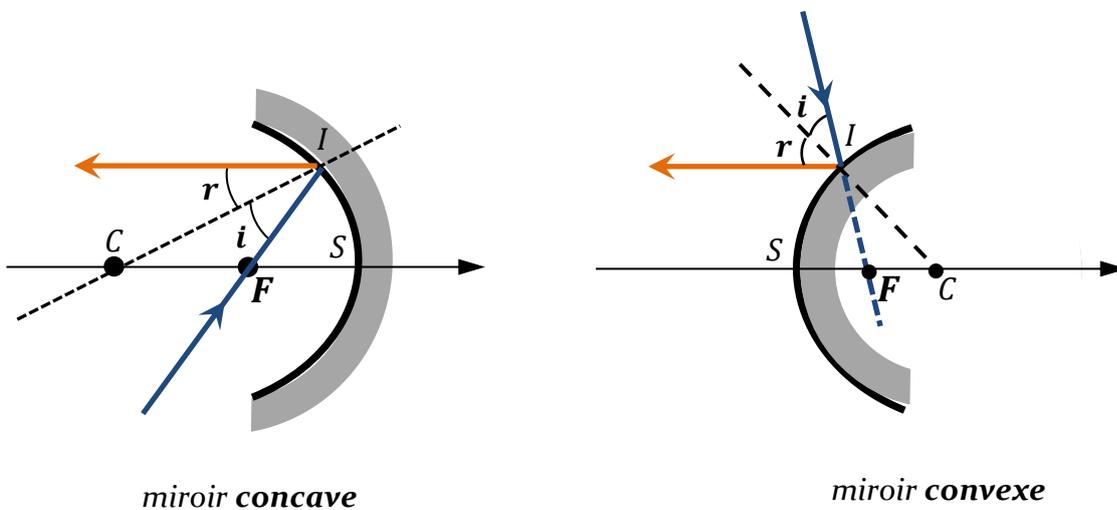


Figure 3.7 : Miroir sphérique - Réflexion d'un rayon incident passant par le foyer F du miroir sphérique : le rayon réfléchi émerge parallèle à l'axe optique .

2.3. Représentation d'un miroir sphérique dans l'approximation de Gauss

- Dans le cadre de l'approximation de Gauss les miroirs sphériques réalisent un stigmatisme et un aplanétisme **approchés** et ils sont représentés comme indiqué à la Figure 3.8.

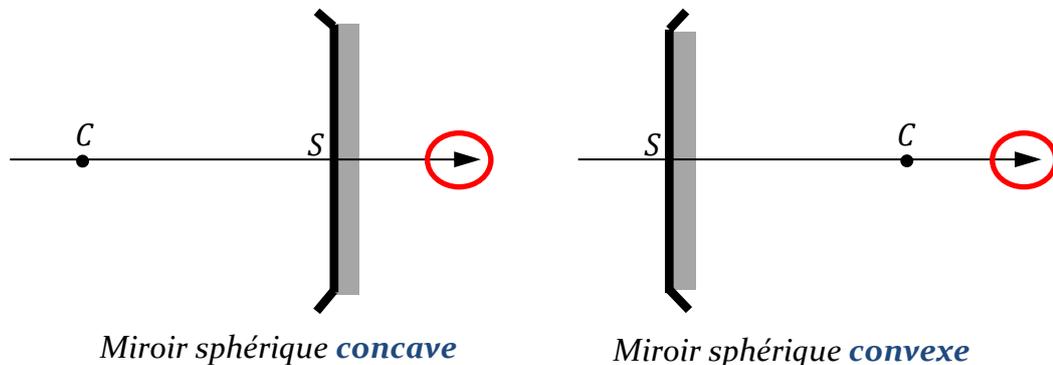


Figure 3.8 : Représentation dans les conditions de Gauss des miroirs sphériques concave et convexe. **Attention** au **sens** de propagation de la lumière.

2.4. Grandissement d'un miroir sphérique

- La Figure 3.9 illustre la construction de l'image d'un objet réel AB à travers un miroir sphérique concave. On considère pour cela deux rayons incidents partant de B et passant respectivement par le sommet S et, par le centre C du miroir. Les émergents de ces deux rayons permet de trouver graphiquement B' , le conjugué de B . Ensuite et grâce à la propriété d'aplanétisme, on déduit finalement par construction l'image $A'B'$ (image de l'objet AB).

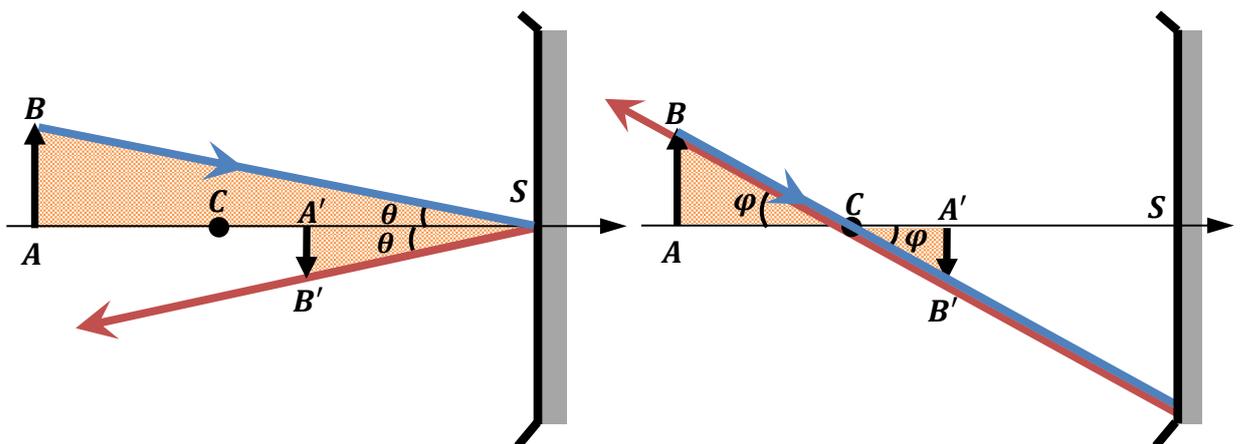


Figure 3.9 : Grandissement d'un miroir sphérique – Illustration de l'image $A'B'$ d'un objet réel AB situé avant le centre C d'un miroir concave.

Tenant compte des notations de la Figure 3.9, il vient :

- ✓ en considérant les triangles (BSA) et $(A'SB')$:

$$\tan \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} \quad \& \quad \tan \theta = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{A'S}} \quad (1)$$

- ✓ en considérant les triangles (BCA) et $(CA'B')$:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \& \quad \tan \varphi = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{CA'}} \quad (2)$$

Des équations (1) et (2), on déduit l'expression suivante du grandissement.

- **Grandissement d'un miroir sphérique avec origine en S ou en C :**

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = +\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

2.5. Relation de conjugaison d'un miroir sphérique

– Formule de Descartes

■ ORIGINE EN S

- A partir de l'égalité de l'équation (3.4), et en utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = +\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} &= +\frac{\overline{CS} + \overline{SA'}}{\overline{CS} + \overline{SA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \times \frac{1 - \frac{\overline{SC}}{\overline{SA'}}}{1 - \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}}} \Rightarrow -1 = \frac{1 - \frac{\overline{SC}}{\overline{SA'}}}{1 - \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}}} \\ \Rightarrow -1 + \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} &= 1 - \frac{\overline{SC}}{\overline{SA'}} \Rightarrow \frac{\overline{SC}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \end{aligned}$$

- **Relation de conjugaison d'un miroir sphérique avec origine en S (Descartes):**

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \heartsuit \quad (3.5)$$

avec : $A \xrightarrow{M_S(S)} A'$

■ ORIGINE EN C

- En reprenant encore l'égalité de l'équation (3.4) et en utilisant la relation de Chasles mais avec cette fois l'origine au centre C, il vient :

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = +\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} &\Rightarrow -\frac{\overline{SC} + \overline{CA'}}{\overline{SC} + \overline{CA}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \Rightarrow -\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \times \frac{-\frac{\overline{CS}}{\overline{CA'}} + 1}{-\frac{\overline{CS}}{\overline{CA}} + 1} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \\ \Rightarrow -\frac{-\frac{\overline{CS}}{\overline{CA'}} + 1}{-\frac{\overline{CS}}{\overline{CA}} + 1} &= 1 \Rightarrow \frac{\overline{CS}}{\overline{CA'}} - 1 = -\frac{\overline{CS}}{\overline{CA}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{CS}}{\overline{CA'}} + \frac{\overline{CS}}{\overline{CA}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \end{aligned}$$

➤ **Relation de conjugaison d'un miroir sphérique avec origine en C (Descartes):**

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad \heartsuit \quad (3.6)$$

avec : $A \xrightarrow{M_S(C)} A'$

■ REMARQUE

La *formule de Descartes* est très importante : à tout point objet A est associée une image A' et une seule ; et inversement, pour toute image A' il existe un objet unique A qui lui est associé. Noter par ailleurs que dans la formule de Descartes les points A et A' jouent des rôles symétriques : en inversant A et A' , la relation est inchangée.

2.6. Foyer et distance focale d'un miroir sphérique

■ FOYER D'UN MIROIR SPHÉRIQUE

➤ A partir des définitions relatives aux *foyers* d'un système optique et de la formule de Descartes, on déduit :

✓ **Foyer image** $F' : A_\infty \xrightarrow{M_S(S)} F'$. La formule de Descartes (origine en S) donne pour $\frac{1}{\overline{SA_\infty}} = 0$:

$$\frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

✓ **Foyer objet** $F : F \xrightarrow{M_S(S)} A'_\infty$. La formule de Descartes (origine en S) donne pour $\frac{1}{\overline{SA'_\infty}} = 0$:

$$\frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

➤ Le miroir sphérique possède **un foyer double** (ses foyers objet et image sont **confondus** : $F = F'$) et ce foyer est situé au **milieu** du segment $[SC]$:

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2} \quad \heartsuit \quad (3.7)$$

■ DISTANCE FOCALE D'UN MIROIR SPHÉRIQUE

➤ On définit, pour tout système optique centré :

✓ **distance focale objet** (f) : correspond à la distance algébrique séparant le sommet S du miroir au foyer objet (F) : $f = \overline{SF}$.

✓ **distance focale image** (f') : correspond à la distance algébrique séparant le sommet S du miroir au foyer image (F') : $f' = \overline{SF'}$.



➤ Les **distances focales** objet et image d'un miroir sphérique sont **égales** puisque les *foyers* objet et image sont **confondus** (voir illustration Figure 3.10).

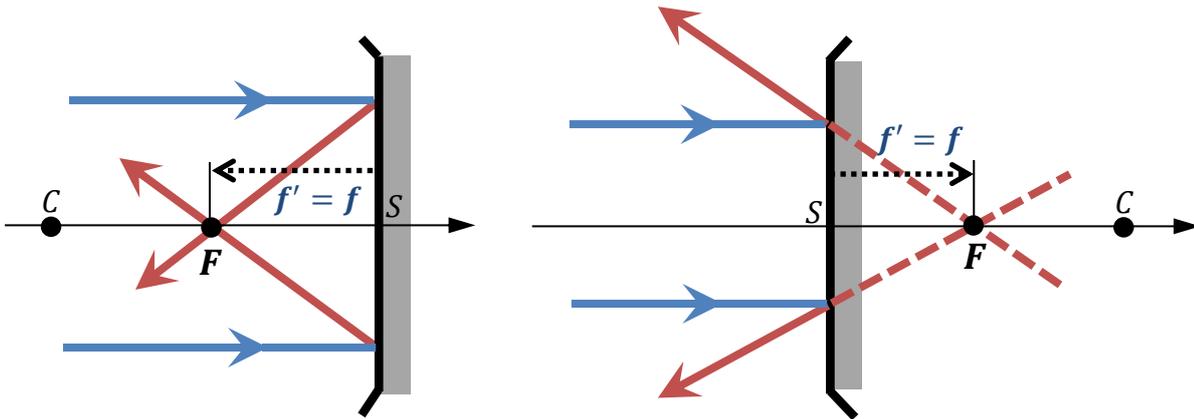


Figure 3.10 : Distance focale d'un miroir sphérique – Illustration.

➤ Distance focale d'un miroir sphérique :

$$f = f' = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2} \quad \heartsuit \quad (3.8)$$

2.7. Relation de conjugaison et grandissement d'un miroir sphérique (origine aux foyers) – Formule de Newton

➤ La Figure 3.11 illustre l'image d'un objet réel situé avant le centre C d'un miroir concave. Des triangles (A'F'B') et (F'IS), puis (AFB) et (FSJ), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} &= \frac{\overline{SI}}{\overline{F'S}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{F'S}} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} &= \frac{\overline{JS}}{\overline{FS}} = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{FS}} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} \end{aligned}$$

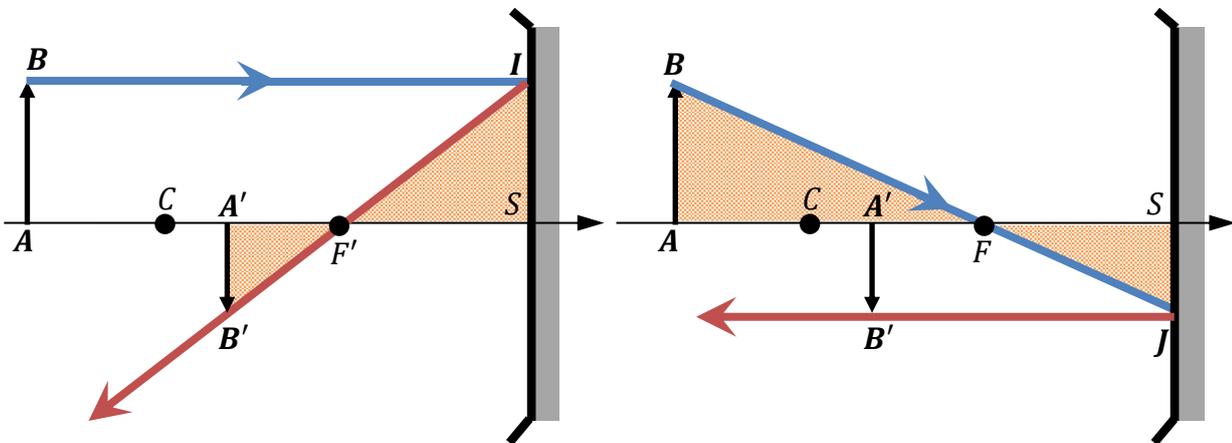


Figure 3.11 : Miroir sphérique – Relation de conjugaison de Newton (origines aux foyers) – illustration de l'image d'un objet réel situé avant le centre C d'un miroir concave.

- **Relation de conjugaison** d'un miroir sphérique (origine aux **foyers**) –
Formule de **Newton** :

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = ff' = f'^2 = f^2 \quad (3.9)$$

- **Grandissement** d'un miroir sphérique (origine aux **foyers**) –
Formule de **Newton** :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}} \quad (3.10)$$

- **Rappel** : dans le cas du miroir sphérique, les foyers F et F' sont confondus ($F = F'$) et les distances focales image et objet sont égales ($f = f'$).
- **EXERCICE** : A partir de la relation de conjugaison - formule de Newton, retrouver celle de la formule de Descartes.

Solution : des équations [3.4] et [3.10] on déduit,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} &= -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{\overline{F'S} + \overline{SA'}}{-\overline{F'S}} = 1 + \frac{\overline{SA'}}{\overline{F'S}} = 1 - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SF'}} \\ -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} &= 1 - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SF'}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{1}{f'} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad (cqfd) \end{aligned}$$

2.8. Vergence d'un miroir sphérique

- La **vergence** (V) d'un miroir sphérique est égale à :

$$V = -\frac{2}{\overline{SC}} = -\frac{2}{R} \quad \heartsuit \quad (3.11)$$

ou encore, à partir de la *Formule de Descartes*-origine en S , équation (3.5) :

$$V = -\frac{2}{\overline{SC}} = -\left(\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}}\right) \quad (3.12)$$

La **vergence** V s'exprime en **dioptries** (symbole, δ) où $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$.

➤ **REMARQUES** :

- 1) Tout système optique, quel qu'il soit, est :
 - ✓ **convergent** si sa vergence est positive ($V > 0$) ;
 - ✓ **divergent** si sa vergence est négative ($V < 0$) ;
 - ✓ **afocal** si sa vergence est nulle ($V = 0$).

Ainsi dans le cas du miroir sphérique, un miroir concave ($V > 0$) est donc un système convergent tandis que le miroir convexe ($V < 0$) est divergent.

- 2) Signalons que la vergence d'un miroir sphérique placé dans un milieu d'indice de réfraction n s'écrit plutôt :

$$V = -\frac{2n}{\overline{SC}} \quad (3.13)$$

Ainsi, l'expression de la vergence donnée dans l'équation (3.11) concerne en fait la vergence d'un miroir sphérique placé dans l'air.

2.9. Règles préliminaires pour les constructions géométriques

- La construction géométrique de l'image $A'B'$ d'un objet AB par un miroir sphérique est réalisée en utilisant les points particuliers S , C et $F = F'$ et les rayons passant par ces points : des rayons « utiles » dont nous connaissons les caractéristiques.
- La première étape consiste à déterminer géométriquement l'image B' du point B situé **hors** de l'axe optique.

■ RAYONS UTILES POUR CONSTRUIRE L'IMAGE B' D'UN OBJET B SITUÉ HORS DE L'AXE OPTIQUE

- Quatre rayons « utiles » permettent de trouver graphiquement l'image B' du point B situé hors de l'axe optique. Ces rayons particuliers, numérotés ①, ②, ③ et ④, se trouvent énoncés et illustrés au Tableau 3.1.
- La construction de l'image B' est illustrée à la Figure 3.12. Noter au passage que, grâce à la propriété de stigmatisme, deux rayons seulement (de ces quatre rayons utiles) suffisent pour trouver B' ; toutefois il est vivement recommandé d'utiliser un troisième rayon pour vérifier la construction réalisée. Enfin, signalons que le rayon ④ sera peu usité dans la suite de ce cours car il s'avère le moins pratique à exploiter.

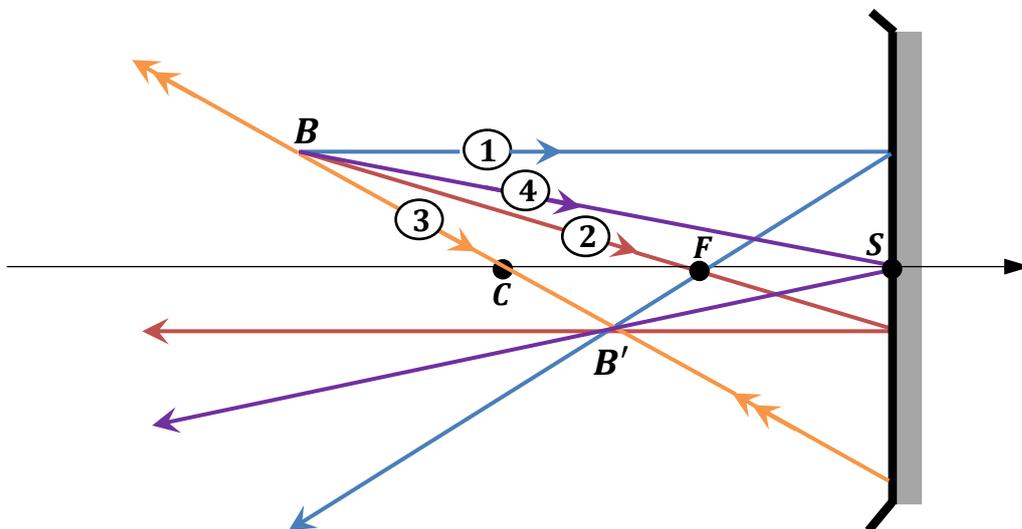
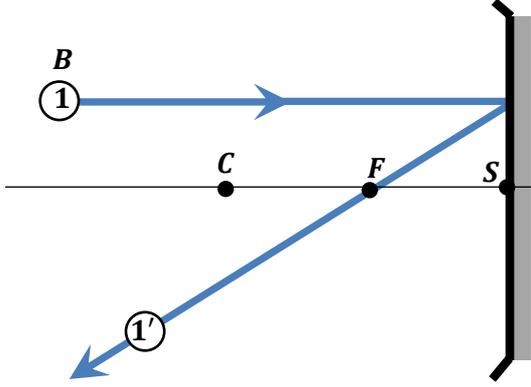
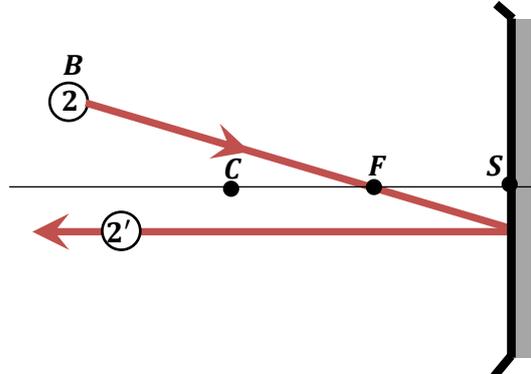
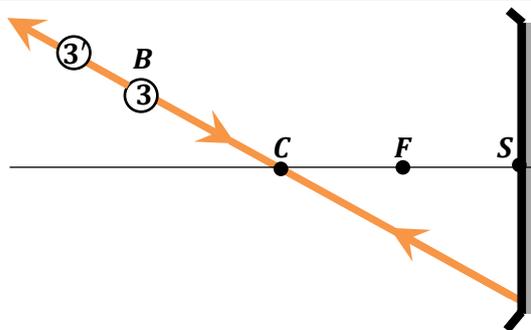
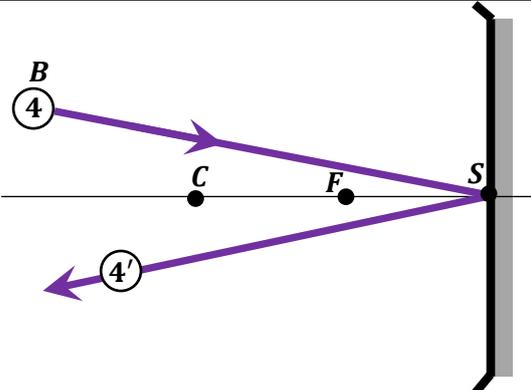


Figure 3.12 : Miroirs sphériques – Construction de l'image B' d'un point B situé hors de l'axe optique et ce, en utilisant les quatre rayons utiles ①, ②, ③ et ④ (voir Tableau 3.1).

Tableau 3.1: Miroirs sphériques – Les quatre rayons utiles ①, ②, ③ et ④ pour construire l'image B' d'un point B situé hors de l'axe optique.

<p>①</p>	<p>Le rayon incident (ou son prolongement) passant par B, parallèle à l'axe optique : le rayon réfléchi passe par le foyer F (confondu avec F').</p>	
<p>②</p>	<p>Le rayon incident (ou son prolongement) passant par B et le foyer F : le rayon réfléchi est parallèle à l'axe optique.</p>	
<p>③</p>	<p>Le rayon incident (ou son prolongement) passant par B et le centre C : le rayon réfléchi est confondu avec lui (revient sur lui-même).</p>	
<p>④</p>	<p>Le rayon incident (ou son prolongement) passant par B et le sommet S : le rayon réfléchi est (son) symétrique par rapport à l'axe optique.</p>	

■ CONSTRUCTION DE L'IMAGE A' ET DE L'IMAGE $A'B'$

- L'image $A'B'$ est perpendiculaire à l'axe optique (puisque l'on a aplanétisme) ; A' , l'image de A , est alors obtenue en projetant (perpendiculairement) B' sur l'axe optique. La construction de A' et de $A'B'$ sont illustrées à la Figure 3.13 ci-après.

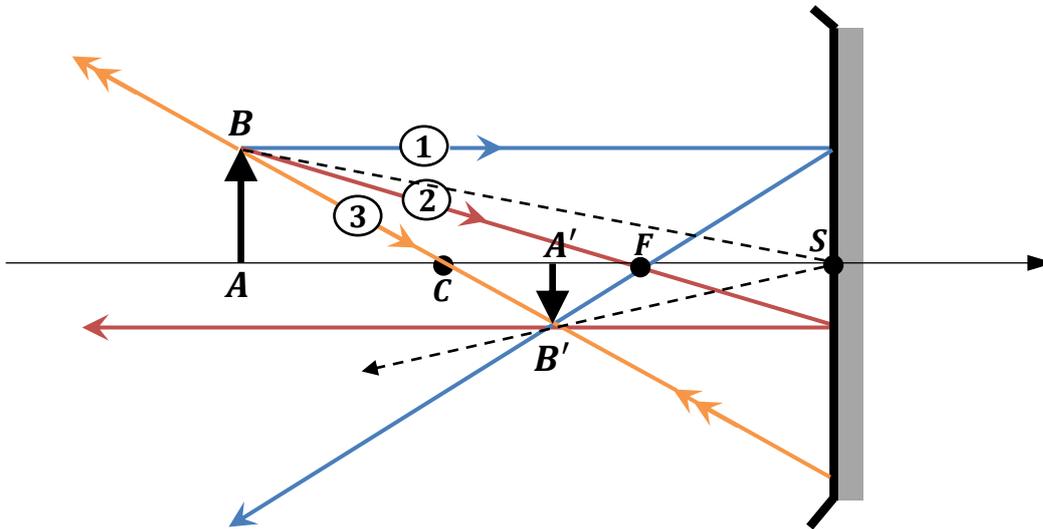


Figure 3.13 : Miroirs sphériques – Construction de l'image A' puis de l'image $A'B'$.

2.10. Miroir concave : constructions géométriques

Il s'agit de réaliser les constructions correspondant à toutes les configurations possibles relatives à un miroir concave.

- Suivant la position de l'objet, le Tableau 3.2 résume alors l'étude des constructions d'images à travers un miroir sphérique concave, ce qui permet notamment de constater graphiquement la nature, l'orientation et la taille de l'image. Et, pour plus de clarté, ces constructions sont reproduites aux Figures 3.14 à 3.17.
- On vous conseille vivement de refaire soigneusement toutes ces constructions.

Tableau 3.2 : Miroir concave – Constructions d'images suivant la position de l'objet, ce qui permet de déduire graphiquement la nature, l'orientation et la taille de l'image.

Objet	Image	Construction
réel avant C $-\infty < \overline{SA} < 2f$	réelle $\overline{SA'} > 2f$ renversée plus petite $-1 < \gamma < 0$	
réel entre C et F $2f < \overline{SA} < f$	réelle $\overline{SA'} < 2f$ renversée agrandie $-\infty < \gamma < -1$	
réel entre F et S $f < \overline{SA} < 0$	virtuelle droite agrandie $1 < \gamma < \infty$	
virtuel après S $\overline{SA} > 0$	réelle droite plus petite $0 < \gamma < 1$	

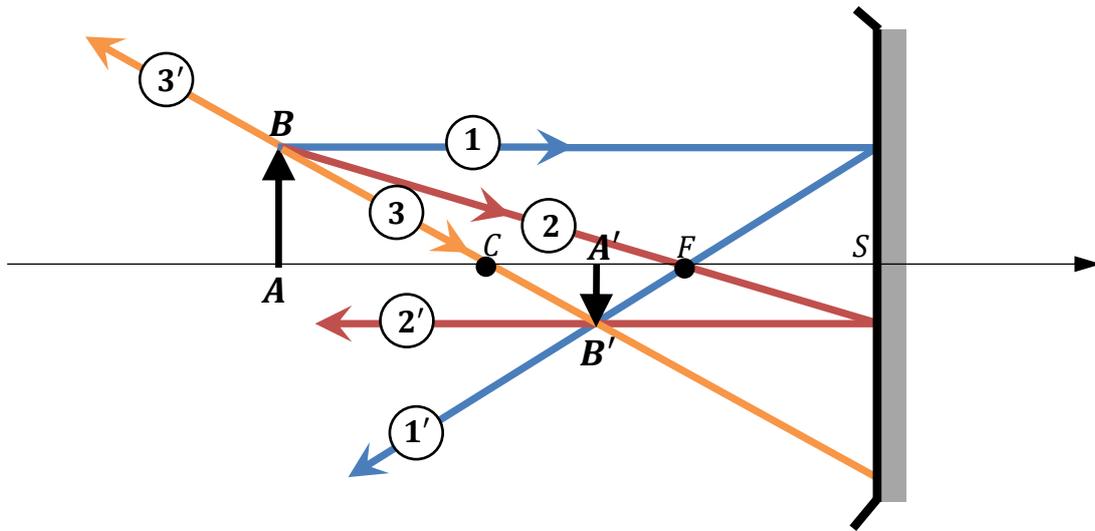


Figure 3.14 : Miroir concave ($-\infty < \overline{SA} < 2f$) – Construction de l’image d’un objet réel situé avant C (centre) d’un miroir concave.

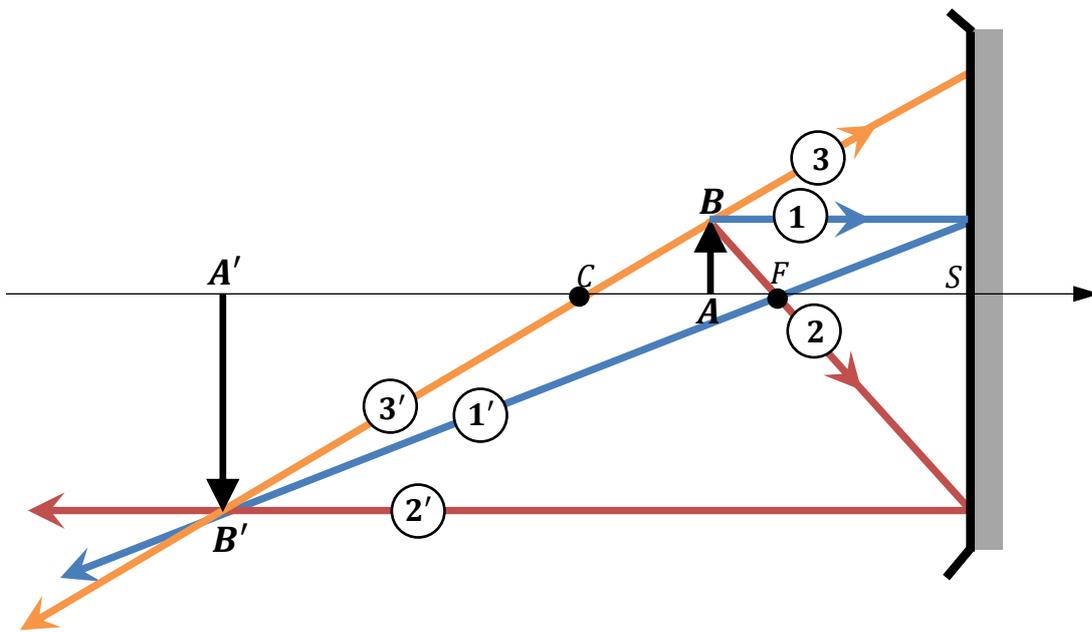


Figure 3.15 : Miroir concave ($2f < \overline{SA} < f$) – Construction de l’image d’un objet réel situé entre C et F (centre et foyer) d’un miroir concave.

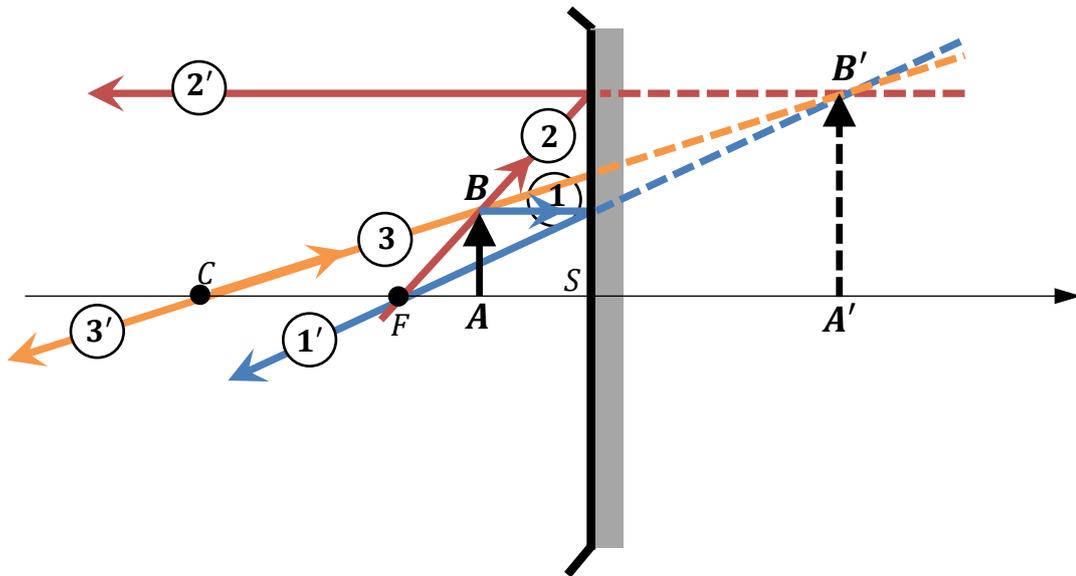


Figure 3.16 : Miroir concave ($f < \overline{SA} < 0$) – Construction de l'image d'un objet réel situé entre F et S (foyer et sommet) d'un miroir concave.

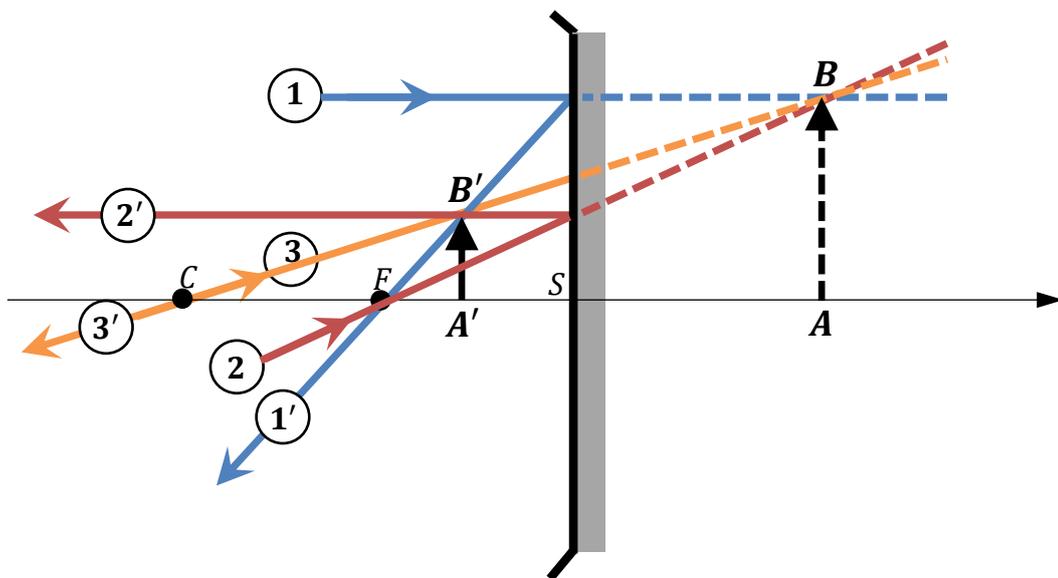


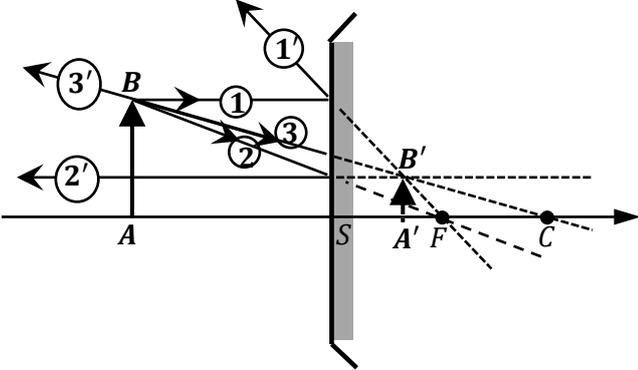
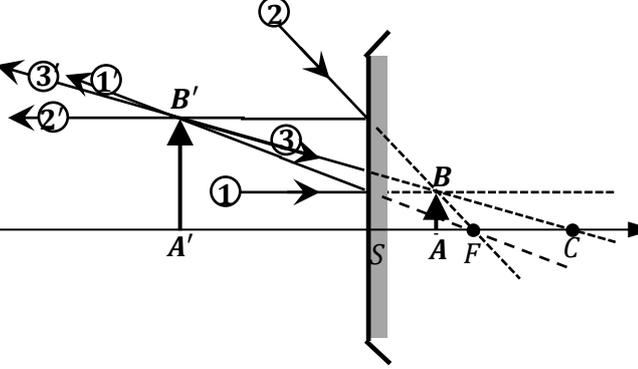
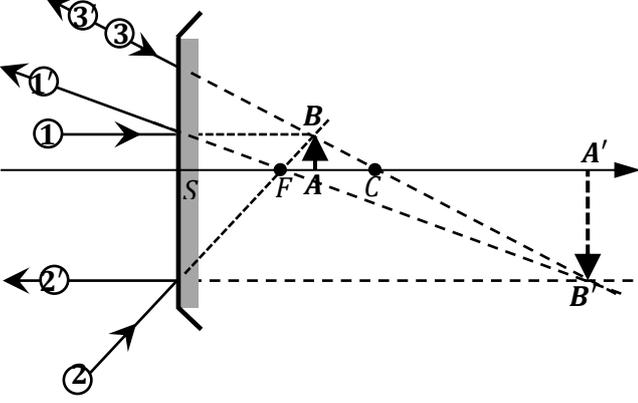
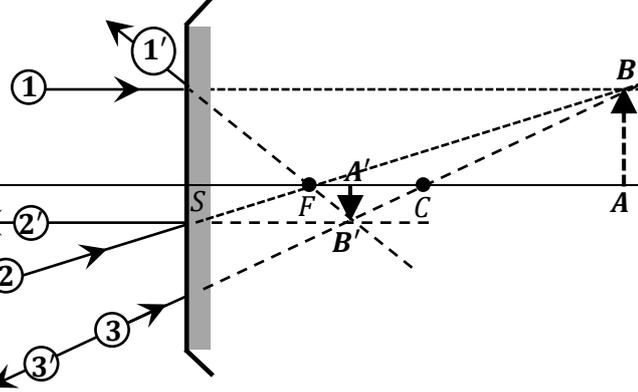
Figure 3.17 : Miroir concave ($\overline{SA} > 0$) – Construction de l'image d'un objet virtuel.

2.11. Miroir convexe : constructions géométriques

Il s'agit là aussi de réaliser les constructions correspondant à toutes les configurations possibles.

- Le Tableau 3.3 résume l'étude des constructions d'images à travers un miroir sphérique convexe et ce, suivant la position de l'objet. Cela permet de déduire **graphiquement** la *nature*, l'*orientation* et la *taille* de l'image. Pour plus de clarté, ces constructions sont reproduites aux Figures 3.18 à 3.21
- On vous conseille vivement de refaire toutes ces constructions.

Tableau 3.3 : Miroir convexe – Constructions d'images suivant la position de l'objet, ce qui permet de déduire graphiquement la nature, l'orientation et la taille de l'image.

Objet	Image	Construction
Réel (avant S) : $\overline{SA} < 0$	virtuelle droite plus petite $0 < \gamma < 1$	
Virtuel entre S et F : $0 < \overline{SA} < f$	réelle droite agrandie $1 < \gamma < +\infty$	
Virtuel entre F et C : $f < \overline{SA} < 2f$	virtuelle renversée agrandie $-\infty < \gamma < -1$	
Virtuel après C $2f < \overline{SA} < +\infty$	virtuelle renversée plus petite $-1 < \gamma < 0$	

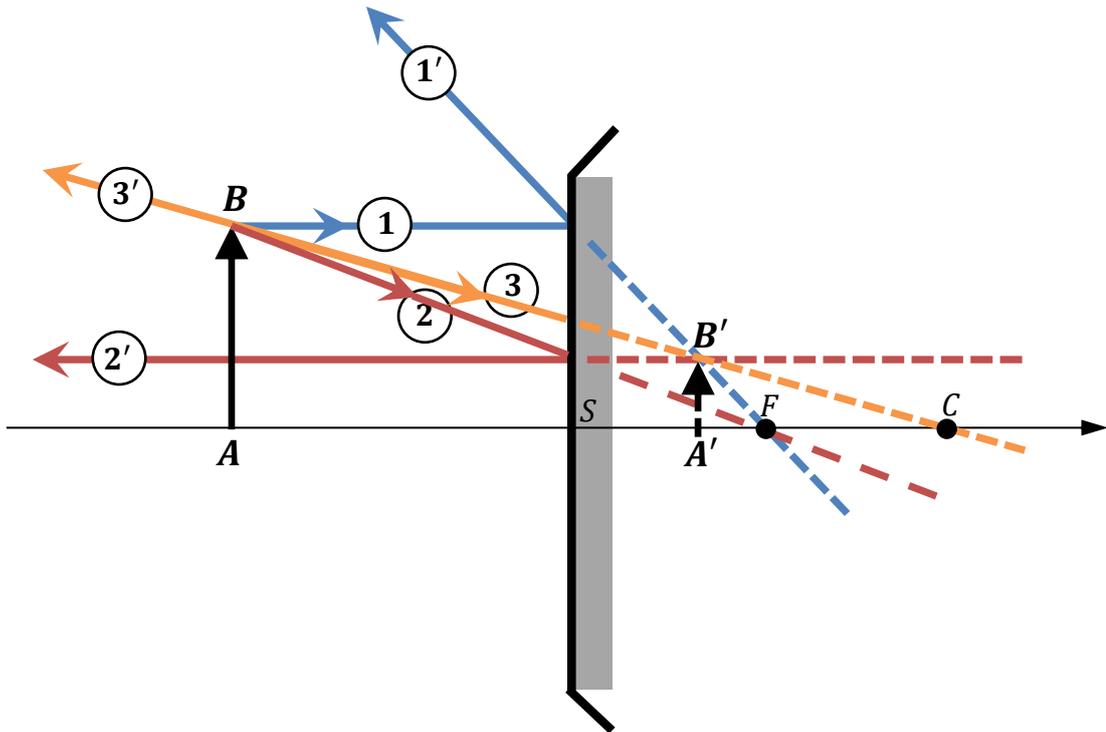


Figure 3.18 : Miroir convexe, $\overline{SA} < 0$ – Construction de l'image d'un objet réel.

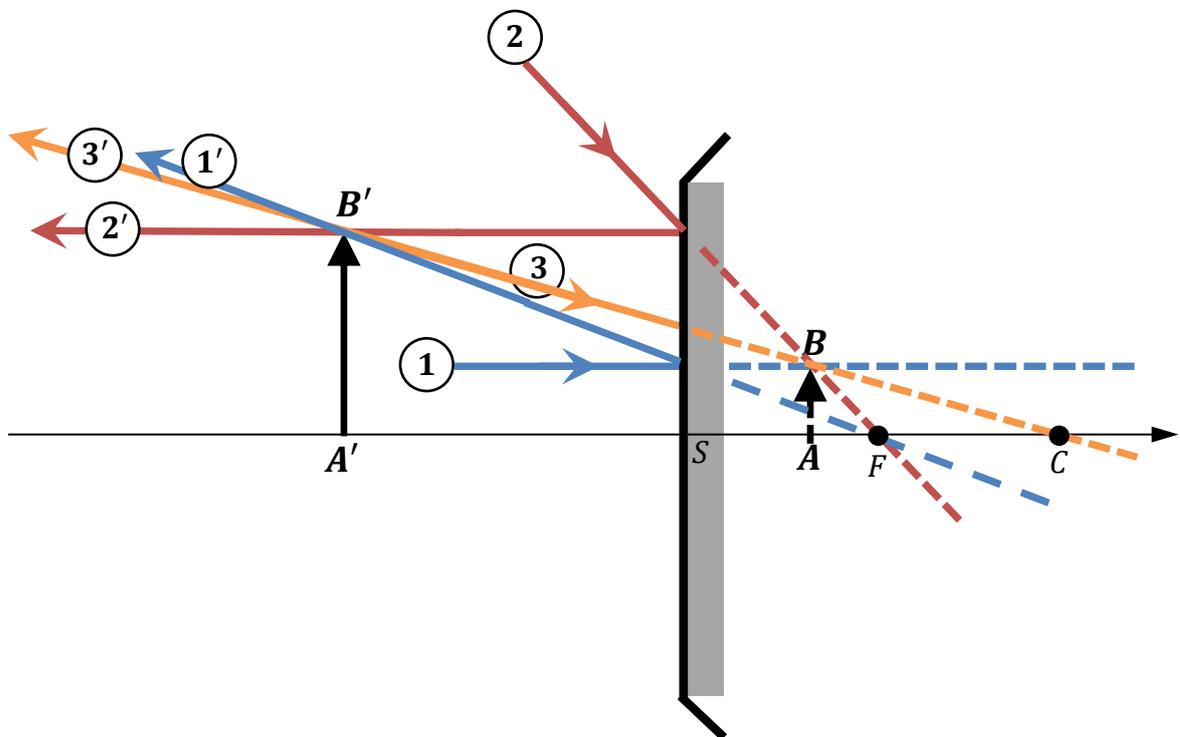


Figure 3.19 : Miroir convexe, $0 < \overline{SA} < f$ – Construction de l'image d'un objet virtuel situé entre S et F (sommet et foyer) d'un miroir convexe.

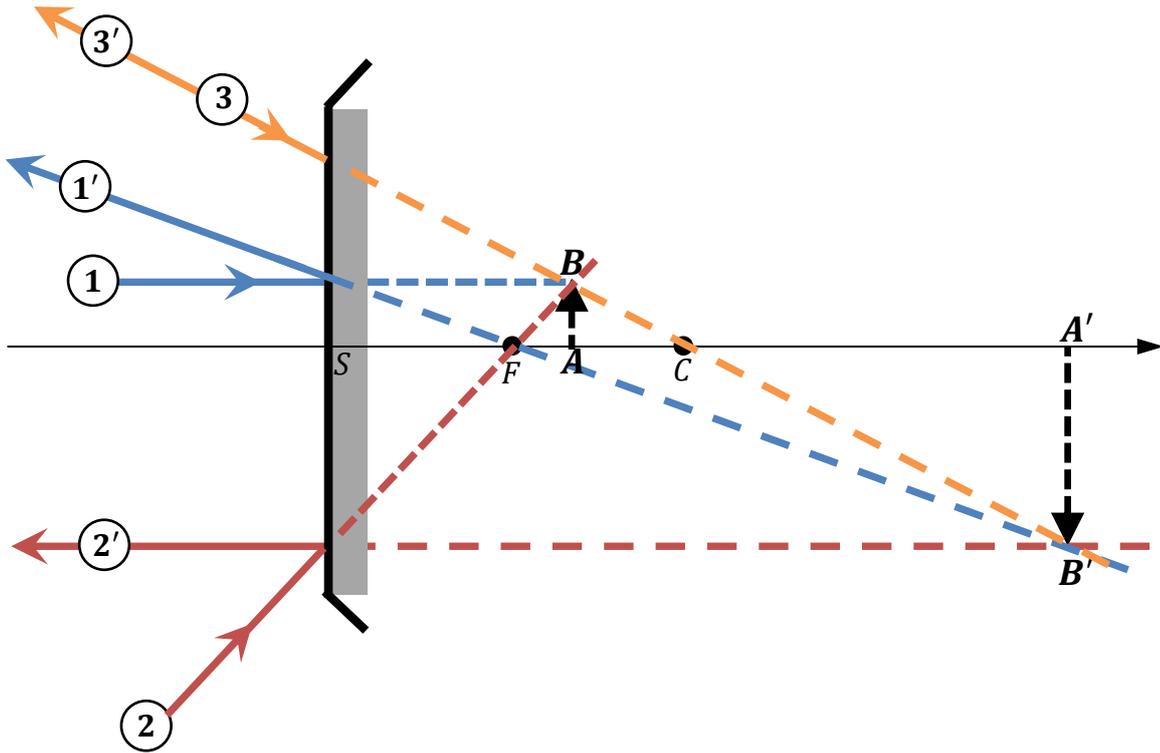


Figure 3.20 : Miroir convexe, $f < \overline{SA} < 2f$ – Construction de l'image d'un objet virtuel situé entre F et C (foyer et centre) d'un miroir convexe.

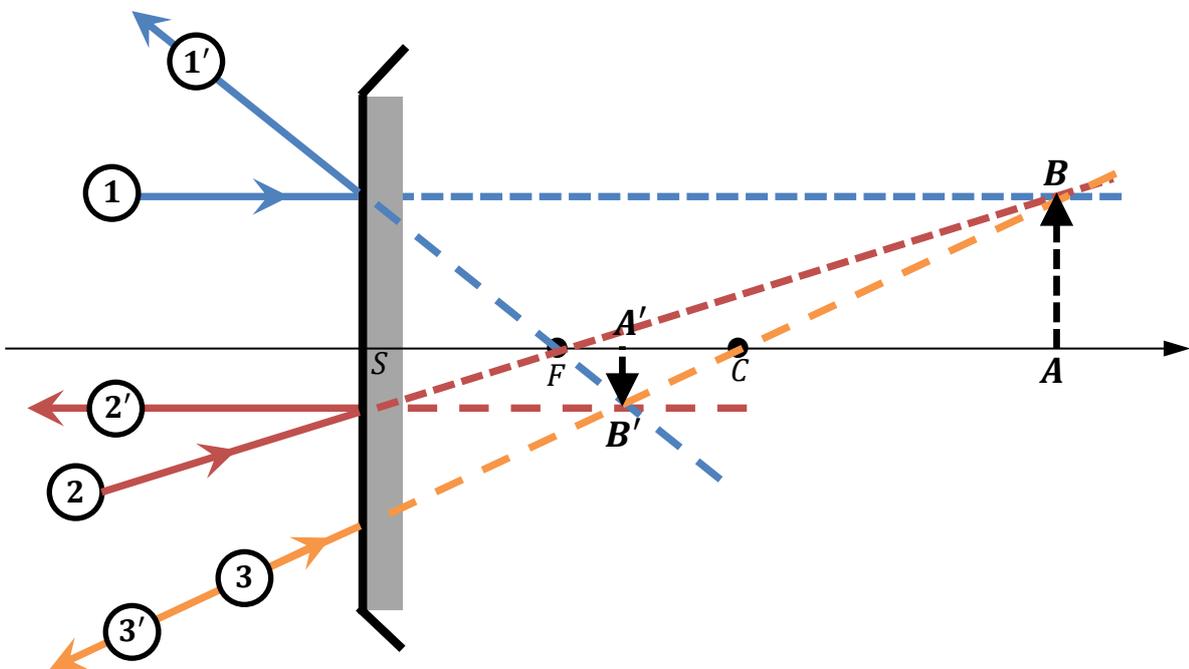


Figure 3.21 : Miroir convexe, $2f < \overline{SA} < +\infty$ – Construction de l'image d'un objet virtuel situé après C (centre) d'un miroir convexe.

2.12. Construction d'un rayon réfléchi correspondant à un incident donné

On cherche à déterminer **graphiquement** le rayon réfléchi d'un rayon **incident donné** qui arrive sur un miroir sphérique.

- Nous allons recourir à deux rayons particuliers, numérotés ⑤ et ⑥, qui exploitent deux foyers secondaires particuliers et qui se trouvent décrits au Tableau 3.4. Signalons au passage que le rayon utile ③ introduit précédemment (Cf. Tableau 3.1) sera également exploité à cet effet.

Tableau 3.4 : Miroirs sphériques – Les deux rayons supplémentaires ⑤ et ⑥ utiles pour la construction du rayon réfléchi d'un rayon incident donné arrivant sur un miroir sphérique.

⑤	Deux rayons incidents <u>parallèles</u> donnent des rayons réfléchis qui (eux ou leurs prolongements) se croisent dans le <u>plan focal image</u>
---	--

⑥	Deux rayons incidents qui (eux ou leurs prolongements) se croisent dans le <u>plan focal objet</u> donnent des rayons réfléchis <u>parallèles</u> entre eux
---	--

■ CAS DU MIROIR CONCAVE

- La Figure 3.22 illustre comment déduire le rayon *réfléchi* d'un *incident* donné arrivant sur un miroir **concave** et ce en utilisant :

(a) un foyer image secondaire (F'_S) particulier :

On trace le rayon parallèle au rayon incident donné et passant par le centre C . Ce rayon est réfléchi sur lui-même et croise le rayon réfléchi recherché à un même foyer image secondaire F'_S : intersection du plan focal image et du rayon passant par C .

(b) un foyer objet secondaire (F_S) particulier :

On trace le rayon passant par C qui coupe le rayon incident donné dans le plan focal objet au point F_S , foyer objet secondaire : les deux rayons réfléchis sont alors parallèles entre eux.

- Rappelons au passage que pour les miroirs sphériques, les foyers objet et image sont confondus.

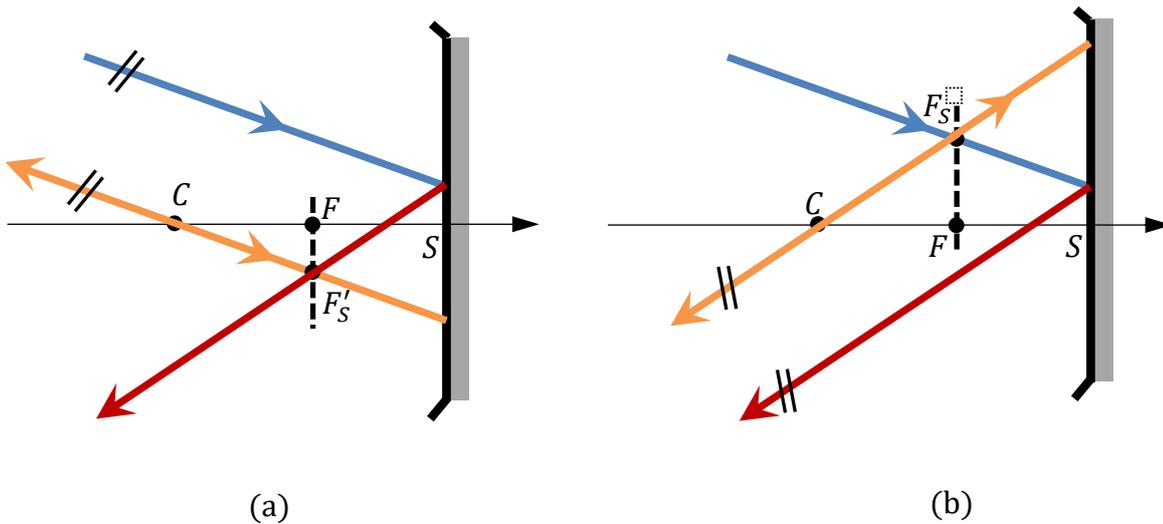


Figure 3.22 : Miroir concave - Construction d'un rayon réfléchi correspondant à un incident donné et ce en exploitant : (a) un foyer image secondaire particulier ; (b) un foyer objet secondaire particulier.

■ CAS DU MIROIR CONVEXE

➤ La Figure 3.23 illustre la façon de déduire le rayon *réfléchi* d'un rayon *incident* donné arrivant sur un miroir **convexe** et ce en utilisant :

(a) un foyer image secondaire (F'_S) particulier :

On trace le rayon parallèle au rayon incident donné et dont le prolongement passe par le centre C . Ce rayon est réfléchi sur lui-même et croise le prolongement du rayon réfléchi recherché à un même foyer image secondaire F'_S : intersection du plan focal image et du rayon passant par C .

(b) un foyer objet secondaire (F_S) particulier :

On trace le rayon dont le prolongement passe par le centre C et qui coupe le prolongement du rayon incident donné dans le plan focal objet au point F_S , foyer objet secondaire : les deux rayons réfléchis sont alors parallèles entre eux.

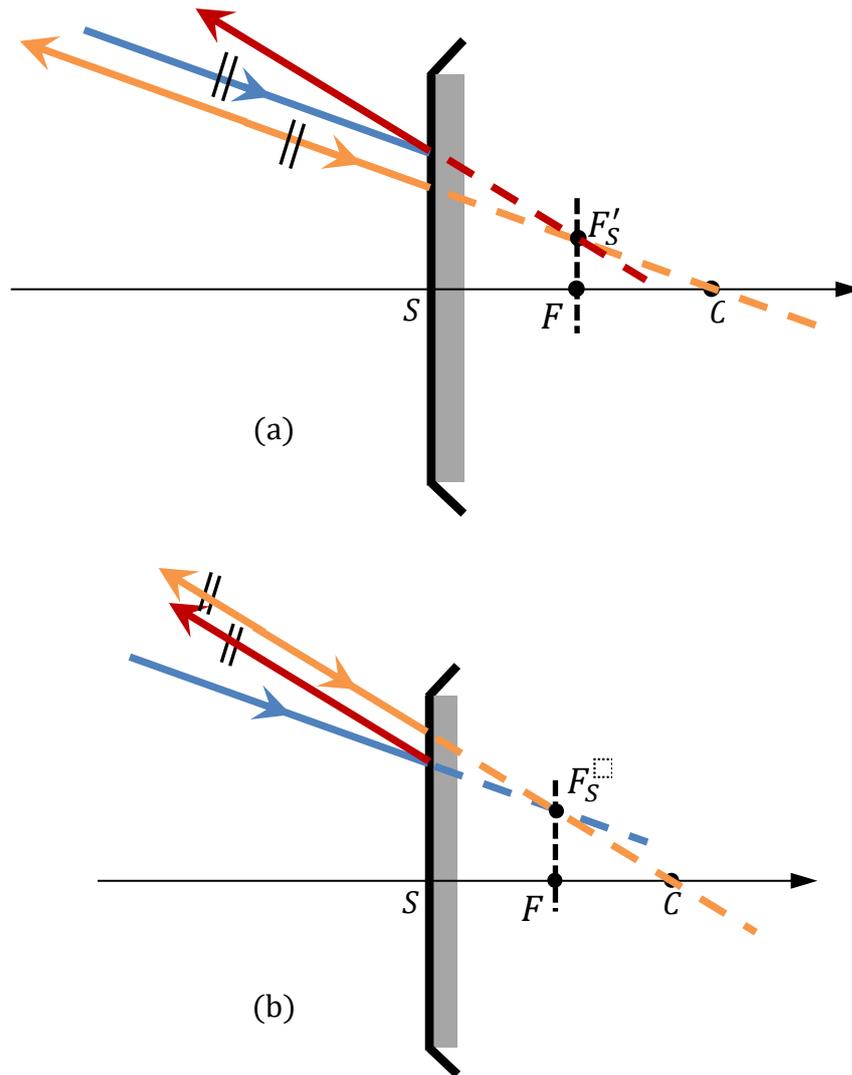


Figure 3.23 : Miroir convexe - Construction d'un rayon réfléchi correspondant à un incident donné et ce en exploitant :

(a) un foyer image secondaire particulier ;

(b) un foyer objet secondaire particulier.

2.13. Remarque

- Dans le cas d'un **objet réel**, les *caractéristiques* de l'*image* obtenue à travers un miroir sphérique *concave* puis *convexe*, se trouvent résumées au Tableau 3.5.
- Noter en particulier que l'image d'un **objet réel proche** du miroir sphérique est droite quel que soit la nature du miroir néanmoins (voir Figure 3.24) :
 - ✓ Cette image est plus petite que l'objet si le miroir est convexe,
 - ✓ Cette image est plus grande que l'objet si le miroir est concave.

Tableau 3.5 : Miroirs sphériques – Caractéristiques de l'image d'un objet réel à travers un miroir sphérique.

Miroir concave			
Emplacement de l'objet	Orientation de l'image	Taille de l'image (/ à celle de l'objet)	Type de l'image
<i>avant C</i>	<i>inversée</i>	<i>plus petite</i>	<i>réelle</i>
<i>entre F et C</i>	<i>Inversée</i>	<i>plus grande</i>	<i>réelle</i>
<i>entre F et S</i>	<i>droite</i>	<i>plus grande</i>	<i>virtuelle</i>

Miroir convexe			
Emplacement de l'objet	Orientation de l'image	Taille de l'image (/ à celle de l'objet)	Type de l'image
<i>arbitraire</i>	<i>droite</i>	<i>plus petite</i>	<i>virtuelle</i>

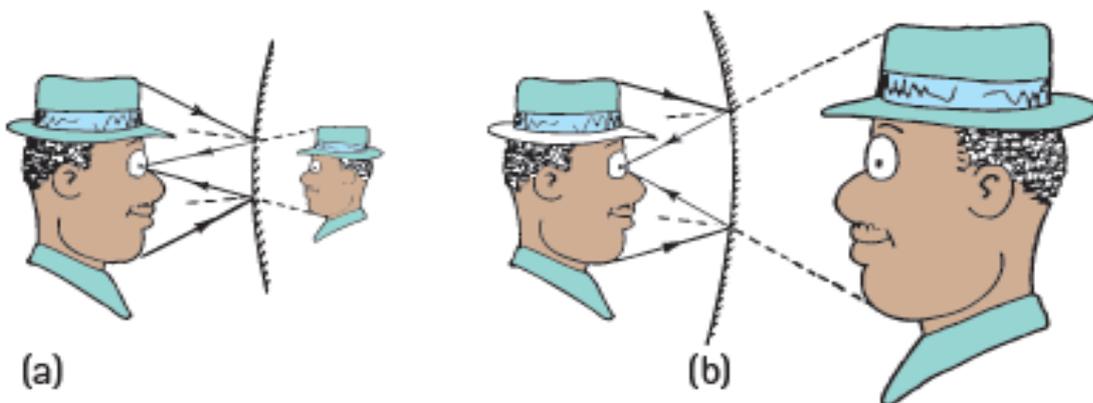


Figure 3.24 : Miroir sphérique – L'image d'un objet réel proche (situé tout-près) d'un miroir sphérique. Cette image est droite et elle est : (a) plus petite que l'objet si le miroir est convexe ; (b) plus grande que l'objet si le miroir est concave.

2.14. Relation de Lagrange–Helmholtz

- Il existe une relation entre les tailles (des objets et des images) et les angles que font les rayons avec l'axe optique.

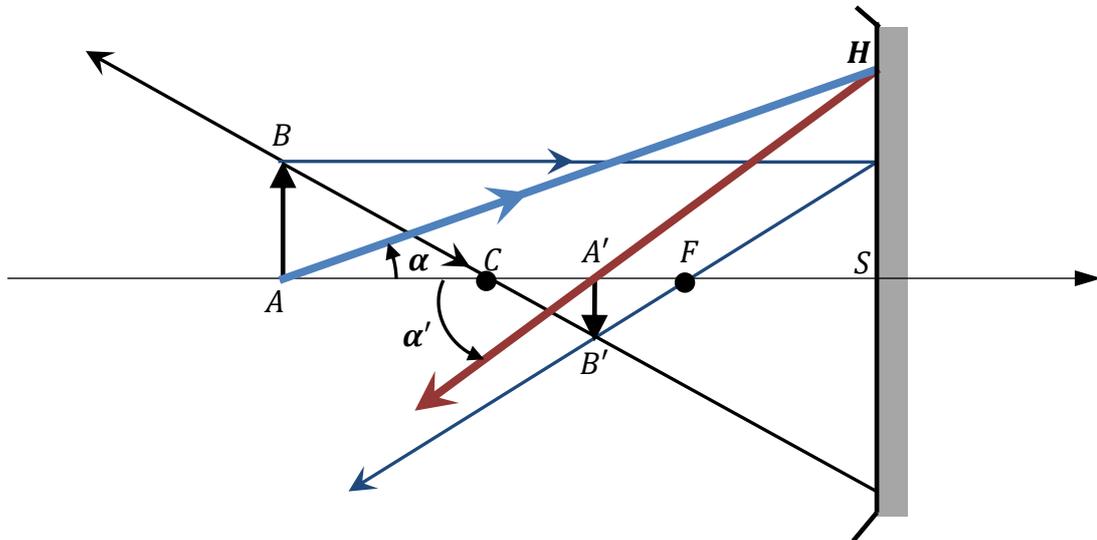


Figure 3.25 : Miroir sphérique – Relation de Lagrange-Helmholtz.

Considérons la construction de la Figure 3.25 et rappelons que tout rayon incident issu de A émerge en passant par A' (stigmatisme).

Les angles orientés α et α' sont tels que (Cf. triangles (AHS) et $(A'HS)$) :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{SH}}{\overline{AS}} \quad \text{et} \quad \tan \alpha' = \frac{\overline{SH}}{\overline{A'S}}$$

Et dans les conditions de Gauss (pour les petits angles, $\tan \alpha \approx \alpha$), on déduit :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\overline{A'S}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Tenant compte de l'expression du *grandissement* d'un miroir sphérique, il vient alors :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{\alpha}{\alpha'}$$

On déduit finalement la relation de Lagrange–Helmholtz.

- **Relation de Lagrange–Helmholtz :**

$$\alpha \overline{AB} = -\alpha' \overline{A'B'} \quad (3.14)$$

En introduisant le **grossissement** (ou *grandissement angulaire*) défini par :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

- **Relation entre le grandissement et le grossissement :**

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{1}{\gamma} \quad \text{ou encore} \quad G\gamma = -1 \quad (3.15)$$

Soulignons au passage que le grossissement G est une grandeur algébrique.

3. Dioptres plans

3.1. Relation de conjugaison d'un dioptre plan

- On considère un dioptre plan séparant deux milieux THI (transparents, homogènes et isotropes) d'indices différents n_1 et n_2 . La Figure 3.26 illustre la construction de l'image d'un *objet réel* à travers un dioptre plan et ce dans le cas $n_2 < n_1$.
- De la Figure 3.26, on déduit (en valeurs absolues) :

$$\tan i_1 = \left| \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} \right| \quad \text{et} \quad \tan i_2 = \left| \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}} \right|$$

Or, la 3^{ème} loi de Snell-Descartes (loi de réfraction) s'écrit en I :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Dans les conditions de Gauss (pour les petits angles, $\tan i \approx i$, $\sin i \approx i$), il vient :

$$\overline{SI} = \overline{SA} \times i_1 \quad ; \quad \overline{SI} = \overline{SA'} \times i_2 \quad ; \quad n_1 \times i_1 = n_2 \times i_2$$

- **Relation de conjugaison d'un dioptre plan de sommet S :**

$$\frac{n_2}{SA'} - \frac{n_1}{SA} = 0 \quad \heartsuit \quad (3.16)$$

avec,

$$A \xrightarrow{D_{\text{plan}}(S)} A'$$

$n_1 \qquad \qquad \qquad n_2$

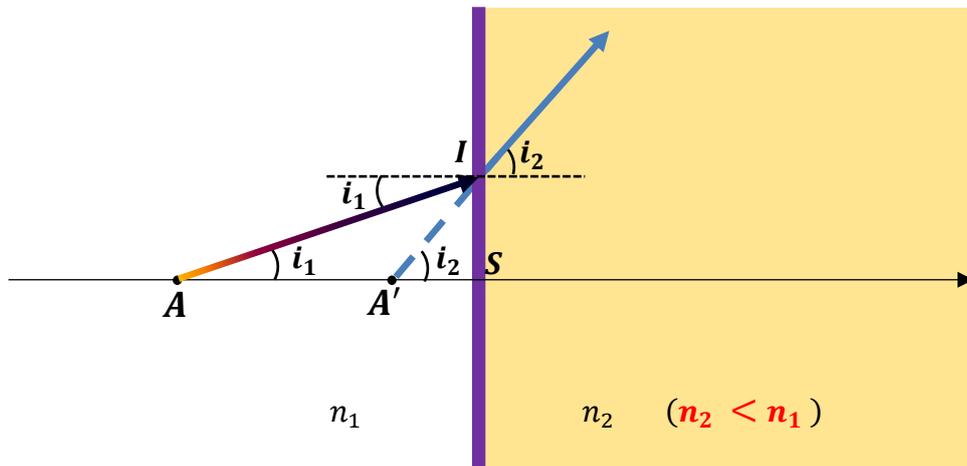


Figure 3.26 : Dioptre plan – Construction de l'image d'un objet réel à travers un dioptre plan, et ce dans le cas $n_2 < n_1$.

3.2. Grandissement d'un dioptré plan

➤ La Figure 3.27 illustre la construction de l'image $\overline{A'B'}$ d'un objet *réel* (respectivement, *virtuel*) \overline{AB} . Noter notamment que l'image obtenue est de même taille ($|\gamma| = 1$) et de même sens que l'objet ($\gamma > 0$) soit donc : $\gamma = +1$.

➤ **Grandissement d'un dioptré plan :**

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +1 \quad \heartsuit \quad (3.17)$$

REMARQUE

➤ Le **dioptré plan** est un système optique **afocal** : les foyers objet et image d'un dioptré plan sont situés à l'infini.

En effet, analytiquement, en utilisant la relation de conjugaison (équation [3.16]) on a :

$$\frac{1}{SA} = 0 \Rightarrow \frac{1}{SF'} = 0 \quad \& \quad \frac{1}{SA'} = 0 \Rightarrow \frac{1}{SF} = 0$$

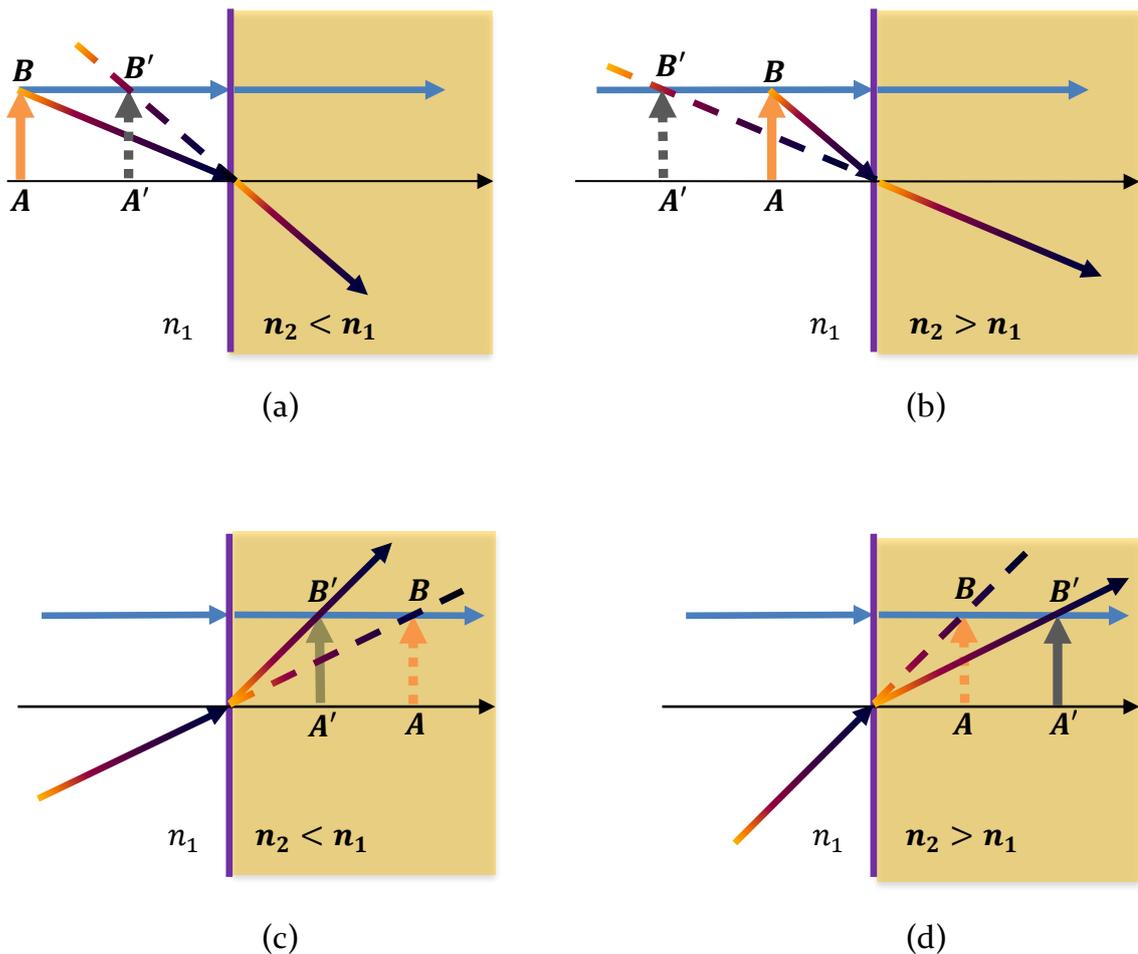


Figure 3.27 : Dioptré plan – Construction de l'image d'un objet réel (a) & (b) et l'image d'un objet virtuel (c) & (d).

4. Dioptres sphériques

4.1. Caractéristiques géométriques d'un dioptré sphérique

- Un dioptré sphérique est constitué d'une surface dioptrique sphérique (calotte sphérique de sommet S et de centre C) séparant deux milieux THI d'indices n_1 et n_2 différents.
- On distingue deux types de dioptrés sphériques (voir Figure 3.28) : concaves et convexes ; et dans les conditions de Gauss, on les représente comme indiqué à la Figure 3.29.
- Un rayon incident passant par le **centre** C d'un dioptré sphérique n'est pas dévié.

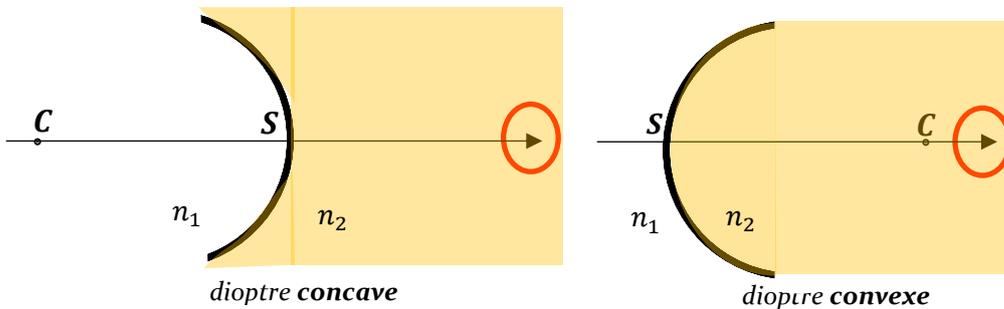


Figure 3.28 : Types de dioptrés sphériques – concaves & convexes
(Attention au sens de propagation).

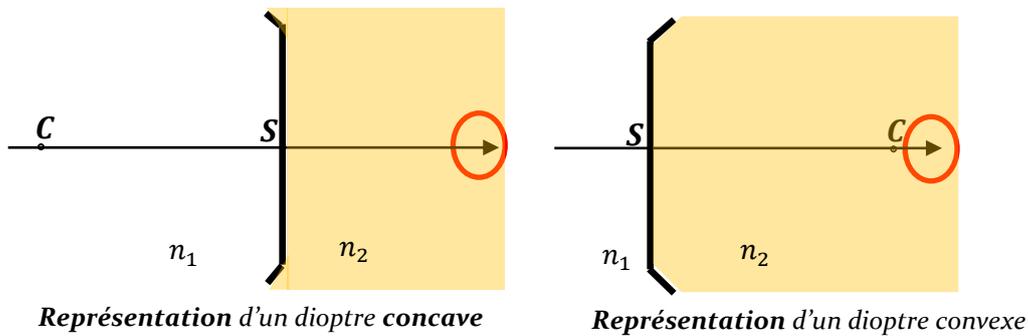


Figure 3.29 : Représentation des dioptrés sphériques – concaves & convexes.

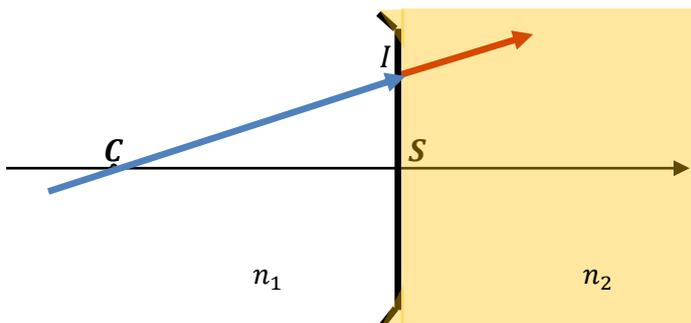


Figure 3.30 : Le rayon passant par le centre C d'un dioptré sphérique n'est pas dévié.

4.2. Dioptré sphérique convergent/divergent

- Le tableau ci-après résume les configurations possibles pour un dioptré sphérique convergent/divergent, et ce en fonction de l'indice relatif de réflexion des deux milieux et de la nature géométrique du dioptré, concave ou convexe.

Nature du dioptré sphérique	convergent	divergent
concave	$n_2 < n_1$	$n_2 > n_1$
convexe	$n_2 > n_1$	$n_2 < n_1$

- La Figure 3.31 illustre graphiquement les quatre configurations des dioptries sphériques, convergents/divergents.

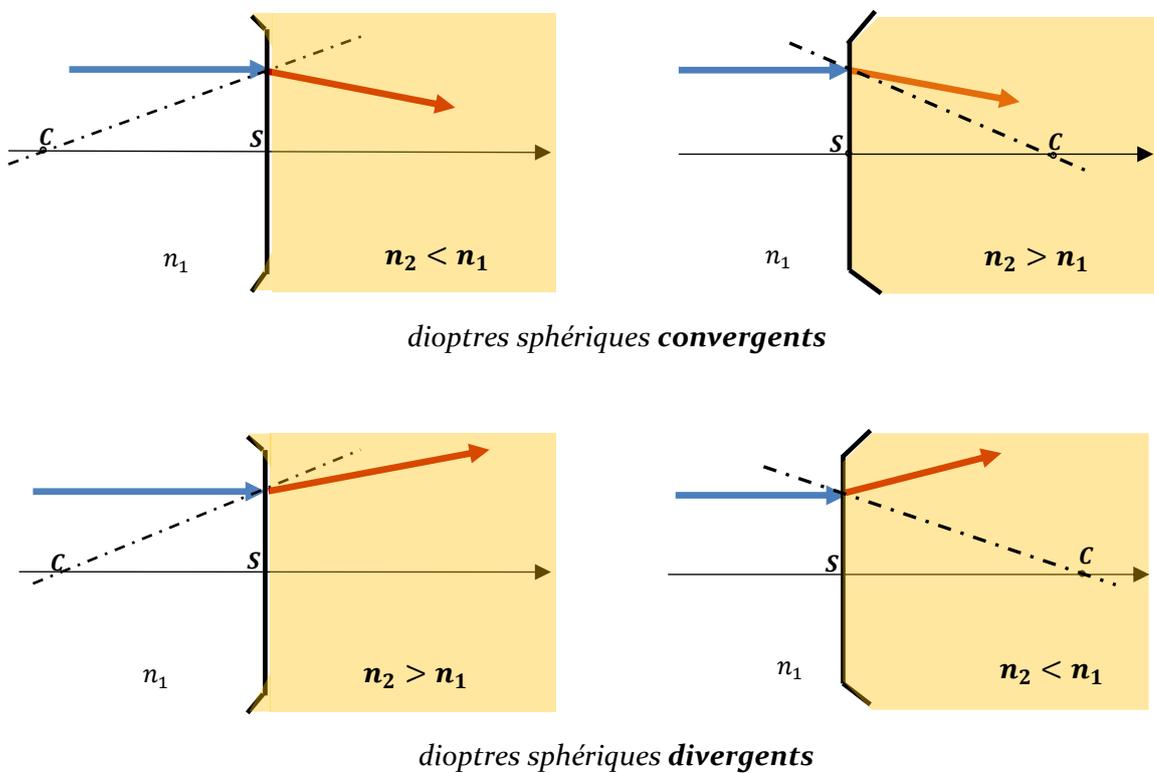


Figure 3.31 : Dioptries sphériques - convergents & divergents.

4.3. Relations de conjugaison du dioptré sphérique

- La Figure 3.32 illustre un point A situé sur l'axe optique et son conjugué A' à travers un dioptré sphérique **concave** et tel que $n_2 < n_1$.

En considérant les triangles (AIC) et $(A'IC)$ on déduit alors :

$$\hat{A} + i_1 + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ \quad \& \quad \hat{A}' + i_2 + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \alpha - i_1 \quad \& \quad \hat{A}' = \alpha - i_2$$

Dans les conditions de Gauss, on a en outre :

$$\alpha - i_1 \approx \tan(\alpha - i_1) = \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} \quad [1] \quad ; \quad \alpha - i_2 \approx \tan(\alpha - i_2) = \frac{\overline{SI}}{\overline{A'S}} \quad [2]$$

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\overline{SI}}{\overline{CS}} \quad [3] \quad ; \quad n_1 i_1 = n_2 i_2 \quad [4]$$

Et, $n_2 \times [2] - n_1 \times [1] \Rightarrow (n_2 - n_1) \alpha = \overline{SI} \left(\frac{n_2}{\overline{A'S}} - \frac{n_1}{\overline{AS}} \right) ; \quad \& [3] \Rightarrow$

$$(n_2 - n_1) \frac{\overline{SI}}{\overline{CS}} = \overline{SI} \left(\frac{n_2}{\overline{A'S}} - \frac{n_1}{\overline{AS}} \right) \Rightarrow \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}} = \frac{n_2}{\overline{A'S}} - \frac{n_1}{\overline{AS}}$$

- Relation de conjugaison d'un dioptré sphérique, origine au **sommet (S)** :

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} \quad \heartsuit \quad (3.18)$$

avec :



On établit également (voir Exercice)...

- Relation de conjugaison d'un dioptré sphérique, origine au **centre (C)** :

$$\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \quad \heartsuit \quad (3.19)$$

avec :

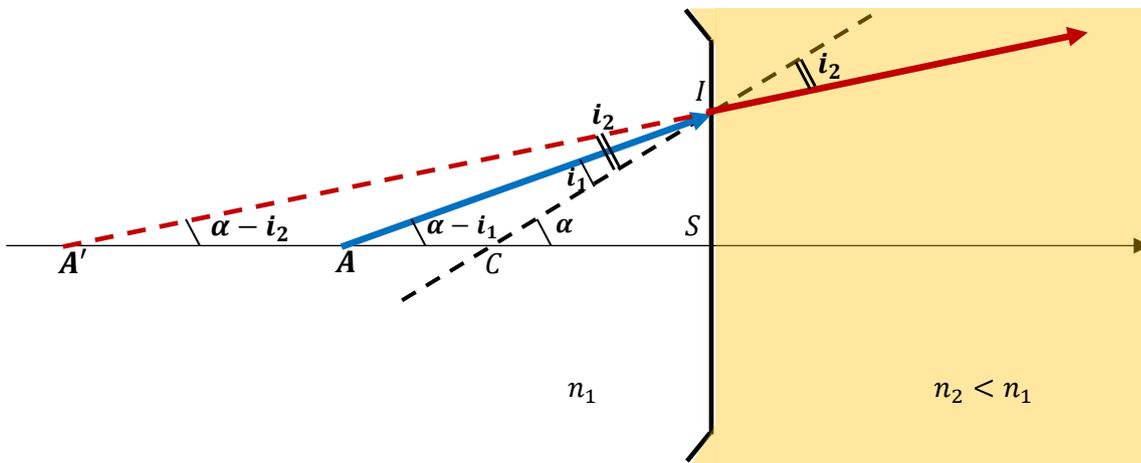
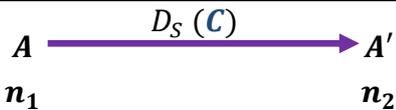


Figure 3.32 : Dioptré sphérique – Un point A sur l'axe optique et son conjugué A' à travers un dioptré sphérique concave et lorsque $n_2 < n_1$.

4.4. Vergence du dioptré sphérique

- La **vergence** V d'un dioptré sphérique est défini par :

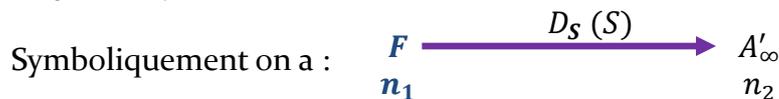


$$V = \frac{n_2 - n_1}{SC} = \frac{n_1 - n_2}{CS} \quad \heartsuit \quad (3.20)$$

4.5. Foyers objet et image du dioptré sphérique

- Pour des indices de réfraction n_1, n_2 et un rayon de courbure R ($R = \overline{SC}$) donnés, un dioptré sphérique possède deux foyers : un foyer objet F et un foyer image F' .

- Foyer objet F d'un dioptré sphérique :



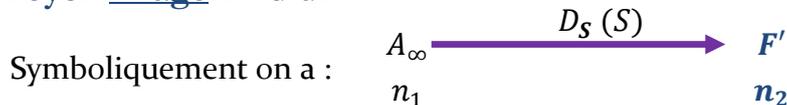
La relation de conjugaison avec origine au sommet du dioptré sphérique donne,

$$\text{pour } \frac{1}{SA'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n_1}{SF} = \frac{n_2 - n_1}{SC} \quad \text{D'où,}$$

$$\overline{SF} = f = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC} \quad \heartsuit \quad (3.21)$$

où f est la *distance focale objet* du dioptré sphérique : $f = \overline{SF}$.

- Foyer image F' d'un dioptré sphérique :



La relation de conjugaison avec origine au sommet du dioptré sphérique donne,

$$\text{pour } \frac{1}{SA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{SF'} = \frac{n_2 - n_1}{SC} \quad \text{D'où,}$$

$$\overline{SF'} = f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC} \quad \heartsuit \quad (3.22)$$

où f' est la *distance focale image* du dioptré sphérique : $f' = \overline{SF'}$.

■ REMARQUES IMPORTANTES

- Soulignons que :

Les **foyers** objet et image F et F' d'un dioptré sphérique se situent **de part et d'autre** du sommet S du dioptré **mais ils ne sont pas symétriques** par rapport au sommet S .

En effet, des équations [3.21] et [3.22], il vient :

$$\frac{\overline{SF'}}{\overline{SF}} = -\frac{n_2}{n_1} \quad \heartsuit \quad (3.23)$$

- ✓ Ainsi, on a donc $\frac{\overline{SF'}}{\overline{SF}} < 0$: les foyers F et F' se situent de part et d'autre du sommet S du dioptré sphérique.
- ✓ Et $\frac{\overline{SF'}}{\overline{SF}} \neq -1$: les foyers F et F' ne sont pas symétriques par rapport au sommet S du dioptré sphérique.
- Un dioptré sphérique sera **convergent** si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
 - ✓ sa vergence V est **positive** ($V > 0$) ;
 - ✓ son centre C est situé dans le milieu le **plus réfringent** ;
 - ✓ son foyer **image** F' est **réel**.

4.6. Grandissement d'un dioptré sphérique

- La Figure 3.33 illustre la construction graphique de l'image $A'B'$ d'un objet AB à travers un dioptré sphérique concave et pour $n_2 < n_1$.

En considérant les triangles (CAB) et $(CA'B')$, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

Et dans les conditions de Gauss, on a :

$$i_1 \approx \tan(i_1) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} \quad [1] \quad ; \quad i_2 \approx \tan(i_2) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'S}} \quad [2] \quad ; \quad n_1 i_1 = n_2 i_2 \quad [3]$$

$$[3] \ \& \ \frac{[2]}{[1]} \Rightarrow \frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{AS}}{\overline{A'S}} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

- **Grandissement d'un dioptré sphérique :**

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \quad \heartsuit \quad (3.24)$$

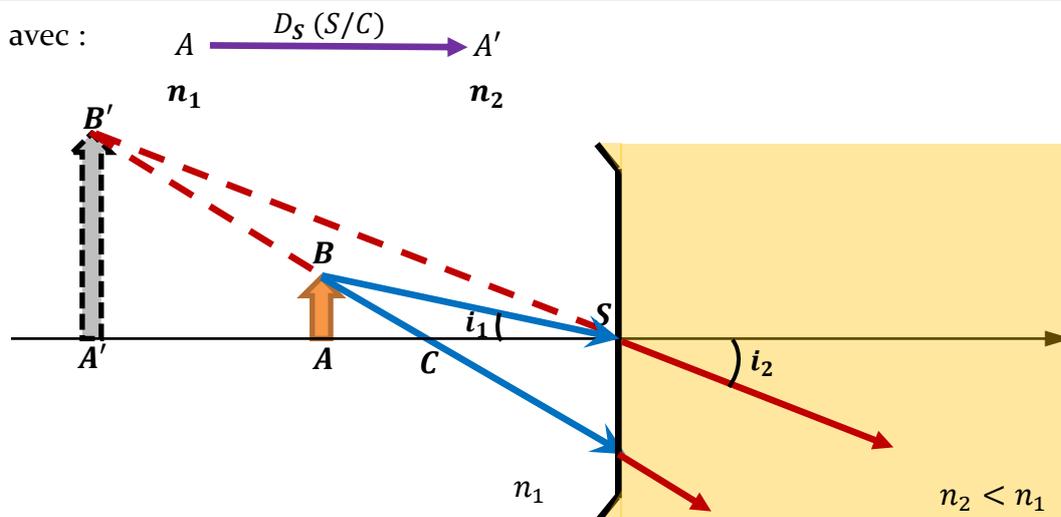


Figure 3.33 : Dioptré sphérique – Grandissement – Un objet AB et son image $A'B'$ à travers un dioptré sphérique concave et avec $n_2 < n_1$.

4.7. Construction d'images à travers un dioptré sphérique

- En fonction de la **position** d'un *objet*, sont illustrées les constructions graphiques de son image à travers un dioptré sphérique :
 - ✓ **convergent** (ici, concave et avec $n_2 < n_1$) à la Figure 3.34 ;
 - ✓ **divergent** (ici, convexe et avec $n_2 < n_1$) à la Figure 3.35.

Pour réaliser ces constructions graphiques, nous avons considéré les rayons utiles ①, ② et ③ décrits et utilisés pour les miroirs sphériques (voir §2.11).

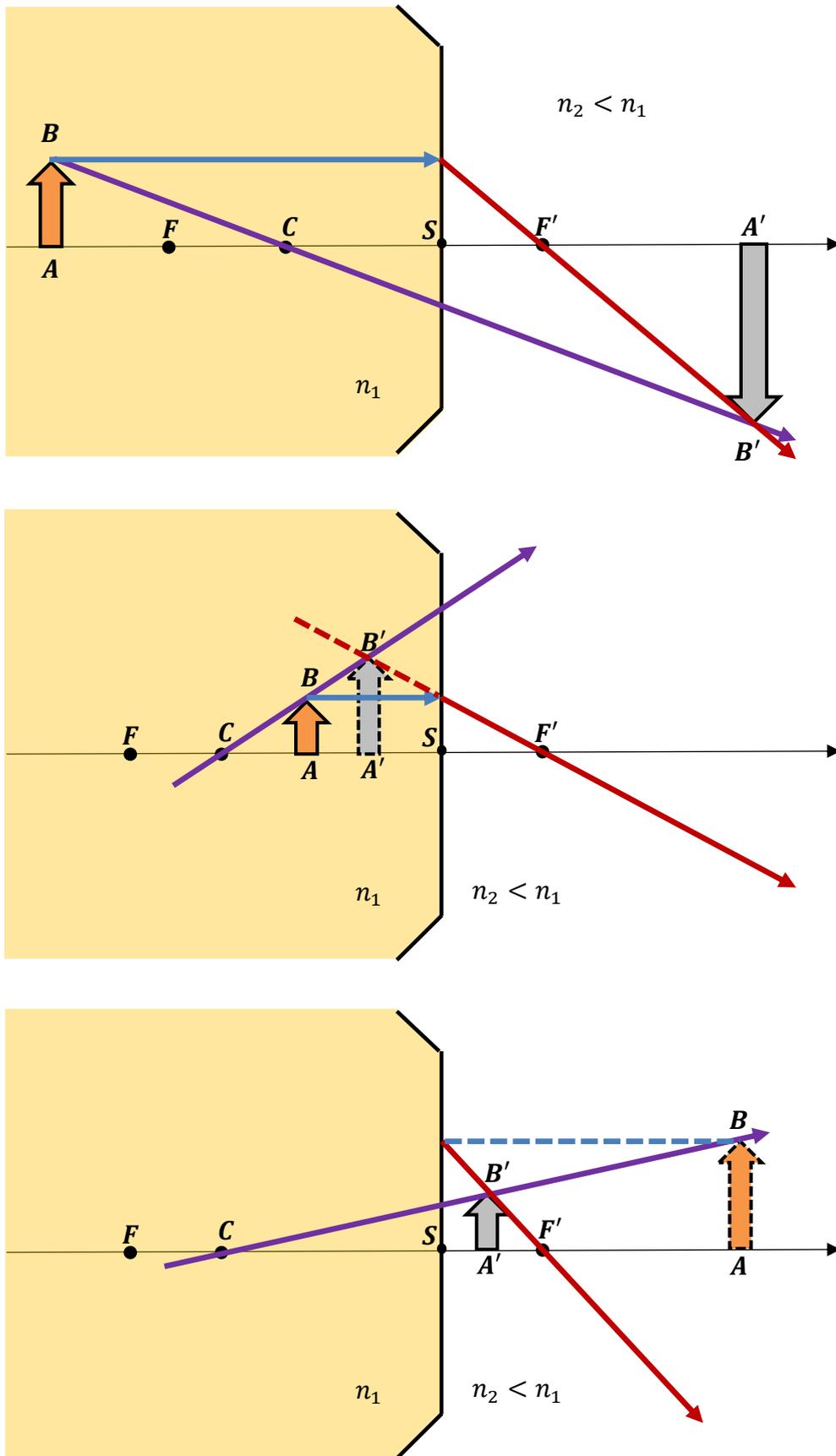


Figure 3.34 : Dioptre sphérique convergent – Construction d'images à travers un dioptre sphérique convergent pour différentes situations de la position de l'objet.

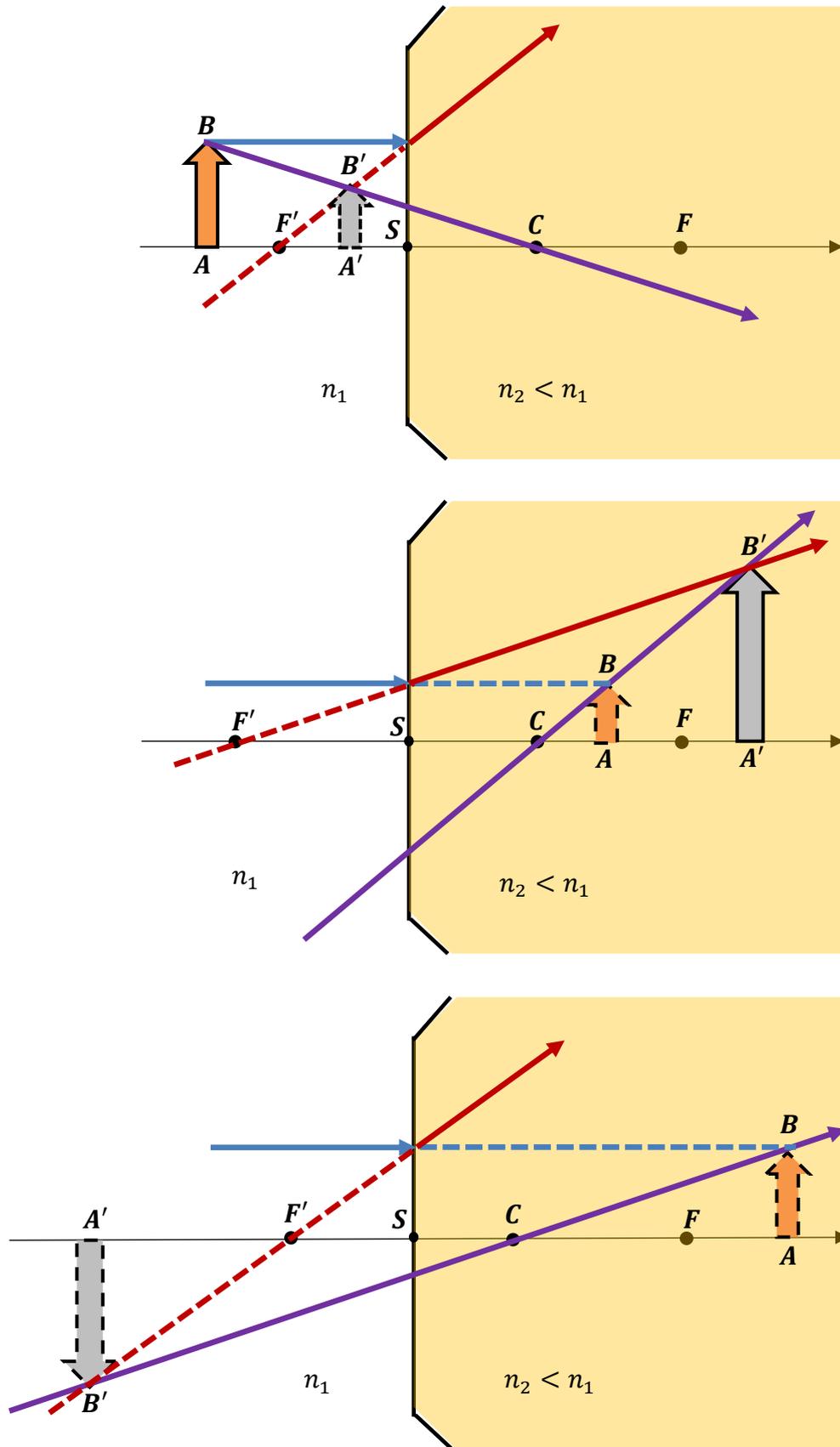
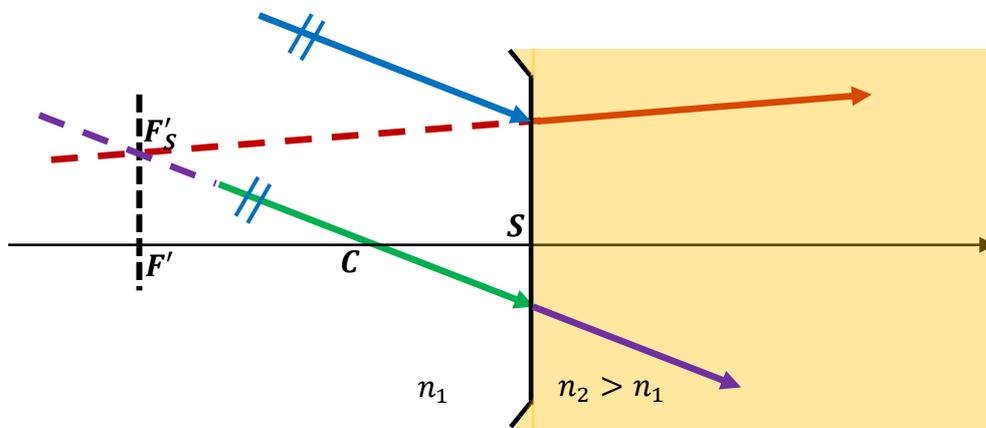


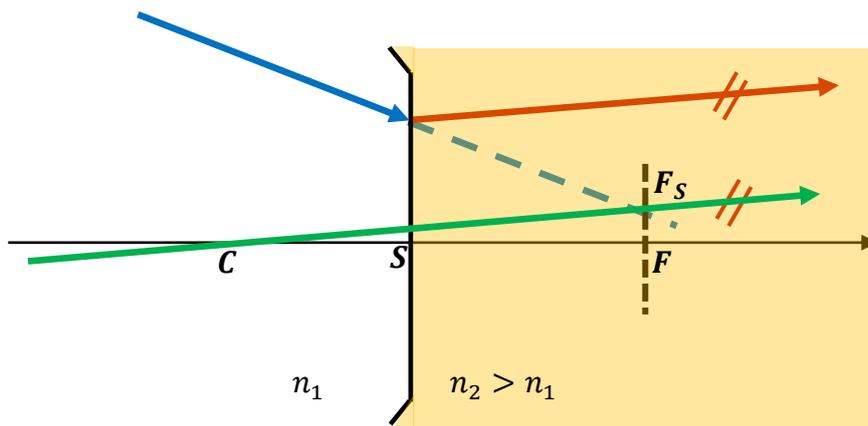
Figure 3.35 : Dioptré sphérique *divergent* – Construction d'images à travers un dioptré sphérique *divergent* pour différentes situations de la position de l'objet.

4.8. Construction du rayon réfracté correspondant à un incident donné

- Rappelons que pour construire le rayon réfracté d'un rayon incident donné, on a recours aux rayons particuliers (5) et (6) introduits dans le cadre du miroir sphérique (voir §2.14) et qui exploitent deux foyers secondaires particuliers.
- La Figure 3.36 illustre, à travers un exemple, la construction du rayon réfracté d'un incident donné qui, lui, arrive sur un dioptré concave et tel que $n_2 > n_1$. Ce dioptré est donc divergent (voir §4.2) ; ainsi son foyer image F' est virtuelle, situé avant le dioptré, et son foyer objet F est également virtuel, situé après le dioptré (Cf. remarques §4.5).



(a) Utilisation du foyer image secondaire particulier.



(b) Utilisation du foyer objet secondaire particulier.

Figure 3.36 : Dioptre sphérique –

Construction du rayon réfracté d'un incident donné en utilisant :

(a) un foyer image secondaire particulier ; (b) un foyer objet secondaire particulier.

À RETENIR – FORMULAIRE

$$A \xrightarrow{\text{Système (S/C)}} A' \quad ; \quad \text{Grandissement : } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

n_1 n_2

	Relation de conjugaison	γ	Foyers	Notes
Miroir plan	$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = 0$	+1	F et F' situés à l'infini	afocal
Miroir sphérique	$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$ $\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$ $\overline{FA} \times \overline{F'A'} = ff' = f^2 = f'^2$	$-\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $+\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ $-\frac{\overline{F'A'}}{f'}$ $-\frac{f}{\overline{FA}}$	$\overline{SF} = \overline{SF'}$ $f = f' = \frac{\overline{SC}}{2}$ <p>Les deux foyers confondus</p>	$V = -\frac{2}{\overline{SC}}$
Dioptré plan	$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = 0$	+1	F et F' situés à l'infini	afocal
Dioptré sphérique	$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$ $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$	$\frac{n_1}{n_2} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$	$\overline{SF} = f = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC}$ $\overline{SF'} = f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC}$ <p>Foyers non symétriques :</p> $\frac{\overline{SF'}}{\overline{SF}} = -\frac{n_2}{n_1}$	$V = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$

PAGE VIERGE

Chapitre 4

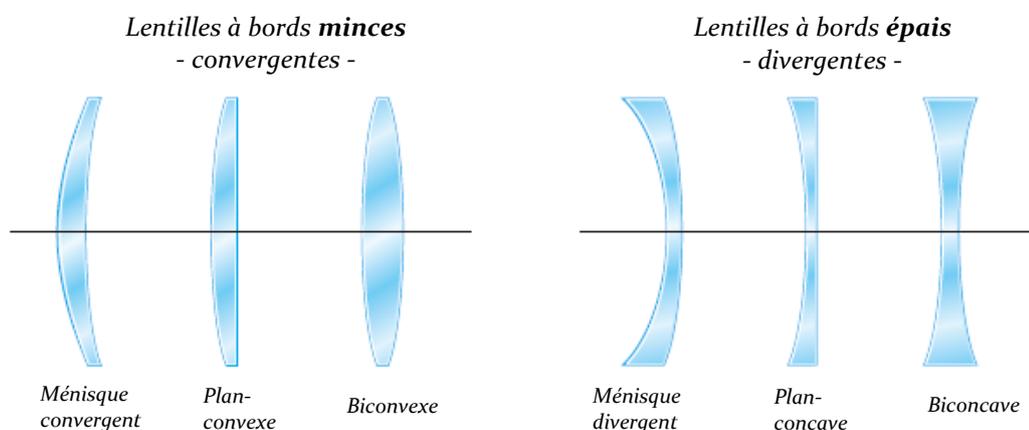
Lentilles minces

1. Lentille mince

1.1. Lentille

- Une **lentille** est un système optique centré constitué d'un milieu THI d'indice n et, limité par deux dioptries dont l'un au moins n'est pas un dioptre plan ; autrement dit, une lentille sera limitée soit par deux *dioptries sphériques* ou alors, par un dioptre sphérique et un dioptre plan.
- On distingue deux *types* de lentilles :
 - ✓ Les *lentilles* à bords minces ;
 - ✓ Les *lentilles* à bords épais.

La Figure 4.1 illustre les deux types de *lentilles*, à bords *minces* et à bords épais, ainsi que les six formes « géométriques » correspondantes.



| **Figure 4.1** - Les deux types de lentilles, à bords minces et à bords épais.

1.2. Lentille mince

- Une lentille possède un axe de symétrie (*axe optique*) qui coupe la surface des deux dioptrés qui la forment en leurs sommets S_1 et S_2 .

■ DÉFINITION

- Une lentille est dite **mince** si son épaisseur e ($e = \overline{S_1S_2}$) est négligeable :
 - ✓ devant les *rayons de courbure* ($\overline{S_1C_1}$ et $\overline{S_2C_2}$) des deux faces des dioptrés qui la délimitent **et**
 - ✓ devant la différence de ces *rayons de courbure* ($\overline{S_1C_1} - \overline{S_2C_2}$).

Autrement dit, pour une *lentille mince* on a :

$$e \ll |\overline{S_1C_1}| \quad \text{et} \quad e \ll |\overline{S_2C_2}| \quad \text{et} \quad e \ll |\overline{S_1C_1} - \overline{S_2C_2}|$$

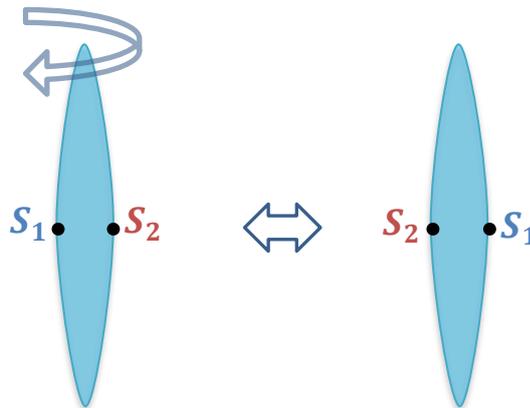
Et dans ces conditions, on considère généralement que les sommets S_1 et S_2 sont confondus en un point O appelé *centre optique* de la *lentille mince* : $S_1 \approx S_2 \approx O$.

■ REPRÉSENTATION SCHÉMATIQUE

- Une *lentille mince* est représentée par son *centre* (O) et sa *focale* (f'). La Figure 4.2 illustre la représentation schématique des lentilles minces *convergentes* et *divergentes*.

■ SYMÉTRIE

- Si on retourne une *lentille mince* « *face pour face* » (voir illustration ci-contre), la lentille aura les mêmes effets sur lumière.



■ REMARQUE

- Par *abus de langage*, dorénavant (dans la suite de ce cours) le terme « *lentille* » désignera une « *lentille mince* » ; de plus, et sauf indication contraire :

les lentilles (minces, d'indice n) sont supposées placées dans l'air

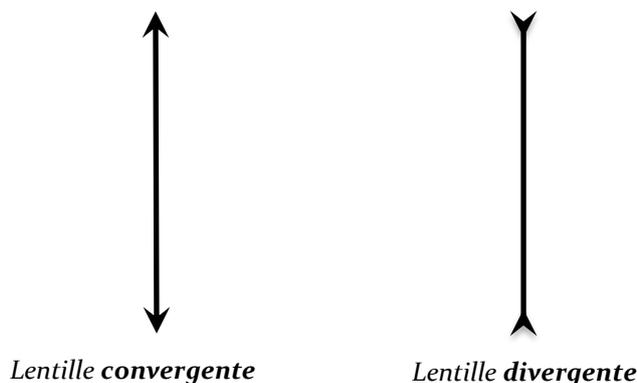


Figure 4.2 : Représentation des lentilles minces convergentes et divergentes.

1.3. Conditions de Gauss

- Les conditions de Gauss stipulent que les rayons sont **paraxiaux** (voir Figure 4.3) : rayons proches de l'axe optique ($OH \ll R$) et peu inclinés (α de quelques degrés).
- Sous les conditions de Gauss, comme pour tout système optique, les lentilles présentent un stigmatisme et un aplanétisme **approchés**.

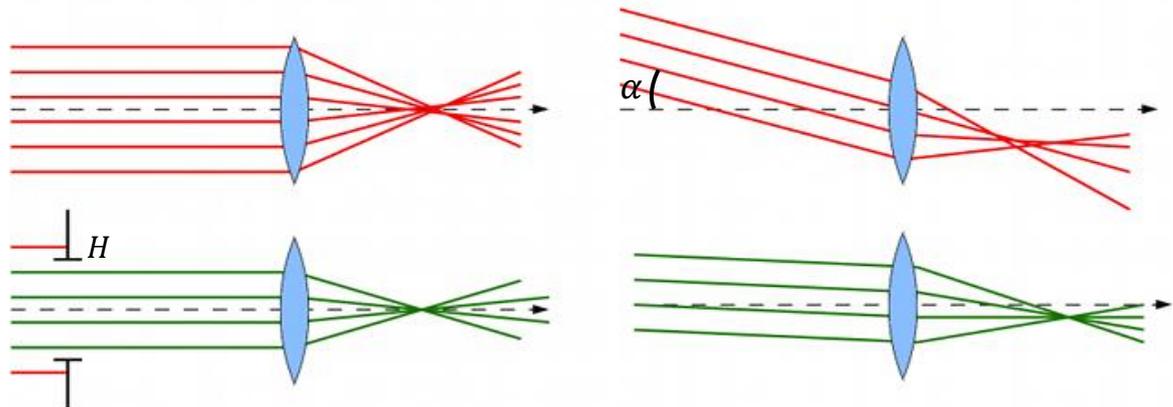


Figure 4.3 : Conditions de Gauss – illustration de rayons paraxiaux ($OH \ll R$ et α de quelques degrés).

- Des aberrations peuvent parfois être observées. Elles caractérisent l'écart entre l'image réelle et l'image prédite par l'optique géométrique paraxiale. On distingue deux types d'aberrations :

■ ABERRATION GÉOMÉTRIQUE

- En s'écartant des conditions de Gauss, le non stigmatisme et/ou le non aplanétisme de la lentille peut entraîner une *aberration géométrique* (voir Figure 4.4).

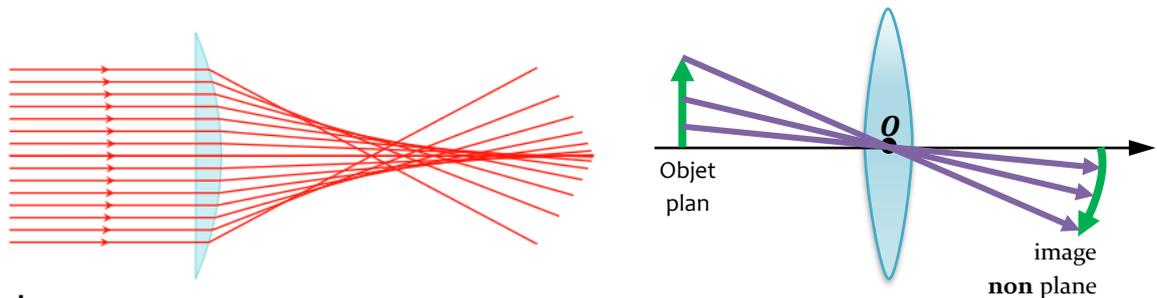


Figure 4.4 : Aberration géométrique.

■ ABERRATION CHROMATIQUE

- Du fait que l'indice n varie avec la longueur d'onde, le trajet des rayons lumineux dépend donc de la longueur d'onde. Aussi, à cause de ce phénomène de *dispersion*, une lentille peut présenter une aberration chromatique (voir Figure 4.5).

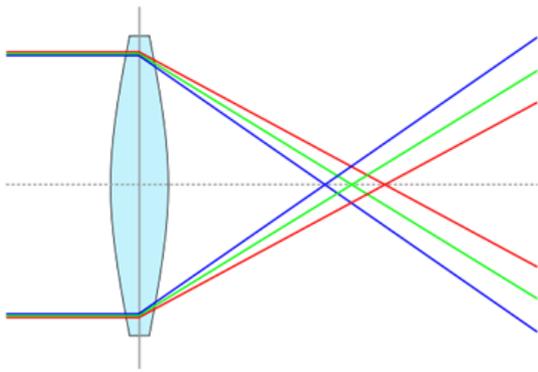


Figure 4.5 : Aberration chromatique.

1.4. Relation de conjugaison d'une lentille – relation préliminaire

- Dans l'approximation de Gauss, les lentilles sont des systèmes optiques possédant un *stigmatisme* et un *aplanétisme* **approchés**. Dans ce cas, et à partir des propriétés des dioptries, on peut établir la *relation de conjugaison* (avec origine au centre) des lentilles.
- La Figure 4.6 illustre une *lentille biconvexe* placée dans l'air. On désigne par A_1 le conjugué d'un objet A par le premier *dioptre sphérique* D_1 (sommet S_1 , centre C_1) et par A' le conjugué de A_1 par le deuxième *dioptre sphérique* D_2 (sommet S_2 , centre C_2).

Schématiquement, on a :

$$A \xrightarrow{D_{1S}(S_1)} A_1 \xrightarrow{D_{2S}(S_2)} A'$$

$\mathbf{1} \qquad \qquad \qquad \mathbf{n} \qquad \qquad \qquad \mathbf{1}$

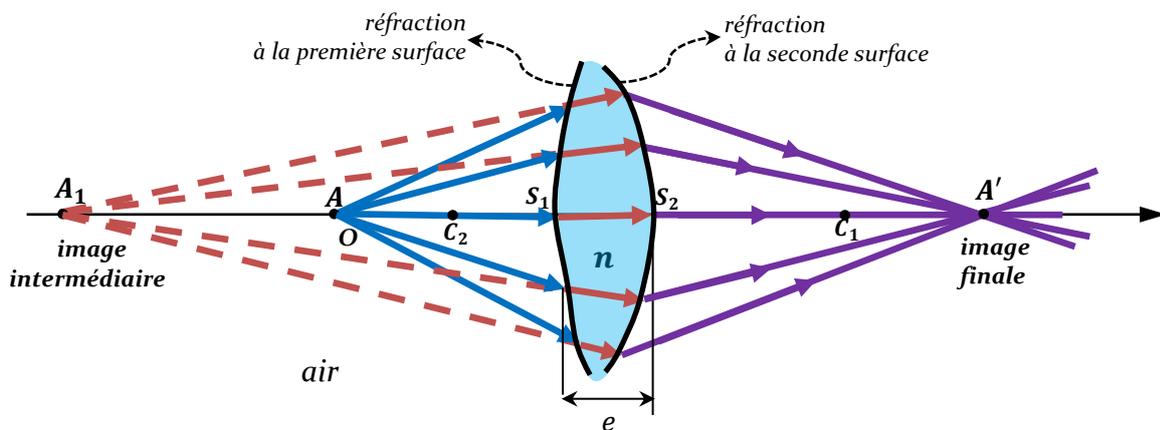


Figure 4.6 – Lentille mince : Marche des rayons. Notez que l'image A_1 d'un objet A à travers la première surface, (A_1) constitue un objet pour la seconde surface.

- La relation de conjugaison, avec origines au *sommet*, donne respectivement pour chacun des dioptrés sphériques $D_1(S_1)$ et $D_2(S_2)$:

$$\frac{n}{S_1A_1} - \frac{1}{S_1A} = \frac{n-1}{S_1C_1} \quad [1] \quad \& \quad \frac{1}{S_2A'} - \frac{n}{S_2A_1} = \frac{1-n}{S_2C_2} \quad [2]$$

La lentille biconvexe est une lentille *mince* : S_1 et S_2 sont confondus avec le *centre* optique O de ladite lentille ($S_1 \approx S_2 \approx O$). Tenant compte de cela et, en additionnant les relations [1] et [2], on déduit la relation de conjugaison relative au système formé par l'association des deux dioptrés sphériques D_1 et D_2 : ce système étant équivalent à une lentille L de centre O .

✓ **Relation de conjugaison préliminaire d'une lentille L :**

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = (n-1) \left(\frac{1}{OC_1} - \frac{1}{OC_2} \right) \quad (4.1)$$

avec : $A \xrightarrow{L(O)} A'$

2. Foyers et distances focales d'une lentille

A l'instar de tout système optique, une lentille (*mince*) sera caractérisée par deux foyers – *objet* (F) et *image* (F') – deux distances focales correspondantes – *objet* (f) et *image* (f') – ainsi que par deux *plans focaux* (*objet* et *image*).

2.1. Foyers image et objet d'une lentille

■ FOYER IMAGE D'UNE LENTILLE

- Le *foyer image* (F') étant l'*image* d'un point lumineux situé à l'infini sur l'axe optique. La relation de conjugaison préliminaire (équation 4.1) donne alors :

$$\frac{1}{OF'} = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{OC_1} - \frac{1}{OC_2} \right) \quad (4.2)$$

■ FOYER OBJET D'UNE LENTILLE

- L'*image* du *foyer objet* (F) étant située à l'infini sur l'axe optique. Aussi, la relation de conjugaison préliminaire (équation 4.1) donne immédiatement :

$$-\frac{1}{OF} = -\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{OC_1} - \frac{1}{OC_2} \right) = \frac{1}{f'} \quad (4.3)$$

■ REMARQUES IMPORTANTES

- ✓ Les *foyers image* et *objet* d'une lentille sont **symétriques** l'un de l'autre par rapport au centre O de la lentille. Autrement dit, les *distances focales image* et *objet* d'une lentille sont opposées :

$$f' = -f \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

- ✓ **Attention** : F et F' ne sont **pas** conjugués l'un de l'autre.

2.2. Foyers et distances focales d'une lentille

convergente : illustration graphique

- Les Figures 4.7 (a), (b) illustrent graphiquement les positions des *foyers objet* F et *image* F' , des *foyers secondaires objet* F_S et *image* F'_S , ainsi que les deux *plans focaux objet* et *image* d'une lentille *convergente*.

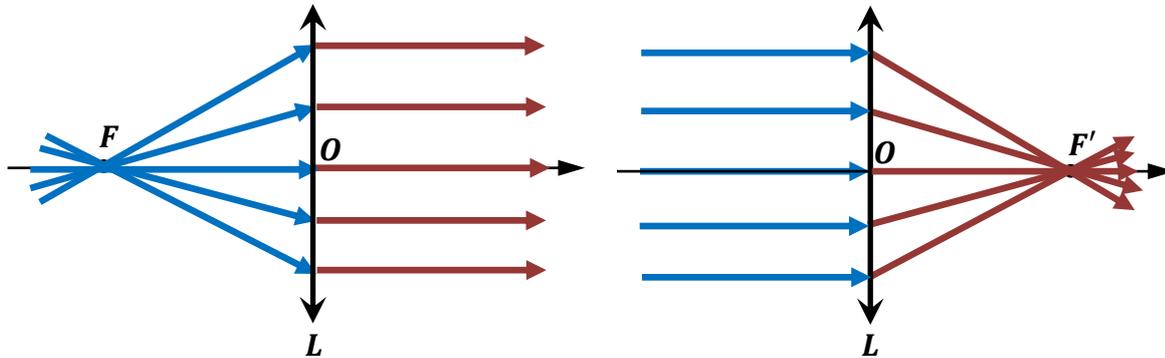


Figure 4.7 (a) : Les foyers objet et image d'une lentille *convergente* (illustration).

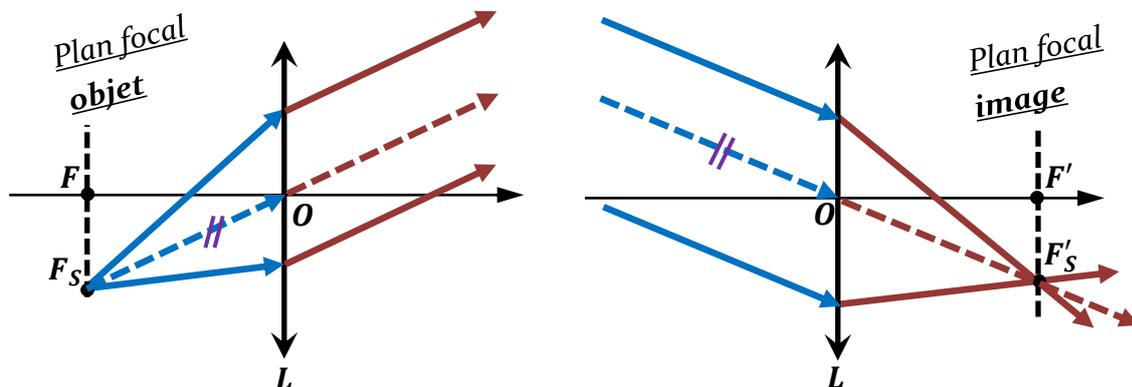


Figure 4.7 (b) : Les foyers secondaires objet et image et les plans focaux objet et image d'une lentille *convergente*.

- Noter que pour une lentille *convergente* :

- ✓ la **distance focale image** f' est **positive** ;
- ✓ la **distance focale objet** f est négative, avec $f = -f'$;
- ✓ les **foyers objet image** sont réels.

2.3. Foyers et distances focales d'une lentille

divergente : illustration graphique

- Les Figures 4.8 (a), (b) illustrent graphiquement les positions des *foyers objet* F et *image* F' , des *foyers secondaires objet* F_S et *image* F'_S , ainsi que les deux *plans focaux objet et image* d'une lentille *divergente*.

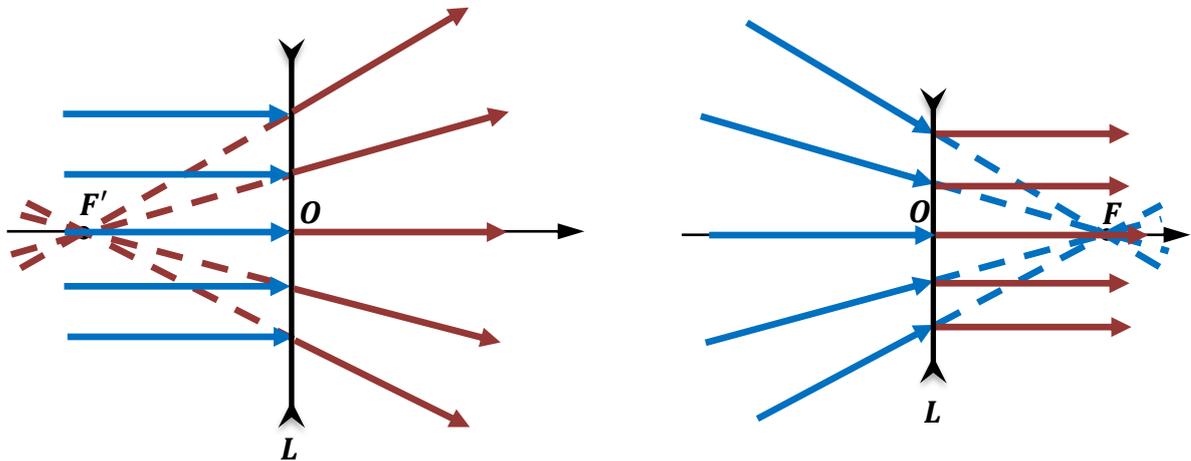


Figure 4.8 (a) : Les foyers objet et image d'une lentille **divergente** (illustration).

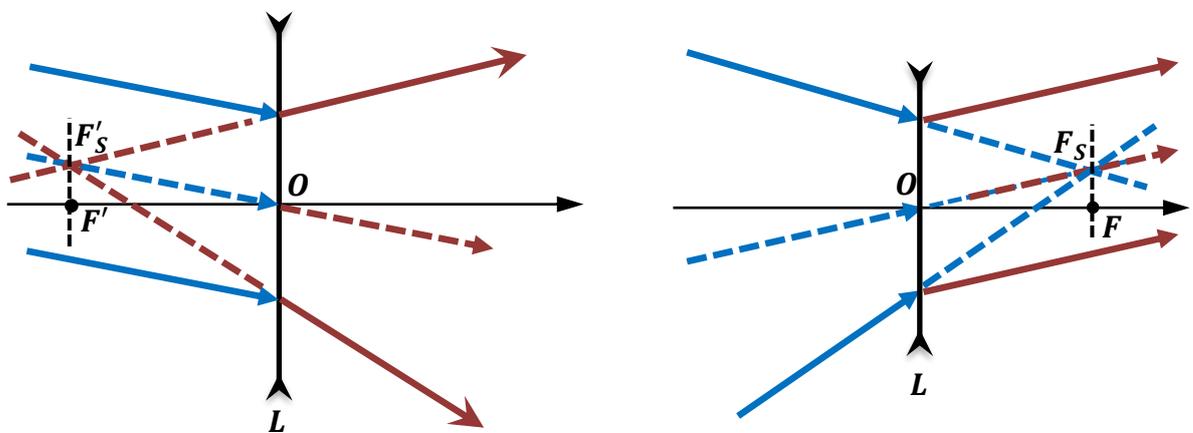


Figure 4.8 (b) : Les foyers secondaires objet et image et les plans focaux objet et image d'une lentille **divergente**.

- Noter que pour une lentille **divergente** :

- ✓ la **distance focale image** f' est **négative** ;
- ✓ la **distance focale objet** f est positive, avec $f = -f'$;
- ✓ les **foyers objet image** sont virtuels.

2.4. Remarque importante

- Soulignons que si le **sens** de propagation de la lumière est **inversé**, les **foyers objet et image** d'une lentille se trouvent alors **inversés**.

3. Vergence d'une lentille

- Par définition, la *vergence* V d'une *lentille* est égale à :

$$V = +\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

- Une lentille *convergente* ($V > 0$) a une distance focale image positive ($f' > 0$), alors qu'une lentille *divergente* ($V < 0$) possède une distance focale image négative ($f' < 0$). Rappelons que l'unité de la *vergence* est la *dioptrie* ($1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$) : une lentille de distance focale image $f' = 50 \text{ cm}$ possède donc une *vergence* de 2 dioptries (2δ).

4. Relation de conjugaison avec origine au centre O – relation de Descartes

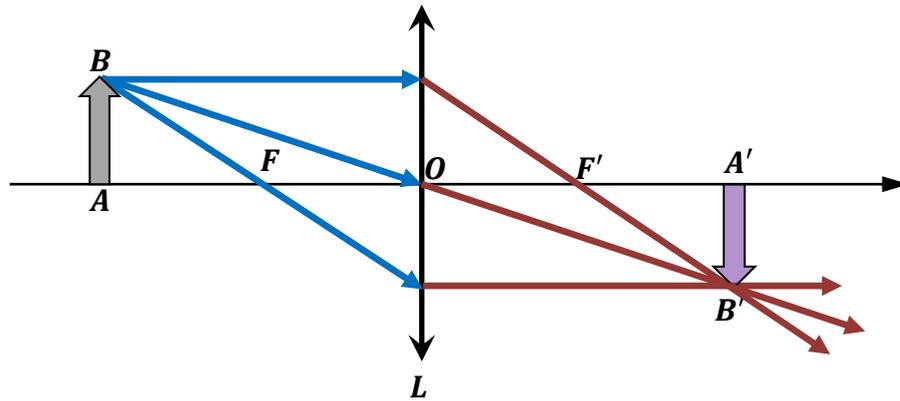
- La relation de conjugaison, avec origines au centre O , d'une lentille L de *distance focale* f' s'écrit :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} = V \quad \heartsuit \quad (4.6)$$

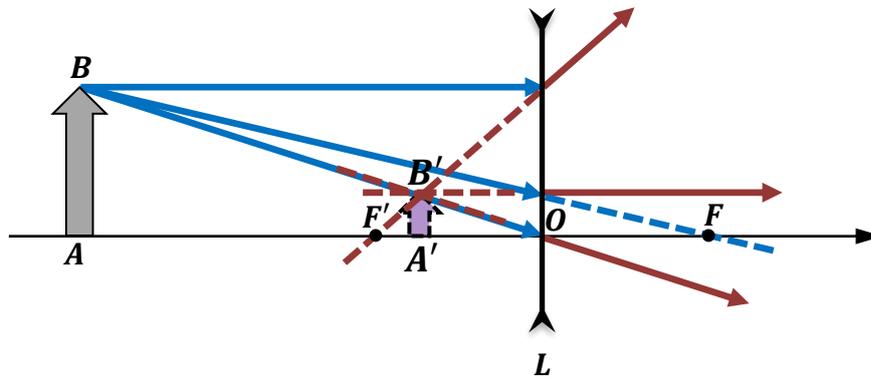
avec : $A \xrightarrow{L(O)} A'$

5. Construction de l'image formée par une lentille

- On déterminera l'image $A'B'$ d'un objet AB en recourant aux rayons utiles, numérotés ①, ② et ③, introduits au chapitre précédent (Cf. Chapitre 3, §2.11). Il s'agit, rappelons-le, des rayons suivants :
- ✓ ① – un rayon *incident parallèle* à l'axe émerge de la lentille en passant par son *foyer image* ;
 - ✓ ② – un rayon *incident* passant par le *foyer objet* émerge *parallèlement* à l'axe ;
 - ✓ ③ – un rayon passant par le *centre optique* O n'est pas dévié
- La Figure 4.9 illustre la construction graphique de l'image formée par une lentille *convergente* et ce en exploitant les trois rayons utiles précités.
- La Figure 4.10 illustre la construction graphique de l'image formée par une lentille (mince) *divergente*, et ce en exploitant les trois rayons utiles précités.



| **Figure 4.9** – Construction de l'image formée par une lentille **convergente**.



| **Figure 4.10** – Construction de l'image formée par une lentille **divergente**.

6. Grandissement et relation de conjugaison avec origine aux foyers d'une lentille – relation de Newton

- En considérant les triangles (OAB) et $(OA'B')$ de la Figure 4.11 on a :

$$\frac{\overline{AB}}{-\overline{OA}} = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}$$

On obtient ainsi une première expression du grandissement γ d'une lentille :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- En considérant les triangles (FAB) , (FOH') , $(F'OH)$ et $(F'A'B')$ de la Figure 4.12 :

$$\frac{\overline{AB}}{-\overline{FA}} = \frac{-\overline{OH'}}{\overline{FO}} = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{FO}} \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

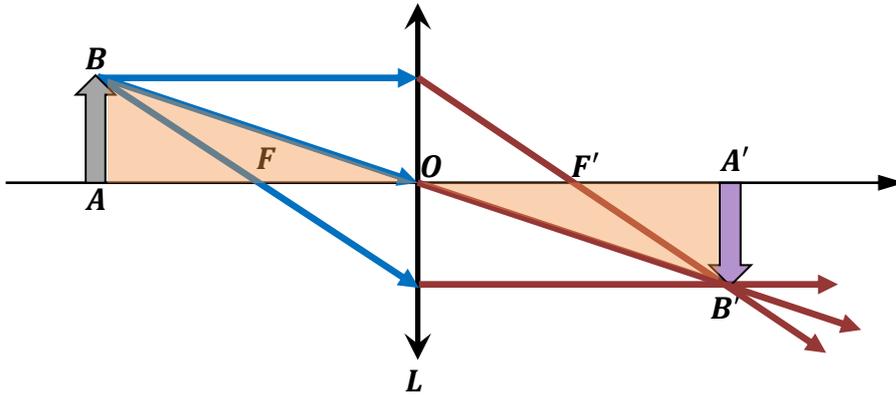


Figure 4.11 – Grandissement d'une lentille.

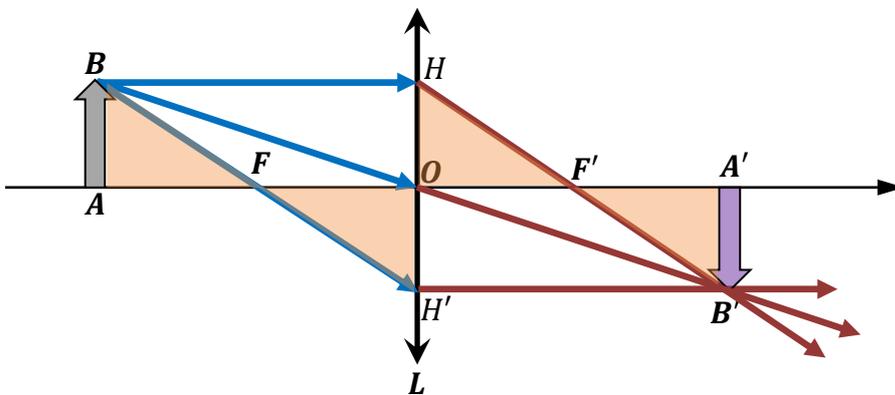


Figure 4.12 – Relation de conjugaison d'une lentille : origine aux foyers

■ GRANDISSEMENT D'UNE LENTILLE

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \quad \heartsuit \quad (4.7)$$

De plus il vient, sachant l'égalité :

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

■ RELATION DE CONJUGAISON AVEC ORIGINES AUX FOYERS D'UNE LENTILLE - RELATION DE NEWTON

$$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = \overline{F'O} \times \overline{FO} = -f'^2 = -f^2 = ff' \quad \heartsuit \quad (4.8)$$

➤ Exercice :

A partir de la relation de Newton, retrouvez la relation de Descartes (Eq. 4.6).

Solution : L'équation 4.8 donne :

$$\begin{aligned} \overline{F'A'} \times \overline{FA} &= (\overline{F'O} + \overline{OA'}) \times (\overline{FO} + \overline{OA}) = -f'^2 \\ &\Rightarrow (-f' + \overline{OA'}) \times (f' + \overline{OA}) = -f'^2 \\ &\Rightarrow f' \times (\overline{OA'} - \overline{OA}) + \overline{OA} \times \overline{OA'} = 0 \end{aligned}$$

En divisant par $\overline{OA} \times \overline{OA'}$, il vient :

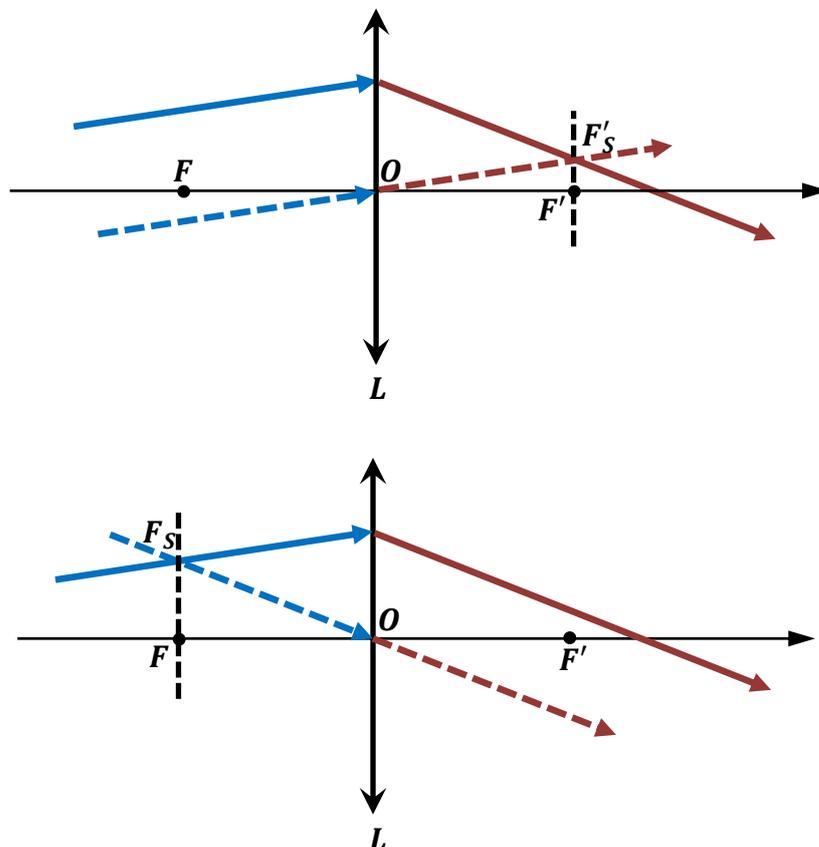
$$f' \times \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OA'} \right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

On retrouve la relation de conjugaison avec origine au centre d'une lentille.

7. Construction de l'émergent correspondant à un incident donné

- Deux méthodes de construction peuvent être envisagées pour tracer le rayon émergent correspondant à un incident donné :
 - ✓ exploiter un foyer objet secondaire F_S particulier. On cherche alors F_S , l'intersection du rayon incident avec le plan focal objet ; tout faisceau issu de F_S émerge en un faisceau de rayons parallèles à $F_S O$.
 - ✓ exploiter un foyer image secondaire F'_S particulier. On trace le rayon parallèle au rayon incident passant par le centre optique O qui coupe le plan focal image en F'_S ; le rayon émerge en passant par ce foyer image secondaire F'_S .
- La construction par les deux méthodes de l'émergent d'un incident donné à travers une lentille convergente (respectivement, divergente) est illustrée à la Figure 4.13 (respectivement, à la Figure 4.14).



| **Figure 4.13** – Lentille **convergente** : construction de l'émergent d'un incident donné.

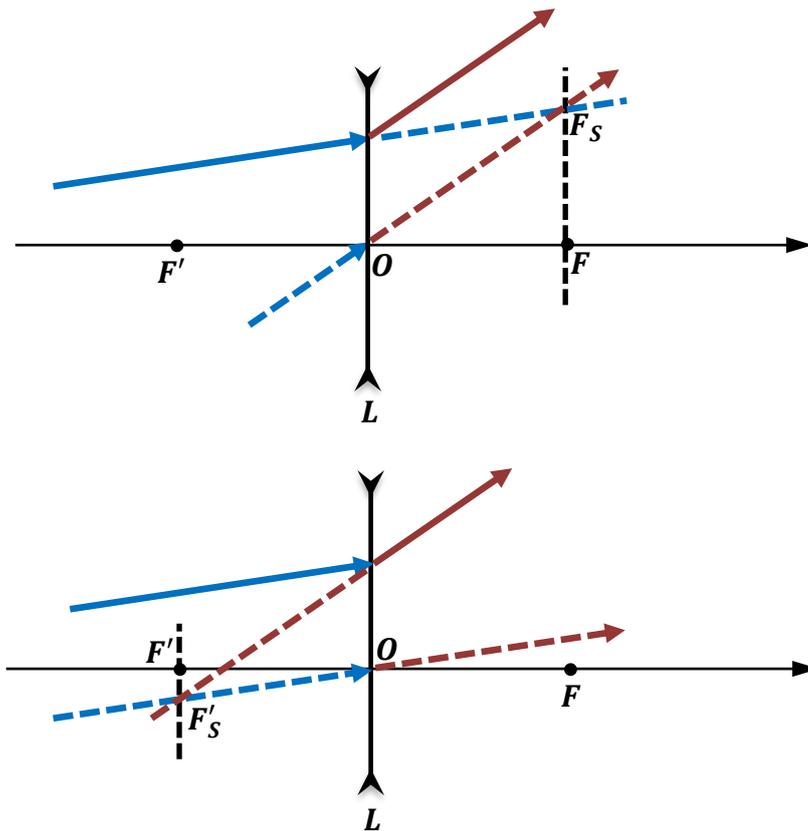


Figure 4.14 – Lentille *divergente* : construction de l'émergent d'un incident donné.

8. Association de lentilles

8.1. Association de lentilles accollées

- Des lentilles ayant un même axe optique sont dites *accollées* quand elles sont amenées aussi près que possible les unes des autres. Et, dans ce cas, on admet que l'épaisseur résultante totale est faible, que les plans principaux des lentilles sont confondus en O et que l'ensemble est équivalent à une seule lentille de centre optique O .
- Considérons un doublet constitué par deux lentilles L_1 et L_2 *accollées*, telle que :

$$A \xrightarrow{L_1(O_1)} A_1 \xrightarrow{L_2(O_2)} A'$$

Les relations de conjugaison des lentilles L_1 et L_2 s'écrivent respectivement :

$$\frac{1}{O_1 A_1} - \frac{1}{O_1 A} = \frac{1}{f'_1} \quad \& \quad \frac{1}{O_2 A'} - \frac{1}{O_2 A_1} = \frac{1}{f'_2}$$

Les deux lentilles étant accollées, on a donc : $O_1 = O_2 = O$. Et, dans ce cas, la somme de ces deux relations de conjugaison donne alors immédiatement :

$$\frac{1}{O A'} - \frac{1}{O A} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

Le doublet de lentilles **accollées** est ainsi équivalent à une lentille L de centre O et de distance focale f' telle que : $A \xrightarrow{L(O)} A'$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \quad \heartsuit \quad (4.9)$$

Autrement dit, la **vergence** V de la **lentille** L équivalente au doublet de lentilles **accollées** L_1 et L_2 , de vergences respectives V_1 et V_2 , est égale à la **somme** des vergences de ces deux lentilles.

■ **VERGENCE DE LA LENTILLE L ÉQUIVALENTE AU DOUBLET DE LENTILLES ACCOLLÉES**

$$V = V_1 + V_2 \quad \heartsuit \quad (4.10)$$

Ce résultat peut en fait être généralisé à plusieurs lentilles **accollées**.

■ **THÉORÈME DES VERGENCES**

➤ Soit un ensemble de N **lentilles accollées** de vergences respectives V_i . La **vergence** V de la **lentille équivalente** à cette association est la **somme** des vergences de chacune des **lentilles accollées** : $V = \sum_{i=1}^N V_i \quad \heartsuit \quad (4.11)$

➤ Les **grandissements** γ_1 et γ_2 des **lentilles** L_1 et L_2 s'écrivent par ailleurs :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} \quad \& \quad \gamma_2 = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_1}}$$

Et pour $O_1 = O_2 = O$, il vient alors immédiatement...

■ **GRANDISSEMENT DE LA LENTILLE L ÉQUIVALENTE AU DOUBLET DE LENTILLES ACCOLLÉES**

$$\gamma = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O A'}}{\overline{O A}} \quad \text{soit} \quad \gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \quad \heartsuit \quad (4.12)$$

avec : $A \xrightarrow{L(O)} A'$

Ce résultat peut en fait être généralisé à plusieurs **lentilles accollées**.

■ **GRANDISSEMENT DE LA LENTILLE ÉQUIVALENTE À L'ASSOCIATION DE LENTILLES ACCOLLÉES**

➤ Soit un ensemble de N **lentilles accollées**, de **grandissements** respectifs γ_i . Le **grandissement** γ de la **lentille équivalente** à cette association est le **produit** des **grandissements** de chacune des **lentilles accollées** : $\gamma = \prod_{i=1}^N \gamma_i \quad \heartsuit \quad (4.13)$

■ **REMARQUE**

➤ Toutes les relations établies dans ce paragraphe (équations [4.9] à [4.13]) ne sont valables que pour des **lentilles accollées**.

8.2. Doublet de lentilles distantes (non accolées)

- Considérons un doublet constitué par deux lentilles L_1 et L_2 , de focales f'_1 et f'_2 , et séparées par $e = \overline{O_1O_2}$. Ce sont des lentilles distantes donc, non accolées. On désire alors déterminer analytiquement (par calcul) mais aussi graphiquement les positions des foyers objet et image d'un tel doublet.
- On pose : $\Delta = \overline{F'_1F'_2}$. On a : $\Delta = \overline{F'_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F'_2} = -f'_1 + e - f'_2$

$$\Delta = \overline{F'_1F'_2} = e - (f'_1 + f'_2) \quad (4.14)$$

Δ est appelé *intervalle optique* du doublet.

Il s'agit ici d'une étude non exhaustive des doublets de lentilles non accolées. Le cas particulier du doublet *afocal* ($\Delta = 0$) est étudié à la fin de ce paragraphe.

8.2.1. Détermination analytique des foyers d'un doublet

➤ FOYER OBJET F DU DOUBLET

- Par définition, l'image de F à travers le doublet est située à l'infini.

Schématiquement on a : $F \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$

Ainsi, l'image intermédiaire A_1 a son image (dans L_2) située à l'infini (A'_∞) : A_1 est donc le foyer objet de L_2 ($A_1 = F_2$) ; au final, le foyer objet F est le conjugué de

F_2 dans L_1 : $F \xrightarrow{L_1} F_2$

La relation de conjugaison (de Newton) de L_1 s'écrit $\overline{F'_1F_2} \times \overline{F_1F} = -f_1'^2$. D'où :

$$\overline{F_1F} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} \quad (4.15)$$

■ FOYER IMAGE F' DU DOUBLET

- Par définition, F' est l'image à travers le doublet d'un objet située à l'infini.

Schématiquement on a : $A_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} F'$

Ainsi, l'image intermédiaire A_1 est l'image (dans L_1) d'un objet situé à l'infini (A_∞) : A_1 est le foyer image de L_1 ($A_1 = F'_1$) ; au final, le foyer image F' est le conjugué de

F'_1 dans L_2 : $F'_1 \xrightarrow{L_2} F'$

La relation de conjugaison (de Newton) de L_2 s'écrit : $\overline{F'_2F'} \times \overline{F_2F'_1} = -f_2'^2$. D'où,

$$\overline{F'_2F'} = +\frac{f_2'^2}{\Delta} \quad (4.16)$$

8.2.2. Détermination graphique des foyers d'un doublet

- Considérons les trois configurations suivantes de doublets distants :
 - ✓ doublet de lentilles (deux) convergentes distantes ;
 - ✓ doublet de lentilles (une) convergente et (une) divergente ;
 - ✓ doublet *afocal* : tel que, $F'_1 = F_2$.
- Soulignons au passage que d'une manière générale, contrairement à un doublet accolé, un doublet non accolé n'est pas équivalent à une lentille mince.

■ DOUBLET DE LENTILLES CONVERGENTES

On considère $\Delta > 0$ où $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = e - (f'_1 + f'_2)$

✚ Foyer image F' du doublet :

- La Figure 4.15 illustre la détermination graphique du foyer image F' du doublet, et ce à travers les étapes successives suivantes :
 - 1) On trace le rayon incident ① **parallèle à l'axe optique** : l'émergeant de ce rayon à travers le doublet, rencontrera alors l'axe optique en F' . Or, dans L_1 l'émergeant du rayon ① (parallèle à l'axe optique) passe par le foyer image F'_1 de L_1 : d'où le rayon ②.
 - 2) Pour déterminer l'émergeant du rayon ② dans L_2 on exploite un foyer image secondaire particulier (F'_{S2}) : considérons le rayon ③ parallèle à ② et passant par O_2 ; Les rayons ② et ③ auront alors le même foyer image secondaire.
 - 3) le rayon ③ n'est pas dévié par L_2 puisqu'il passe par O_2 ; et, l'intersection du rayon ③ (émergeant de L_2) avec le plan focal image ④ de L_2 donne la position du foyer image secondaire F'_{S2} . Il suffit alors de tracer le rayon ⑤, l'émergeant du rayon ② dans L_2 et passant par F'_{S2} .

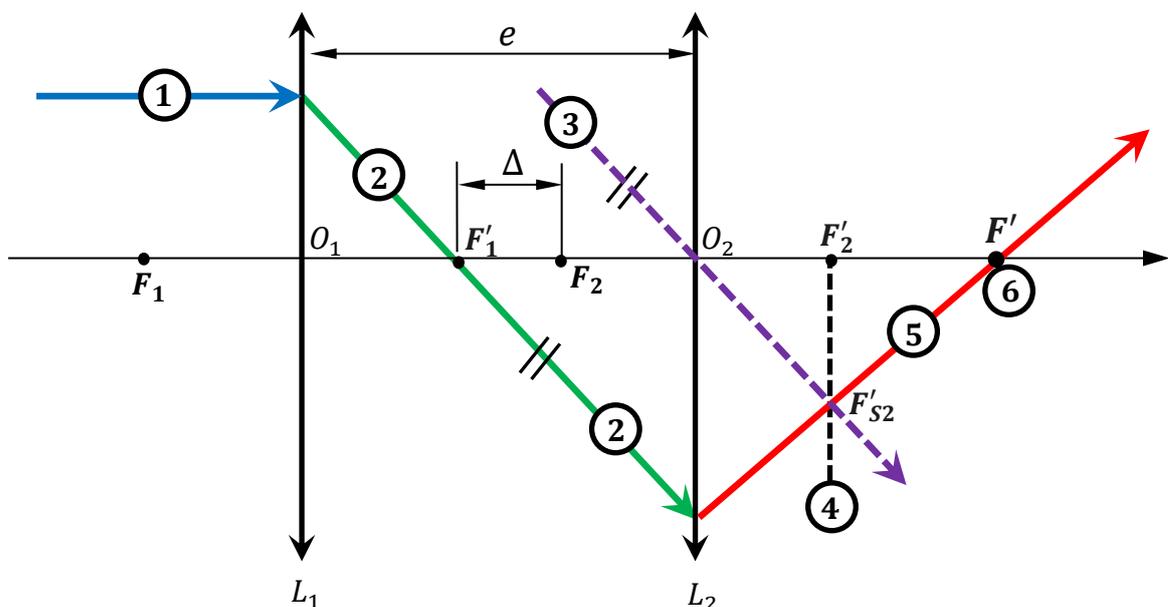


Figure 4.15 – Doublet de lentilles convergentes – construction du foyer image.

- 4) Le rayon ⑤ étant l'émergent à travers le doublet d'un rayon incident parallèle à l'axe optique ; l'intersection du rayon ⑤ avec l'axe optique permet alors de déterminer ⑥ qui est la position du foyer image F' du doublet.

✚ **Foyer objet F du doublet :**

- La Figure 4.16 illustre la détermination graphique du foyer objet F du doublet. Sachant que tout rayon incident issu du foyer objet F émergera (à travers le doublet) parallèle à l'axe optique, on suit alors les étapes successives suivantes :

- 1) On trace un rayon émergent ① parallèle à l'axe optique.

Or dans L_2 , ce rayon émerge de L_2 parallèle à l'axe optique ; donc, l'incident correspondant doit provenir du foyer objet (F_2) de L_2 : d'où le rayon ②.

- 2) Il faut maintenant déterminer l'antécédent le rayon ② dans L_1 . Pour cela on exploite un foyer image secondaire particulier (F'_{S1}), intersection du plan focal image ③ de L_1 et du rayon ② (émergent de L_1).

Soit le rayon ④ passant par O_1 et par ce foyer image secondaire particulier F'_{S1} .

Les rayons ② et ④ ont le même foyer image secondaire (F'_{S1}) dans L_1 , donc leurs antécédents doivent arriver sur L_1 parallèles entre eux.

- 3) Le rayon ④ n'est pas dévié par L_1 puisqu'il passe par O_1 , on trace alors le rayon ⑤ parallèle à ④ : ⑤ est l'antécédent de ② pour L_1 mais, surtout ⑤ est le rayon incident qui arrive sur le doublet et qui correspond à l'émergent ① (parallèle à l'axe optique).
- 4) L'intersection du rayon ⑤ avec l'axe optique, ⑥ qui est alors la position du foyer objet F du doublet.

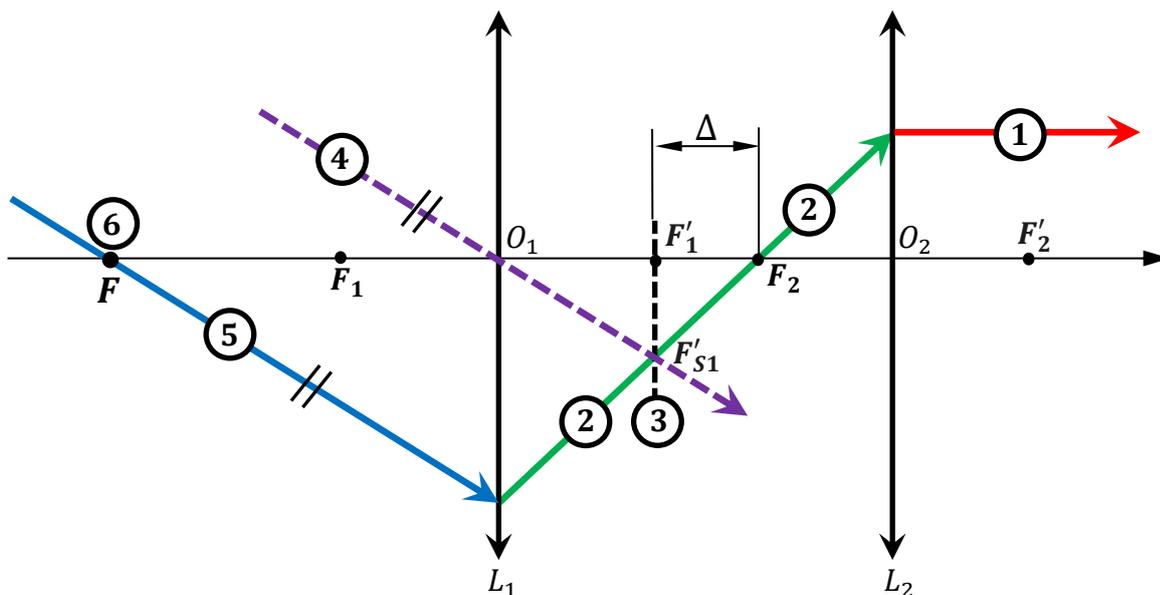


Figure 4.16 – Doublet de lentilles convergentes : construction du foyer objet.

■ DOUBLET DE LENTILLES CONVERGENTE ET DIVERGENTE

On considère $\Delta > 0$ où $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = e - (f'_1 + f'_2)$

✚ Foyer image F' du doublet :

- La Figure 4.17 illustre la détermination graphique du foyer image F' du doublet, et ce à travers les étapes successives suivantes :
- 1) On trace le rayon incident ① parallèle à l'axe optique ; l'émergent de ce rayon à travers le doublet rencontrera l'axe optique en F' . Or dans L_1 , l'émergent du rayon ① (parallèle à l'axe optique) passe par le foyer image F'_1 de L_1 : d'où, le rayon ②.
 - 2) Pour déterminer l'émergent du rayon ② dans L_2 , on exploite un foyer image secondaire particulier F'_{S2} . On considère alors le rayon ③, parallèle à ② et passant par O_2 . Les rayons ② et ③ doivent avoir alors un même foyer image secondaire.
 - 3) le rayon ③ n'est pas dévié puisqu'il passe par O_2 ; l'intersection du rayon ③ (ou de son prolongement) avec le plan focal image ④ de L_2 donne F'_{S2} .
 - 4) On trace le rayon ⑤, l'émergent du rayon ② dans L_2 qui doit passer par F'_{S2} .
 - 5) Le rayon ⑤ est l'émergent à travers le doublet et son intersection avec l'axe optique, ⑥ étant le foyer image F' du doublet.

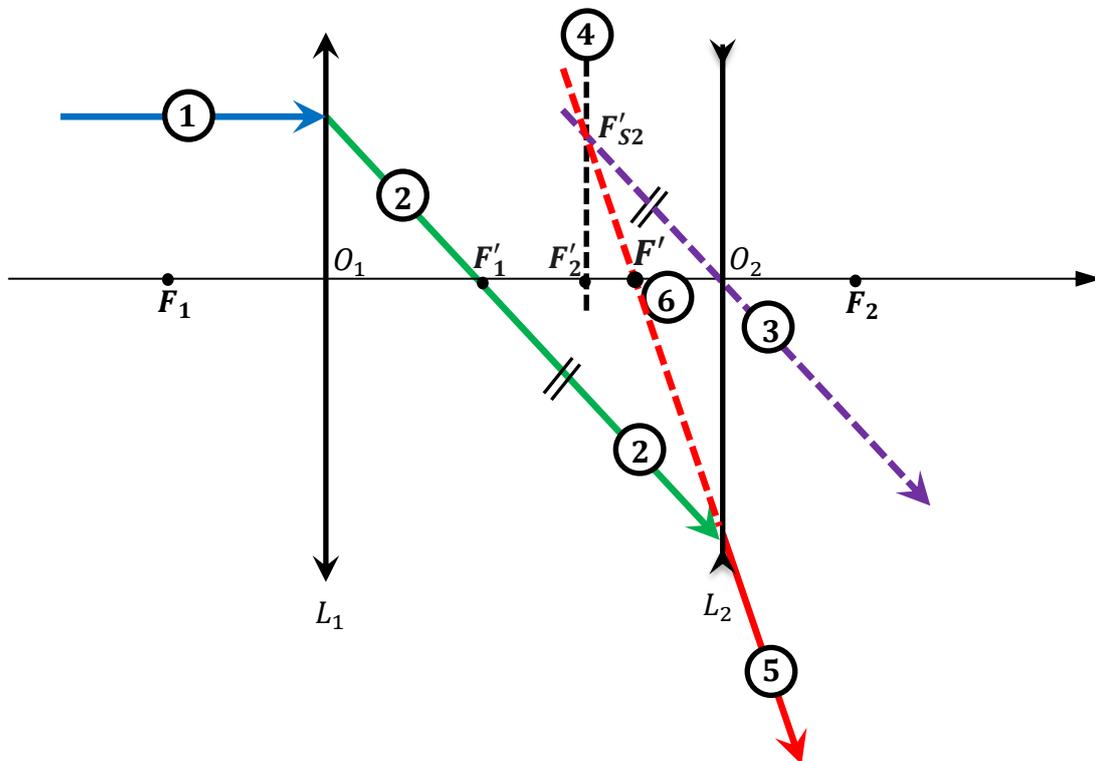


Figure 4.17 – Doublet de lentilles convergente et divergente : construction du foyer image.

✚ **Foyer objet F du doublet :**

➤ La Figure 4.18 illustre la détermination graphique du foyer objet F du doublet. Sachant que tout rayon incident issu du foyer objet F émergera (à travers le doublet) parallèle à l'axe optique, on suit alors les étapes successives suivantes :

- 1) On trace un rayon émergent ① parallèle à l'axe optique. Or dans L_2 , ce rayon émerge de L_2 parallèle à l'axe optique ; donc, l'incident correspondant (ou son prolongement) doit provenir du foyer objet (F_2) de L_2 : d'où le rayon ②.
- 2) Il faut maintenant déterminer l'antécédent le rayon ② dans L_1 . Pour cela on exploite un foyer image secondaire particulier (F'_{S1}), intersection du plan focal image ③ de L_1 et du rayon ② (émergent de L_1).

Soit le rayon ④ passant par O_1 et par ce foyer image secondaire particulier F'_{S1} .

Les rayons ② et ④ ont le même foyer image secondaire (F'_{S1}) dans L_1 , donc leurs antécédents doivent arriver sur L_1 parallèles entre eux.

- 3) Le rayon ④ n'est pas dévié par L_1 puisqu'il passe par O_1 , on trace alors le rayon ⑤ parallèle à ④ ; ⑤ est l'antécédent de ② pour L_1 mais surtout, ⑤ est le rayon incident qui arrive sur le doublet et qui correspond à l'émergent ① (parallèle à l'axe optique).
- 4) L'intersection du rayon ⑤ avec l'axe optique, ⑥ est alors la position du foyer objet F du doublet.

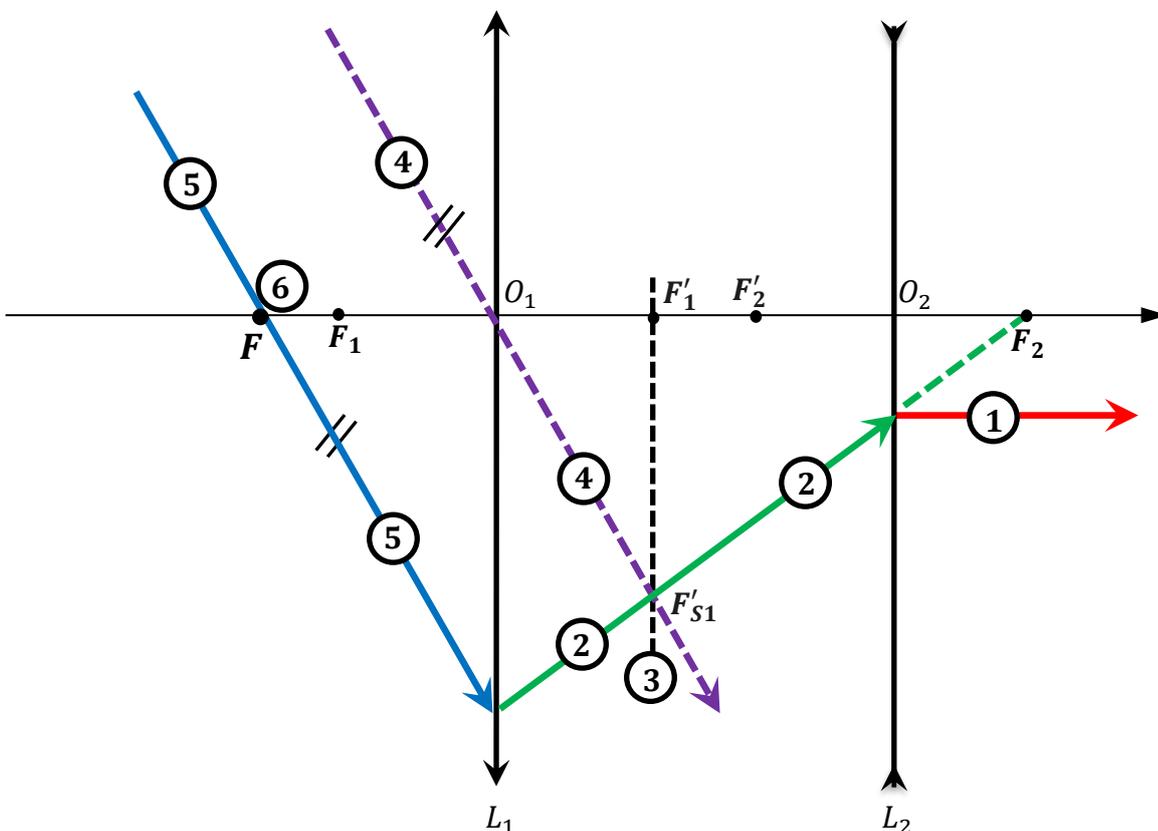


Figure 4.18 – Doublet de lentilles convergente et divergente : construction du foyer objet.

■ **DOUBLET AFOCAL ($F'_1 = F_2$)**

- Lorsque le *foyer image* (F'_1) de L_1 coïncide avec le *foyer objet* (F_2) de L_2 :

$$F'_1 = F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F'_1 F_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0$$

Soit encore d'après l'équation (4.14) :

$$e = f'_1 + f'_2 \quad (4.17)$$

- Les équations [4.15] et [4.16] montrent que pour $\Delta \rightarrow 0$, $\overline{F_1 F} \rightarrow \infty$ et $\overline{F'_2 F'} \rightarrow \infty$. Ainsi, les foyers objet (F) et image (F') du doublet sont rejetés à l'infini, le doublet est donc **afocal** : l'image d'un objet situé à l'infini est à l'infini (voir Figure 4.19).

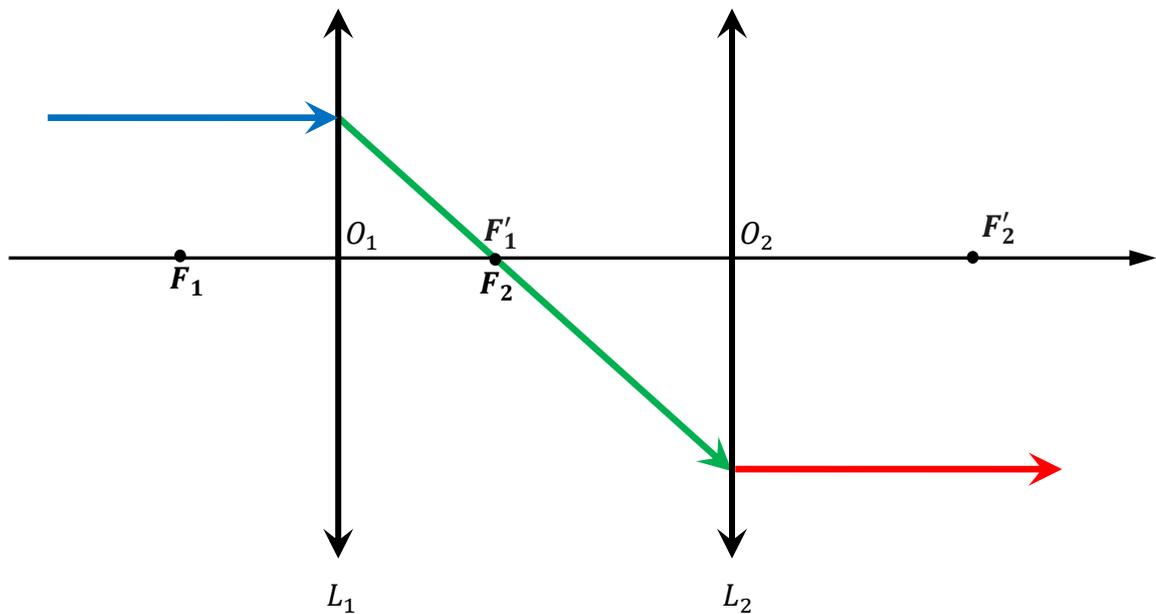


Figure 4.19 – Doublet afocal (illustration).

- De l'équation [4.17], on déduit que :
- ✚ Si les deux lentilles du doublet sont convergentes ($e > 0$), elles peuvent toujours former un doublet *afocal* ;
 - ✚ Si L_1 est convergente et L_2 divergente, les deux lentilles ne peuvent former un doublet *afocal* que si $f'_1 > -f'_2$ ($e > 0$).
 - ✚ Si L_1 est divergente et L_2 convergente, les deux lentilles ne peuvent former un doublet *afocal* que si $f'_2 > -f'_1$ ($e > 0$).
 - ✚ Si les deux lentilles sont divergentes, elles ne peuvent former un doublet *afocal*.
- Considérons un faisceau incident cylindrique de diamètre d_1 . La marche de ce faisceau à travers un doublet *afocal* est illustrée dans deux cas : à la figure 4.20, pour un doublet *afocal* constitué de deux lentilles convergentes ; et à la figure 4.21, pour un doublet *afocal* constitué de deux lentilles l'une divergente et l'autre convergente. Rappelons que, dans le 2^{ème} cas on doit avoir $f'_2 > -f'_1$ pour pouvoir former un doublet afocal.

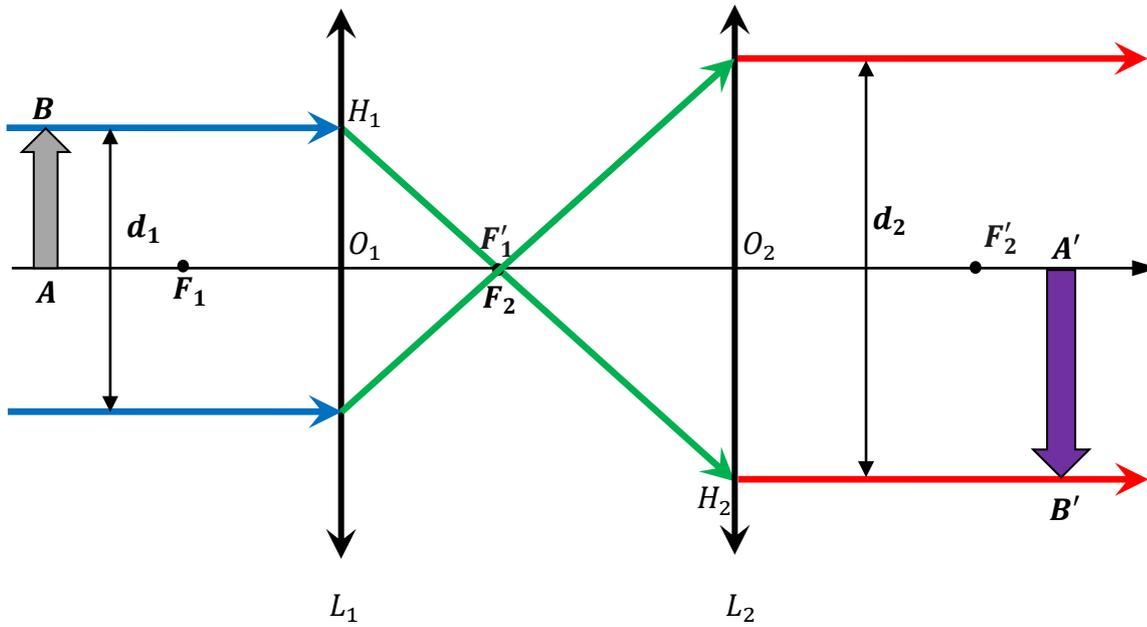


Figure 4.20 – Emergent d'un faisceau incident cylindrique par un **doublet afocal** constitué par deux lentilles convergentes.

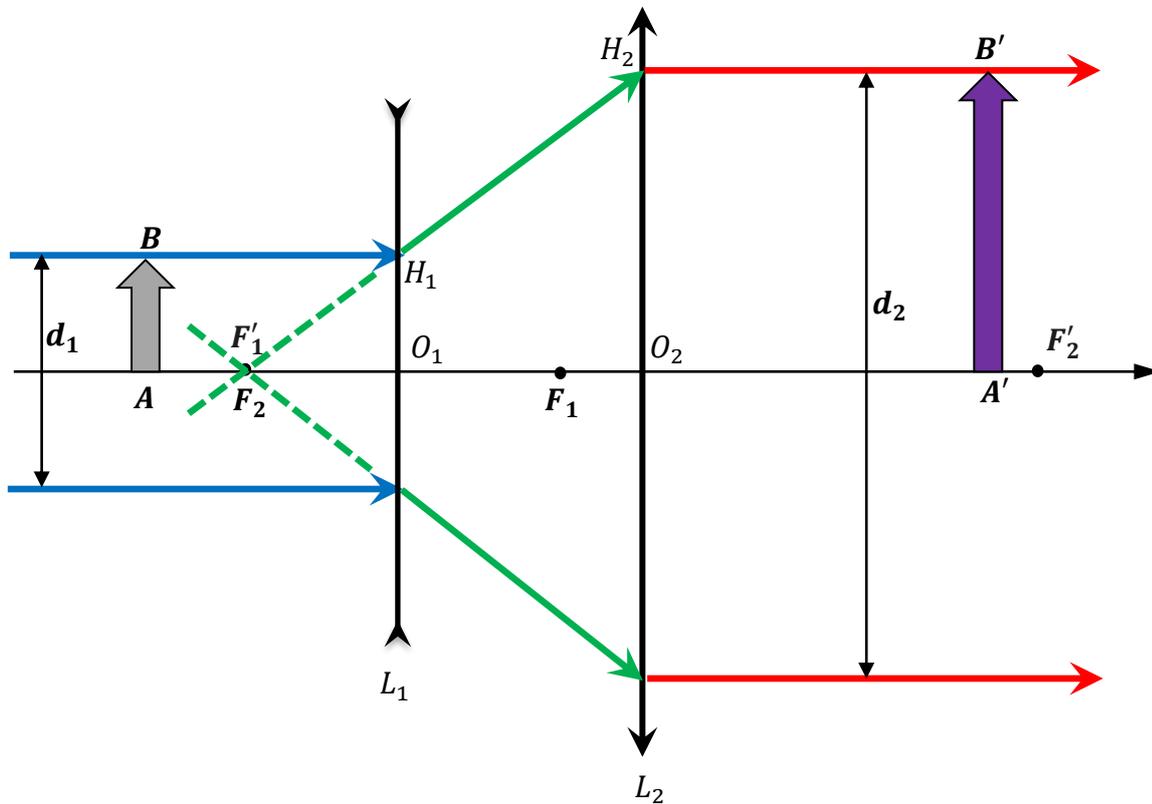


Figure 4.21 – Emergent d'un faisceau incident cylindrique par un **doublet afocal** constitué par une lentille divergente et l'autre convergente (telle que, $f'_2 > -f'_1$).

- Dans les deux cas, l'émergeant est un faisceau cylindrique de diamètre d_2 tel que, en considérant les triangles $(O_2F_2H_2)$ et $(O_1F'_1H_1)$:

$$\frac{d_2/2}{d_1/2} = \left| \frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{O_1H_1}} \right| = \left| \frac{\overline{O_2F_2}}{\overline{O_1F'_1}} \right| = \left| \frac{f_2}{f'_1} \right|$$

$$\frac{d_2}{d_1} = \left| \frac{f_2}{f'_1} \right| \quad (4.18)$$

Un doublet afocal permet d'élargir ou de réduire le diamètre d'un faisceau incident.

- Le grandissement est par ailleurs égal à (voir Figure 4.20 et 4.21) :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{O_1H_1}} = \frac{\overline{O_2F_2}}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{f_2}{f'_1}$$

✚ Le grandissement d'un doublet afocal :

$$\gamma = \frac{f_2}{f'_1} = -\frac{f'_2}{f_1} \quad (4.19)$$

- Le grandissement d'un doublet afocal est constant. Aussi, il est possible de constituer un doublet afocal de grandissement donné en associant deux lentilles dont les distances focales sont dans le rapport recherché : c'est le cas pour une lunette astronomique.

À RETENIR – FORMULAIRE

- Les lentilles à bords minces sont des lentilles **convergentes**.
- Les *lentilles* à bords épais sont des lentilles **divergentes**.

- Les **distances focales** image et objet d'une lentille sont **opposées** : $f' = -f$
- Les **foyers** image et objet d'une lentille sont **symétriques** par rapport à la lentille.

- Lentille **convergente** :

- ✓ sa **distance focale image** f' est **positive** (i.e. sa vergence est positive);
- ✓ sa **distance focale objet** f est négative ($f = -f'$);
- ✓ ses **foyers** objet image sont **réels**.

- Lentille **divergente** :

- ✓ sa **distance focale image** f' est **négative** (i.e. sa vergence est négative);
- ✓ sa **distance focale objet** f est positive ($f = -f'$);
- ✓ ses **foyers** objet image sont **virtuels**.

- Vergence** V d'une lentille :

$$V = +\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

- Relation de conjugaison avec origine au centre O – Descartes**

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V$$

- Relation de conjugaison avec origines aux foyers d'une lentille - Newton**

$$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = \overline{F'O} \times \overline{FO} = -f'^2 = -f^2 = ff'$$

- Grandissement d'une lentille :**

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

- Lentilles accolées**

- Vergence de la lentille L (équivalente à un doublet) : $V = V_1 + V_2$
- Grandissement de la lentille L (équivalente à un doublet) : $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Chapitre 5

Vision et instruments optiques

1. L'œil

1.1. Description et structure de l'œil

- L'œil, un globe oculaire d'environ 25 mm de diamètre et pesant environ 8 g, est composé d'une multitude d'organes : des systèmes optiques complexes avec plusieurs surfaces et mécanismes de réfraction pouvant faire varier la distance focale et/ou la quantité de lumière admise.
- La Figure 5.1 présente la structure anatomique d'un œil humain vu en coupe.

On y distingue en particulier :

- ✓ L'**iris** : membrane en forme de disque perforée en son centre par la *pupille*, c'est la partie colorée de l'œil.
- ✓ Le **cristallin** : situé derrière l'iris, il a une forme biconvexe flexible et transparente ; son élasticité permet de focaliser la lumière sur la rétine en modifiant ses courbures lors du processus d'**accommodation** (Cf. paragraphe 1.3).
- ✓ La **rétine** : membrane très mince située au fond du globe oculaire ; elle est constituée de photorécepteurs (cônes et bâtonnets) sensibles à la lumière et de neurones qui transmettent les signaux électriques au cerveau via le nerf optique.
- ✓ La **cornée** : paroi transparente située à l'avant de l'œil, elle permet de faire converger la lumière incidente vers le cristallin, avant de rencontrer la rétine.

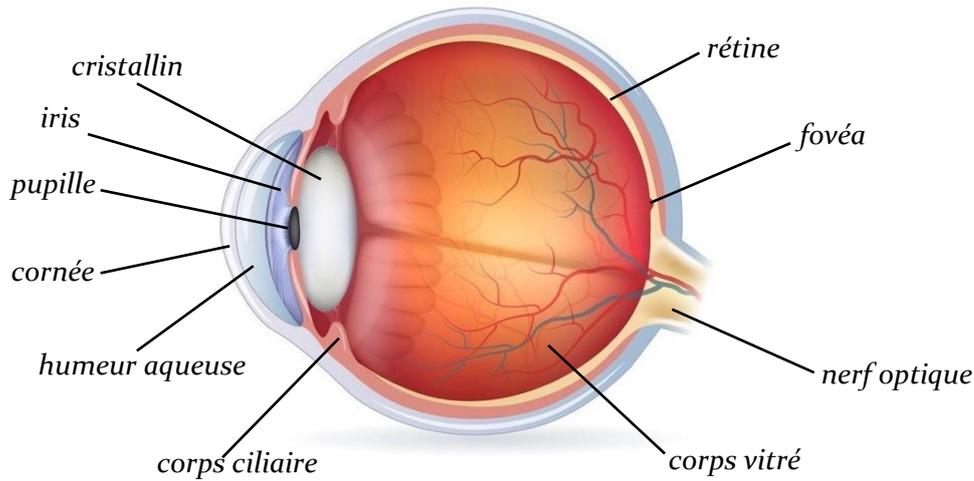


Figure 5.1 – Anatomie d'un œil humain vu en coupe.

- Comme instrument optique, l'œil *réduit* est représenté par :
 - ✓ L'iris, qui joue le rôle d'un **diaphragme** : il permet de réguler la quantité de la lumière (l'intensité lumineuse) pénétrant dans l'œil.
 - ✓ Le cristallin, qui représente la **lentille** convergente de l'œil ; de *distance focale variable* (selon la contraction des muscles ciliaires), la lentille permet de concentrer les rayons lumineux afin de former une image (renversée) sur la surface sensible de la rétine.
 - ✓ La rétine, « détecteur », joue le rôle d'**écran** qui permet de recueillir l'image.

1.2. Modélisation : lentille simple

- L'œil *réduit* est modélisé donc par une **lentille convergente** (cristallin) de distance focale variable et par un **écran** (rétine).
- La lentille et l'écran étant situés l'un de l'autre à une **distance fixe** : la profondeur de l'œil (voir figure 5.2).
- Des fois, mais rarement, on leur adjoint un diaphragme (iris), placé devant la lentille.

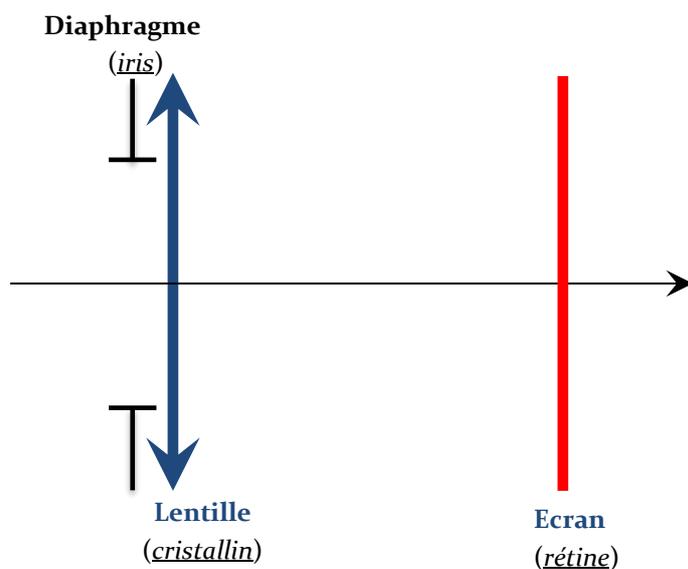


Figure 5.2 – Modèle de l'œil : Lentille simple.

1.3. Propriétés de l'œil

1.3.1. Accommodation, Punctum Remotum (PR), Punctum Proximum (PP)

- Pour voir **net** il faut que l'image d'un objet se forme sur la rétine.
- Quand l'œil fonctionne correctement, sa lentille équivalente fait converger les rayons lumineux en un point image situé (exactement) sur la surface de la rétine. L'œil procure alors une vision nette.
- On appelle **accommodation** la capacité de l'œil à ajuster sa vision et à focaliser l'image sur la rétine, selon que l'objet regardé est proche ou lointain. Plus précisément, le processus d'accommodation consiste à contracter les muscles ciliaires et rendre ainsi **temporairement** le cristallin **plus convergent**.
- L'œil au **repos** : l'œil n'accommode pas, son cristallin n'est donc pas contracté.
- L'œil au **repos** voit **net** jusqu'à une distance **maximale** (d_M) ; le point situé à cette distance maximale porte le nom de **Punctum Remotum** noté **PR**.
- Pour voir **net** des objets plus **proches** que le **PR** l'œil doit alors accommoder ; mais, cette accommodation présente des limites (temporaire et entraîne une fatigue).
- En accommodant **au maximum** (vergence maximale), l'œil voit **net** à (à partir de) une distance **minimale** (d_m), dite encore distance minimale de mise au point ; le point situé à cette distance minimale est appelé **Punctum Proximum** noté **PP** : il correspond au point le plus proche que peut voir nettement un œil.
- La zone située **entre** le **PP** et le **PR** est appelé **champ en profondeur** ou encore **plage d'accommodation** (de l'œil). Un objet situé dans cette zone (*i.e.* entre entre le PP et le PR) sera visible pour l'œil.
- Les Figures 5.3 et 5.4 illustrent la formation de l'image d'un objet situé respectivement, au PR et au PP.

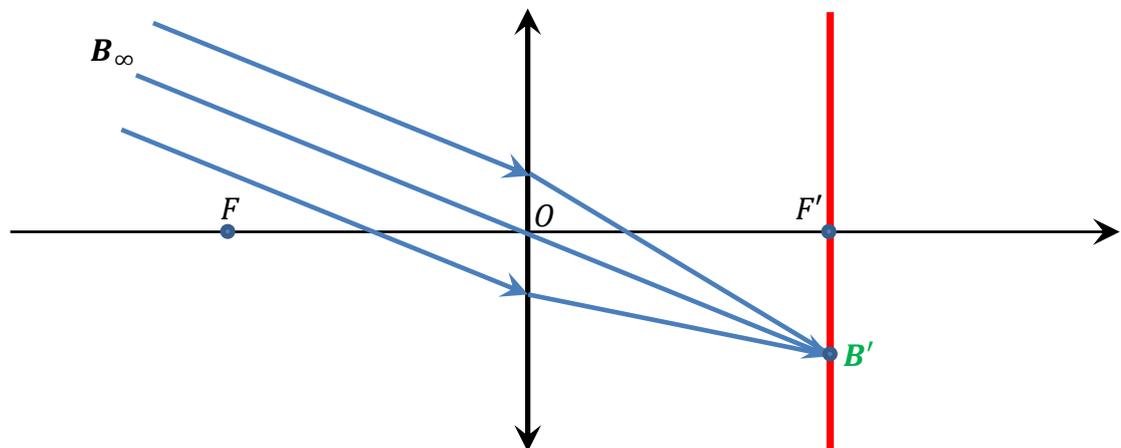


Figure 5.3 – Formation de l'image d'un objet au PR.

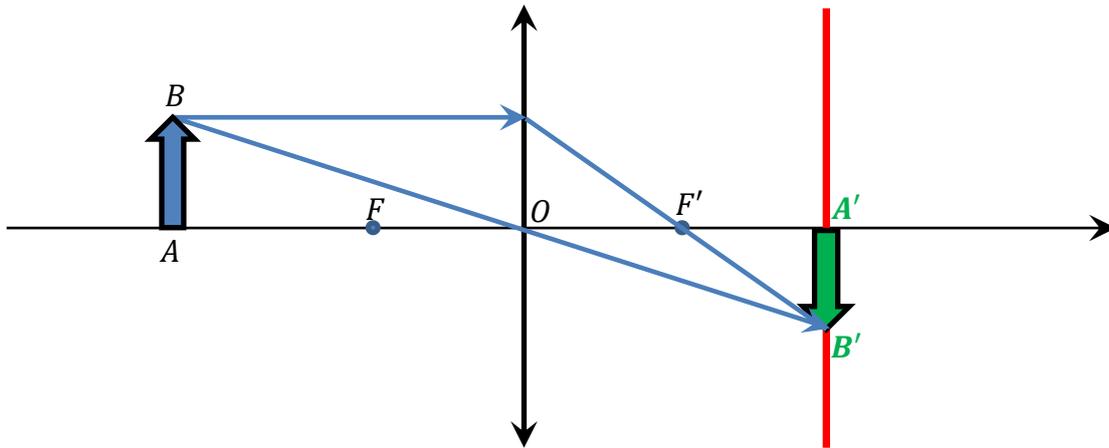


Figure 5.4 – Formation de l'image d'un objet au PP.

1.3.2. Œil emmétrype

- Pour un œil normal (sans défauts) adulte dit **œil emmétrype**, le PR est situé à l'infini ($d_M \rightarrow \infty$) et le PP à 25 cm ($d_m = 25$ cm), voir les illustrations des figures 5.5 (a) et (b).
- Au PP, l'œil est à son accommodation maximale (vergence maximale), tandis qu'au PR, l'œil n'accommode pas : il est au repos et sa vergence est minimale.
- A cause de l'élasticité du cristallin qui diminue avec l'âge, le PP d'un œil varie en fait en fonction de l'âge : PP entre 8 et 100 cm (voir Tableau 5.1), au lieu des 25 cm.

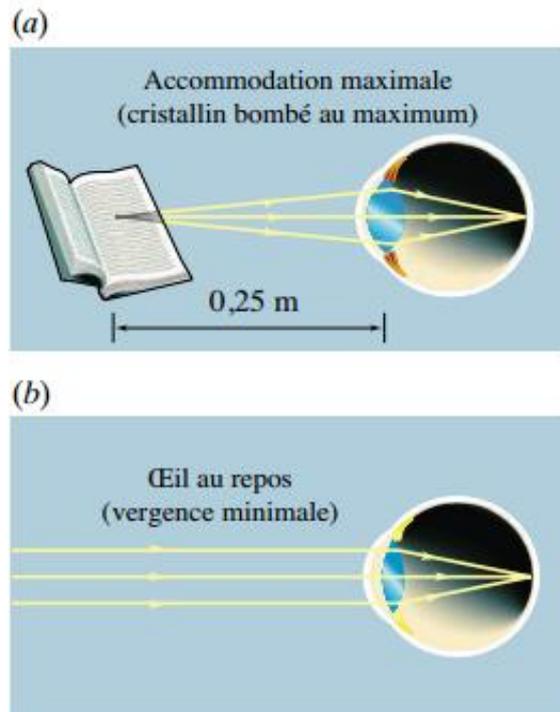


Figure 5.5 (a),(b) - Un œil emmétrype peut voir tout objet situé entre 25 cm en accommodant au maximum et l'infini (sans accommoder : œil au repos).

Tableau 5.1 : Le Punctum Proximum (PP) aux différents âges.

Age (ans)	< 10	30	40	60
PP (cm)	7 – 8	15	25	> 100

1.3.3. Pouvoir séparateur de l'œil et acuité visuelle

- Dans de bonnes conditions d'éclairage (ni trop sombre, ni trop lumineux) et de contraste, l'œil distingue des détails d'environ **1' d'arc** soit 3×10^{-4} rad qui correspond donc au **pouvoir séparateur** ou **limite de résolution** de l'œil.
- Ce pouvoir séparateur reflète la capacité de l'œil à séparer deux points P et Q voisins : P et Q peuvent être vus **distinctement** si leur écart angulaire est supérieur à $\alpha_{min} = 3 \times 10^{-4}$ rad.

Si deux points P et Q sont vus d'une distance d , pour les voir **distinctement** il faut que :

$$\frac{PQ}{d} = \alpha > \alpha_{min} = 3 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad (5.1)$$

- L'**acuité visuelle** étant définie comme l'inverse du pouvoir séparateur (l'inverse de l'angle).

1.4. Les défauts de vision

De nombreux défauts de vision peuvent affecter l'œil humain.

1.4.1. Myopie

- Un œil **myope** possède un cristallin trop convergent, ou alors une profondeur d'œil trop longue. L'image d'un objet **éloigné** (à l'infini) se forme alors **en avant** de la rétine (voir Figure 5.6).
- Le PR d'un œil **myope** est situé à une distance **finie** (et non pas infini) alors que son PP est **plus proche** que celui d'un œil normal.

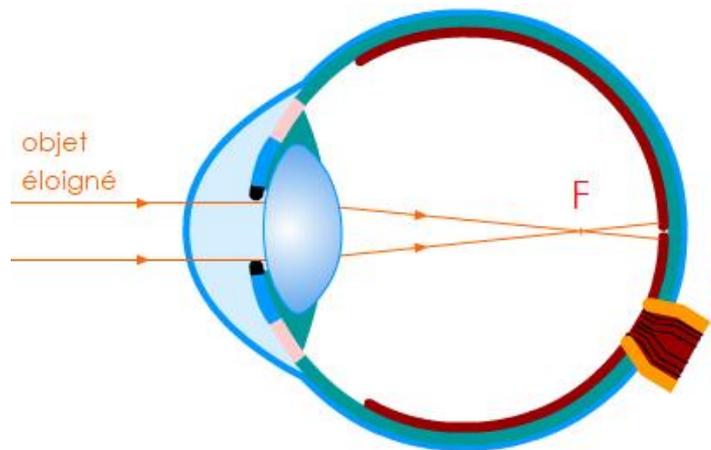


Figure 5.6 – Œil myope – Formation de l'image d'un objet éloigné (au PR) d'un œil myope.

- L'œil myope voit **flou** les objets **éloignés**.
- Pour corriger ce défaut, il faut placer devant un œil **myope** une **lentille divergente** (afin de rendre « l'œil » **moins convergent**).

1.4.2. Hypermétropie

- Un œil **hypermétrope** possède un cristallin pas assez convergent, ou alors sa profondeur d'œil est trop courte. L'image d'un objet **proche**, même après accommodation, se forme en **arrière** de la rétine (voir Figure 5.7).

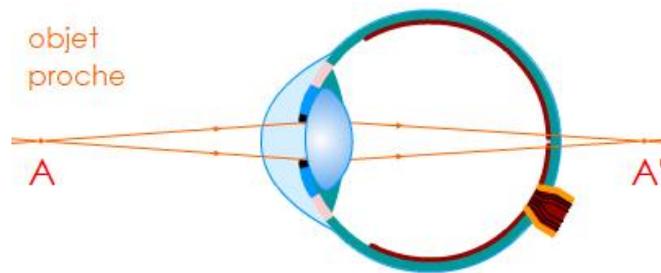


Figure 5.7 – Œil hypermétrope – Formation de l'image d'un objet proche (au PR) d'un œil hypermétrope.

- Le PR d'un œil *hypermétrope* est **virtuel** et son PP est plus **éloigné** que pour l'œil normal loin.
- L'œil hypermétrope voit **flou** les objets **proches**.
- Pour corriger l'hypermétropie, il faut rendre « l'œil » **plus convergent** : il faut placer devant un œil *hypermétrope* une **lentille convergente**.

1.4.3. Astigmatisme

- L'œil **astigmatique** ne possède pas la **symétrie** de révolution. Dans ce cas, la condition de stigmatisme n'est plus respectée.
- La correction de l'astigmatisme se fait par l'utilisation de lentilles non sphériques.

1.4.4. Presbytie

- L'œil devient **presbyte** : avec l'âge, le cristallin perd progressivement son élasticité (les muscles sont fatigués) et devient moins déformable ; ceci entraîne alors une difficulté d'accommodation (c'est la presbytie).
- La presbytie n'est pas un défaut géométrique.
- Les objets proches sont moins bien vus pour l'œil presbyte et surtout le champ en profondeur diminue.
- La correction de la presbytie se fait à l'aide, soit de verres à double foyer (une correction pour la vision de loin et une correction pour la vision de près), soit de verres progressifs c'est-à-dire ayant une focale variable (selon la distance œil-objet).

2. Quelques instruments optiques

Nous allons citer quelques instruments optiques conçus notamment pour rendre apparents des détails qui ne sont pas visibles à l'œil nu.

2.1. Taille apparente d'un objet

- Soit θ l'angle sous lequel est perçu un objet AB à l'œil nu (voir Figure 5.8) ; et, soit θ' l'angle sous lequel le même objet AB est vu à travers un instrument. Ainsi, θ' est l'angle qui sous-tend l'image finale $A'B'$ (image de AB) produite par l'instrument (voir Figure 5.9). On a toujours : $\theta' > \theta$.
- Les instruments cités ci-après ont en commun de produire une image dont la taille apparente est supérieure à la taille apparente (maximale) de l'objet à l'œil nu.

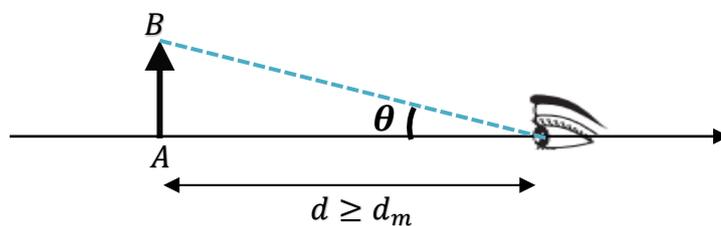


Figure 5.8 – Observation d'un objet AB à l'œil nu.

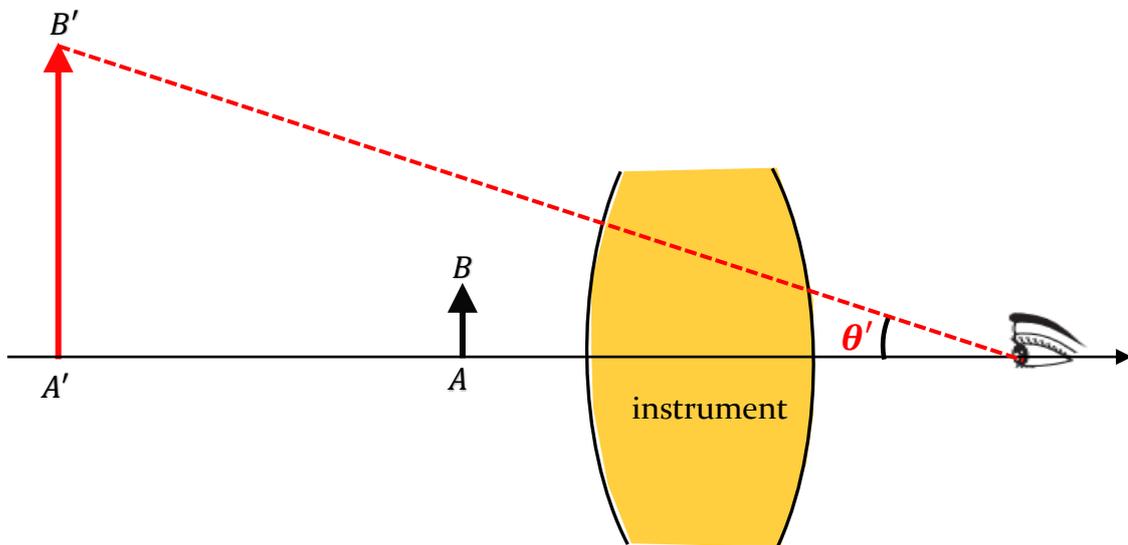


Figure 5.9 – Perception de l'image virtuelle $A'B'$ (image de AB) à travers un instrument.

2.2. Puissance et grossissement d'un instrument

2.2.1. Puissance d'un instrument

- La **puissance** P d'un instrument, exprimée en dioptries, est le rapport positif :

$$P = \left| \frac{\theta'}{AB} \right| \quad \heartsuit \quad (5.2)$$

- La puissance *intrinsèque* P_i est atteinte lorsque l'image donnée par l'instrument est à l'infini.

2.2.2. Grossissement d'un instrument

- Le **grossissement** (angulaire) G d'un instrument est défini comme le rapport :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

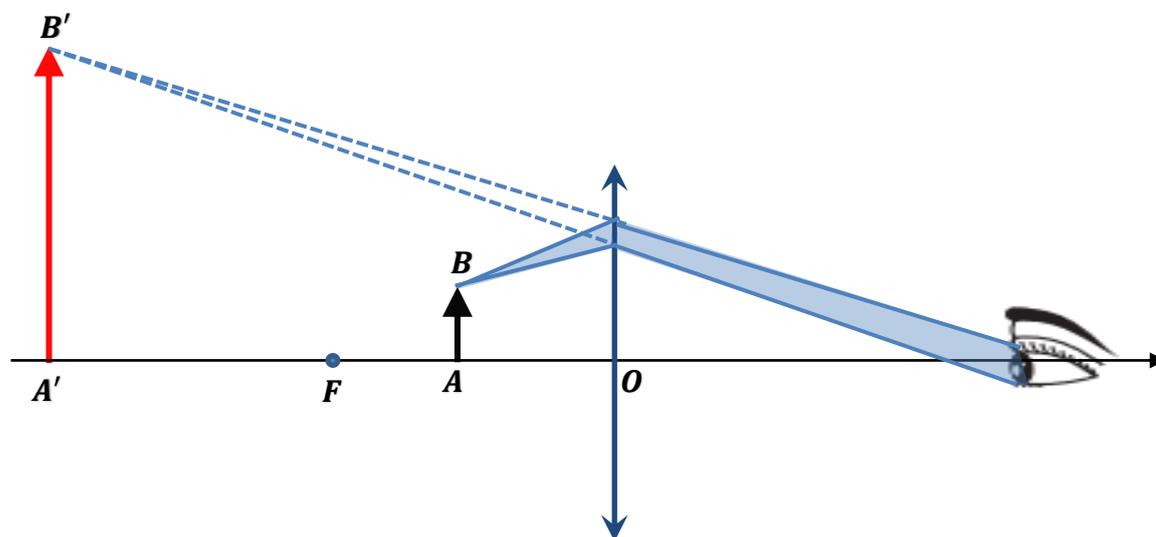
où θ est l'angle sous lequel est perçu l'objet à l'œil nu et θ' est l'angle sous lequel l'objet est vu à travers l'instrument.

- Lorsque l'objet est vu au PP (25 cm) à l'œil nu avec un angle θ , et au PR (à l'infini) de l'œil emmétrope avec θ' , on obtient le grossissement *commercial* $G_c = \theta' / \theta$.
- Attention : Ne pas confondre *grossissement* et *grandissement*.

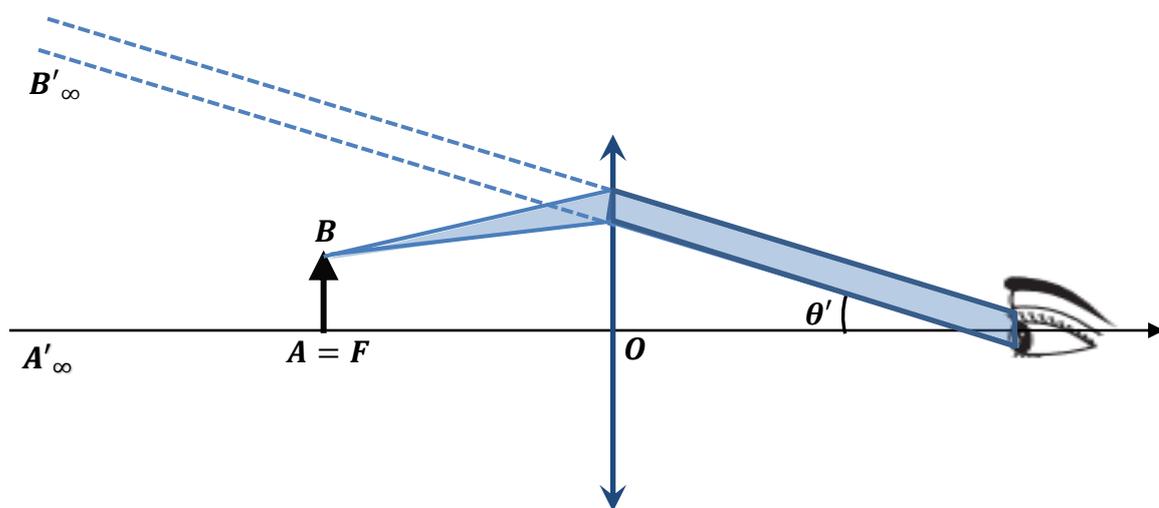
2.3. Instrument grossissants

2.3.1. Loupe

- En plaçant un objet au voisinage de son foyer objet, la loupe (simple lentille convergente) donne une image grossie vue sans fatigue.
- Un œil placé de l'autre côté de la loupe observe une image virtuelle, droite et agrandie (voir Figure 5.10-a).
- Si l'objet est placé au foyer objet de la loupe (voir Figure 5.10-b), il y a peu de distorsions de l'image si on approche l'œil du centre optique de la loupe.



(a) L'image (virtuelle) $A'B'$ est plus grande que AB .

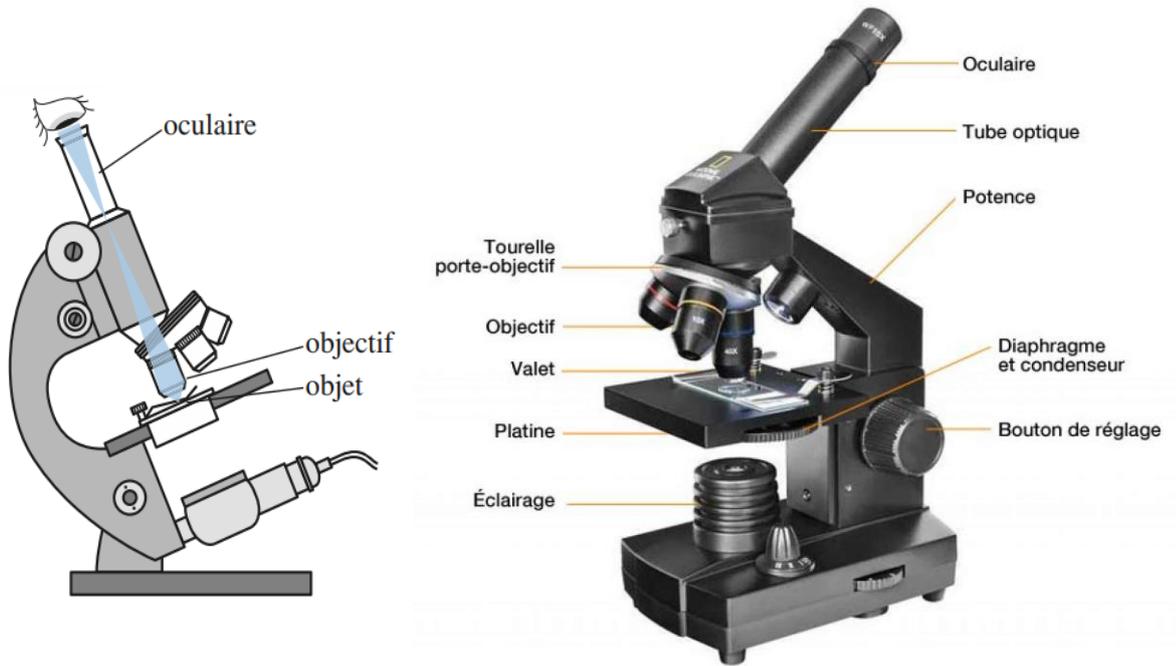


(b) L'image est à l'infini.

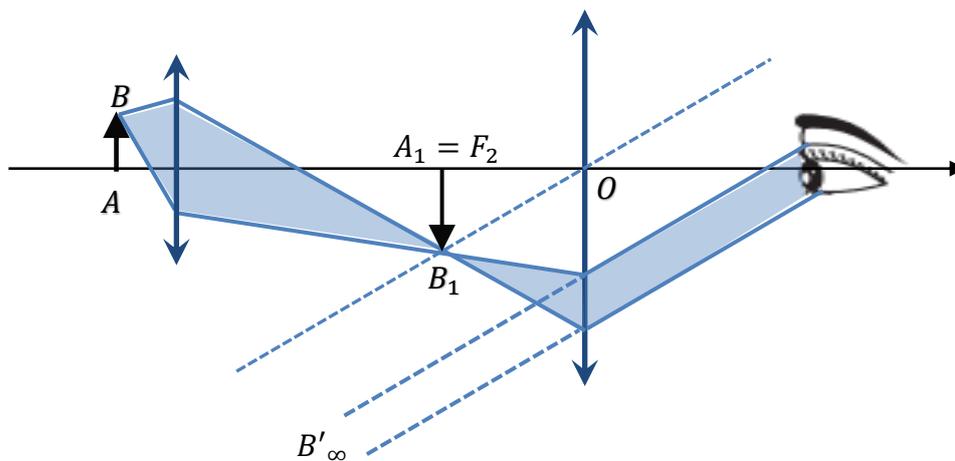
Figure 5.10 – Loupe – Observation à la loupe.

2.3.2. Microscope

- Le plus courant des microscopes optiques est le microscope à lentilles multiples qui combine deux systèmes de lentilles : l'objectif et l'oculaire (voir Figure 5.11-a).
- Le microscope permet d'observer (discerner) des objets de très petite taille, qui ont un diamètre trop petit pour être distingués à l'œil nu.
- Le principe d'un microscope est illustré de manière sommaire à la Figure 5.11-b.



(a) Aspect et composantes d'un microscope optique.



(b) Principe d'un microscope optique.

Figure 5.11 – Microscope optique.

2.3.3. Lunette astronomique

- Elle sert à observer des objets lointains (à l'infini), sous un angle plus grand qu'à l'œil nu.
- Les foyers de la lunette astronomique sont à l'infini : c'est un système afocal.
- Dans une lunette astronomique, le plan focal image de l'objectif est confondu avec le plan focal objet de l'oculaire (voir Figures 5.12-a, -b).
- Le grossissement de la lunette est le rapport des focales de son objectif et de son oculaire : $G = -f'_1/f'_2$.

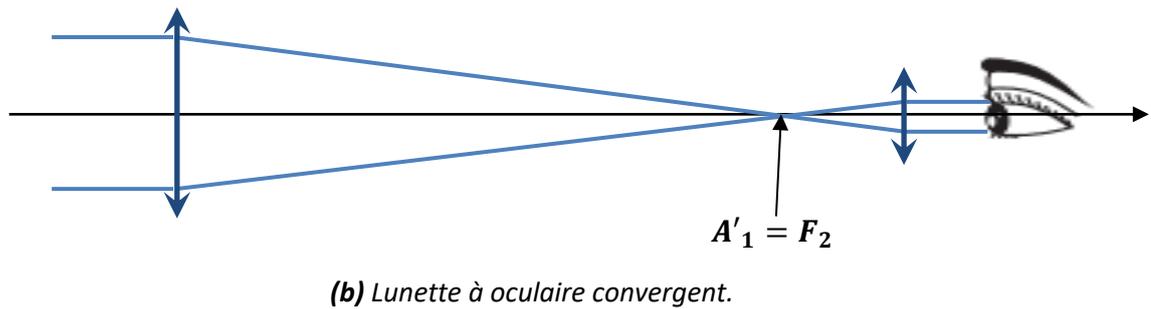
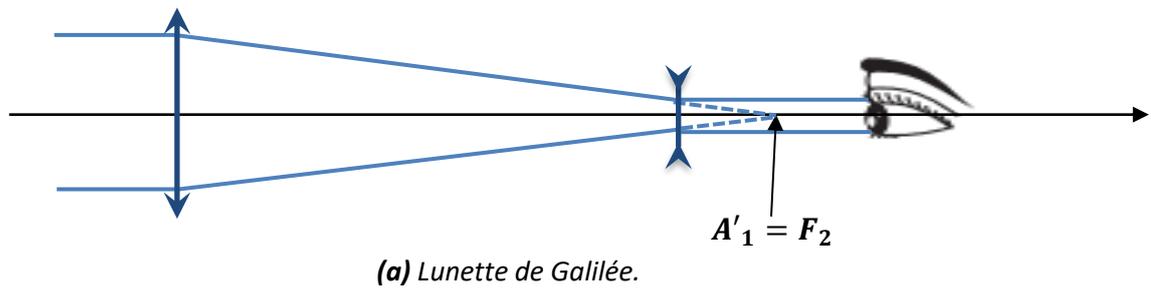


Figure 5.12 – Lunette astronomique.

À RETENIR – FORMULAIRE

- L'œil (*réduit*) est représenté par :
 - ✓ Un diaphragme, qui modélise l'iris et qui permet de réguler l'intensité lumineuse pénétrant dans l'œil.
 - ✓ Une lentille convergente (de focale variable), qui modélise le cristallin et qui permet de concentrer les rayons lumineux afin de former une image inversée sur la surface de la rétine.
 - ✓ Un écran, qui modélise la rétine et qui permet de recueillir l'image.
- Un œil qui n'accommode pas (*i.e.* au repos) voit net le PR.
- Un œil accommode au maximum pour voir net le PP.

- Un œil **emmétrope** est un œil normal : le PR est à l'**infini**, et le PP est à environ **25 cm** devant l'œil.

- **Champ en profondeur** ou *plage d'accommodation* de l'œil : zone située entre le PP et le PR.
- **Pouvoir séparateur** ou *limite de résolution* de l'œil (dans de bonnes conditions d'éclairement et de contraste) : environ **1' d'arc**.

- Un œil **myope** possède un cristallin trop convergent :

- le PR est à une distance finie, et le PP < 25 cm (PP œil emmétrope) ;
- voit flou les objets **éloignés** ;
- lentille **divergente** pour la correction.

- Un œil **hypermétrope** possède un cristallin pas assez convergent

- le PR est virtuel, et le PP > 25 cm (PP œil emmétrope) ;
- voit flou les objets **proches** ;
- lentille **convergente** pour la correction.

- Un œil **presbyte** possède des difficultés d'accommodation :

- voit moins bien les objets proches ;
- son champ en profondeur retreint (plus petit).
- verres à double foyer ou verres progressifs pour la correction.

- **Puissance** d'un instrument (en dioptries) :

$$P = \left| \frac{\theta'}{AB} \right|$$

- **Grossissement G** d'un instrument :

$$G = \frac{\theta'}{\theta}$$

Annexe A

Spectre électromagnétique

- Le *spectre électromagnétique* désigne l'ensemble des radiations : rayons *Gamma*, rayons *X*, *ultraviolet*, *visible*, *infrarouge*, *Micro-ondes* et *ondes radio* ; chacune de ces radiation correspond à un domaine précis de longueurs d'onde et de fréquences (voir correspondances Figure A.1 et Tableau A.1).
- Toute onde électromagnétique se propage dans le **vide** à la « *vitesse de la lumière* » (célérité) $c \cong 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, avec : $c = \lambda_0 \times f$. La vitesse (célérité) c étant une *constante universelle* : elle est la même quelle que soit la fréquence de l'onde électromagnétique et quel que soit le référentiel *galiléen* considéré.
- Le Tableau A.2 indique les sous-unités de longueurs d'onde habituellement utilisées pour chaque type de radiation électromagnétique.
- La lumière *visible* représente une (très) petite fenêtre du spectre électromagnétique. Usuellement, la lumière *visible* subdivisée en couleurs de l'arc en ciel où chaque couleur est associée à une longueur d'onde bien définie. Le Tableau A.3 indique la correspondance « *couleur – longueur d'onde dans le vide λ_0* » de la lumière *visible*.

Tableau A.1 : Les divers types de radiation du spectre électromagnétique et leurs domaines de correspondance en longueurs d'onde dans le vide et en fréquences.

Type de radiation	Domaine de longueur d'onde	Domaine de fréquence
Rayons Gamma	$< 10^{-12}$ m	$> 3 \times 10^{20}$ Hz
Rayons X	10^{-12} m à 10^{-9} m	3×10^{17} Hz à 3×10^{20} Hz
Ultraviolet	10^{-9} m à 0.4×10^{-6} m	7.5×10^{14} Hz à 3×10^{17} Hz
Lumière Visible	0.4×10^{-6} m à 0.8×10^{-6} m	3.8×10^{14} Hz à 7.5×10^{14} Hz
Infrarouge	0.8×10^{-6} m à 1 mm	3×10^{11} Hz à 3.8×10^{14} Hz
Micro-ondes	1 mm à 0.1 m	3×10^9 Hz à 3×10^{11} Hz
Ondes Radio	> 0.1 m	$< 3 \times 10^9$ Hz

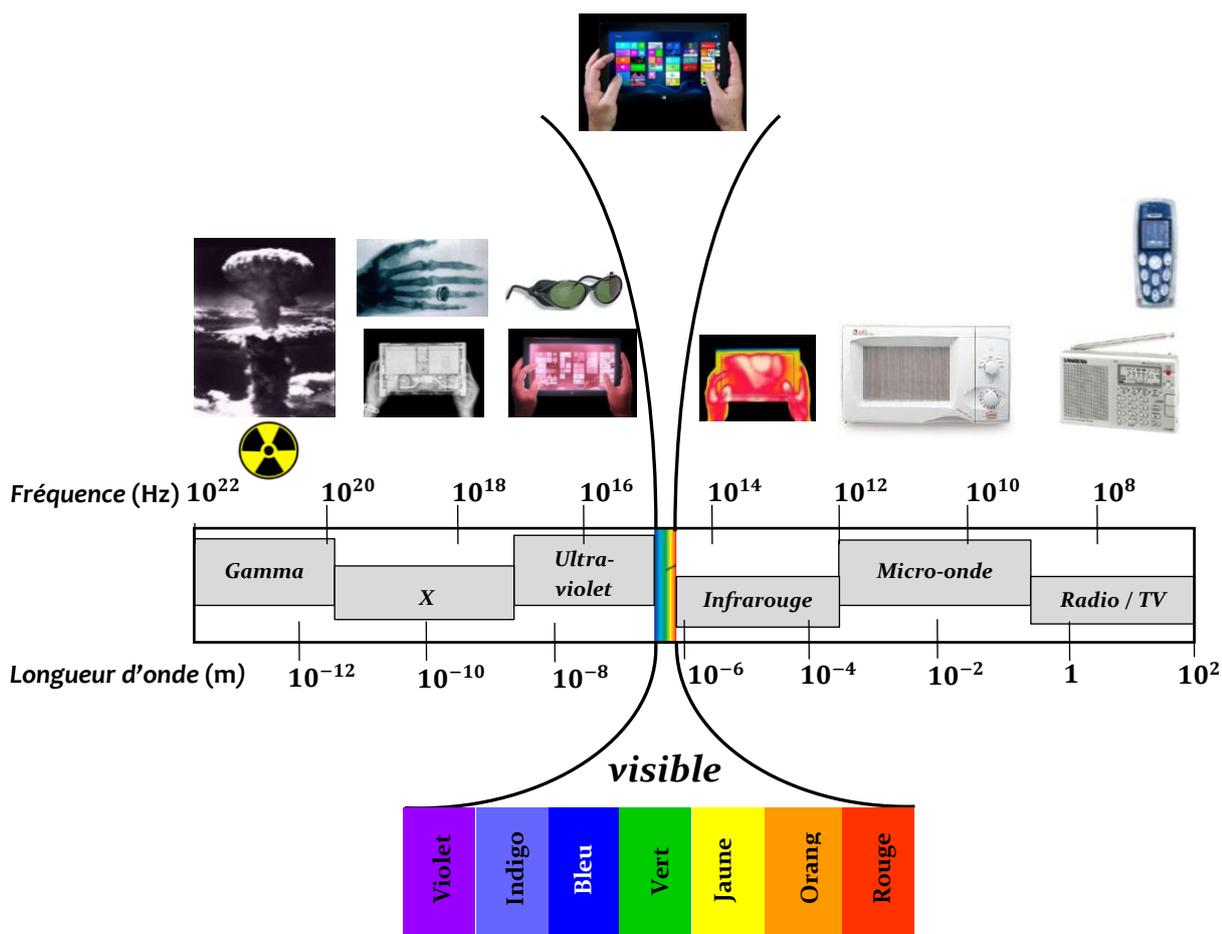


Figure A.1 : Spectre électromagnétique : Fréquences et longueurs d'onde dans le vide des ondes électromagnétiques. La lumière visible étant perçue comme les couleurs de l'arc en ciel où chaque couleur correspond à une longueur d'onde bien définie (Cf. Tableau A.3).

Tableau A.2 : Les **sous-unités** de longueur d'onde habituellement utilisées pour divers types de radiation électromagnétique.

Sous-unité	Symbole	Longueur d'onde (m)	Type de radiation
picomètre	pm	10^{-12}	rayons γ
angstrom	Å	10^{-10}	rayons X
nanomètre	nm	10^{-9}	ultraviolet
micromètre	μm	10^{-6}	lumière visible
millimètre	mm	10^{-3}	infrarouge
centimètre	cm	10^{-2}	micro-ondes
mètre	m	10^0	ondes radio

Tableau A.3 : Correspondance « couleur – longueur d'onde dans le vide λ_0 » de la lumière visible.

Couleur	Longueur d'onde dans le vide λ_0 (nm)
limite de l'ultraviolet	400
violet	420
Bleu	470
Vert	530
Jaune	580
Orange	600
Rouge	650
limite de l'infrarouge	780