Université My Ismail **Année Univer. 2019-2020**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Crrection de la série n$^o 4$

Exercice1 Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$(E_{1.1}):\ 2xy\frac{dy}{dx}-y^2=x^2$$

$$(E_{1.2}):\ \left(y-x^2y\right)y'+xy^2=x$$

$$(E_{1.3}):\ x^2y'-y^2=-2x^2$$

$$(E_{1.4}):\ \left(1-x^2\right)y'-xy-xy^2=0$$

Solution: Résolvons les équations différentielles d'ordre un suivantes:
• Pour $(E_{1.1}):\ 2xy\frac{dy}{dx}-y^2=x^2$ on a

$$\begin{aligned}(E_{1.1}) &\Leftrightarrow 2xy\frac{dy}{dx}=y^2+x^2\\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+1,\ x\neq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (0.1)\end{aligned}$$

(0.1) est bien un équation homogène, posons donc $\alpha=\frac{y}{x}$, ce qui nous ramène à résoudre

$$\begin{aligned}(E'_{1.1}) &: \alpha+x\alpha'=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}\\ &\Leftrightarrow \frac{d\alpha}{dx}=\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\times\frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}d\alpha=\frac{dx}{x} \qquad (0.2)\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de (0.2) on obtient

$$\begin{aligned}(E'_{1.1}) &\Leftrightarrow -\ln\left(1-\alpha^2\right)=\ln(x)+cte\\ &\Leftrightarrow \alpha^2=1+\frac{cte}{x}\\ &\Leftrightarrow y^2=x^2+cte\times x \qquad (0.3)\end{aligned}$$

Conclusion: la solution générale de $(E_{1.1})$ est $y(x)=\mp\sqrt{x^2+\kappa x}$, $\kappa\in\mathbb{R}_+^*$

- L'équation $(E_{1.2}): \ (y-x^2y)\,y'+xy^2=x$ s'écrit,

$$\begin{aligned}(E_{1.2}) &\Leftrightarrow \left(y-x^2y\right)\frac{dy}{dx}+xy^2-x=0\\ &\Leftrightarrow y\left(1-x^2\right)dy+x\left(y^2-1\right)dx=0\\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1}dx=\frac{y}{y^2-1}dy(y\neq\mp1,\, x\neq\mp1) \qquad (0.4)\end{aligned}$$

les fonctions constantes $y=\mp1$ sont bien solutions de $(E_{1.2})$ les autres solutions s'obtiennent en intégrant les deux membres de (0.4) pour avoir

$$\begin{aligned}\int\frac{y}{y^2-1}dy=\int\frac{x}{x^2-1}dx &\Leftrightarrow \ln\left|y^2-1\right|=\ln\left|x^2-1\right|+cte\\ &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y^2-1}{x^2-1}\right|=cte\\ &\Leftrightarrow \left|y^2-1\right|=\kappa\left|x^2-1\right|,\ \kappa\in\mathbb{R}_+^*\\ &\Leftrightarrow y^2=\kappa\left|x^2-1\right|+1,\ \kappa\in\mathbb{R}_+^*\\ &\Leftrightarrow y=\mp\sqrt{\kappa\left|x^2-1\right|+1},\ \kappa\in\mathbb{R}_+^*\end{aligned}$$

Conclusion; Les solutions de $(E_{1.2})$ sont

$$y=\mp1 \text{ et } y=\mp\sqrt{\kappa\left|x^2-1\right|+1},\ \kappa\in\mathbb{R}_+^*$$

- L'équation $(E_{1.3}): \ x^2y'-y^2=-2x^2$ s'intègre par

$$(E_{1.3}) \Leftrightarrow y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2-2,\ (x\neq0) \qquad (0.5)$$

(0.5) est une équation homogène, donc pour la résoudre on pose $y = x\alpha$, par dérivation on obtient $y' = \alpha + x\alpha'$ par substitution dans (0.5) on aura,

$$\begin{aligned}
(E'_{1.3}) \quad &: \quad x\alpha' + \alpha = \alpha^2 - 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x\frac{d\alpha}{dx} == \alpha^2 - \alpha - 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d\alpha}{\alpha^2 - \alpha - 2} = \frac{dx}{x} \qquad (0.6)
\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de (0.6) on obtient:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 - \alpha - 2} = \int \frac{dx}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha + 1}\right) d\alpha = \int \frac{3dx}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{\alpha - 2}{\alpha + 1}\right| = \ln|x|^3 + cte \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha - 2}{\alpha + 1} = \kappa x^3, \; \kappa \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha - 2 = \kappa x^3 (\alpha + 1), \; \kappa \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha \left(\kappa x^3 - 1\right) = -2 - \kappa x^3, \; \kappa \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2 + \kappa x^3}{1 - \kappa x^3}, \; \kappa \in \mathbb{R} \qquad (0.7)
\end{aligned}$$

Conséquence: La solution générale de l'équatiqon différentielle $(E'_{1.3})$ est

$$y(x)x\alpha(x) = \frac{2x + \kappa x^4}{x - \kappa x^3}, \; \kappa \in \mathbb{R}$$

'• Pour l'équation $(E_{1.4}) : \left(1 - x^2\right) y' - xy - xy^2 = 0$ on a:

$$(E_{1.4}) \quad \Leftrightarrow \quad y' - \frac{x}{1 - x^2} y = \frac{x}{1 - x^2} y^2, \; \left(1 - x^2 \neq 0\right) \qquad (0.8)$$

Il est claire que la fonction identiquement nulle est solution triviale de $(E_{1.4})$. Déterminons alors les autres solutions non triviales $(y \neq 0)$. En divisant les deux membres de (0.8) par y^2, $(E_{1.4})$.s'écrit:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{1 - x^2} \times \frac{1}{y} = \frac{x}{1 - x^2}$$

qui est une équation de Bernoulli d'ordre $n = 2$. Pour la résoudre on effectue le changement $z = \frac{1}{y}$. Ce qui transforme cette équation en

$$\left(E'_{1,4}\right) \quad : \quad z' + \frac{x}{1-x^2} \times z = -\frac{x}{1-x^2}$$

dont l'équation homogène est $\left(H'_{1,4}\right)$ telle que

$$\begin{aligned}
\left(H'_{1,4}\right) \quad &: \quad z' + \frac{x}{1-x^2} \times z = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{x}{x^2-1} dx \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2-1} \right) dx
\end{aligned} \tag{0.9}$$

En intégrant les deux membres de (0.9) on aura

$$\begin{aligned}
\left(H'_{1,4}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2-1} \right) dx \\
&\Leftrightarrow \quad \ln |z| = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - 1 \right| + cte \\
&\Leftrightarrow \quad z^2 = \kappa \left(x^2 - 1 \right) \ \kappa \in \mathbb{R}_+^* \\
&\Leftrightarrow \quad z = \kappa \sqrt{x^2-1}, \ \kappa \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

De sorte que la solution générale de l'équation sans second membre $\left(H'_{1,4}\right)$ est $z_0(x) = \kappa \sqrt{x^2-1}$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Pour chercher une solution particulière de $\left(E'_{1,4}\right)$ on va faire varier la constante: $\kappa = \kappa(x)$ et $z(x) = \kappa(x)\sqrt{x^2-1}$ donc $z'(x) = \kappa'(x)\sqrt{x^2-1} + \kappa(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\kappa'(x)\sqrt{x^2-1} + \kappa(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \kappa(x)\frac{x}{x^2-1}\sqrt{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa'(x)\sqrt{x^2-1} &= \frac{x}{x^2-1} \\
&\Leftrightarrow \ \kappa'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} \\
&\Leftrightarrow \ \kappa'(x) = \left(\sqrt{x^2-1}\right)' \left(\sqrt{x^2-1}\right)^{-1-1} \\
&\Leftrightarrow \ \kappa'(x) = \left[-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\right]'
\end{aligned} \tag{0.10}
$$

Intégrons les deux membres de (0.10) pour avoir $\kappa(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}} + cte$ et pour la constante égale à zéro on obtient une solution particulière de $\left(E'_{1,4}\right)$,

$$z_p(x) = \kappa\sqrt{x^2-1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \times \sqrt{x^2-1} = -1$$

et la solution générale de $\left(E'_{1,4}\right)$ est

$$z(x) = z_0(x) + z_p(x) = -1 + \kappa\sqrt{x^2-1}$$

Conclusion: La solution générale autre que $y_0(x) = 0$ de l'équation initiale en y, $(E_{1,4})$ est

$$y_\kappa(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-1+\kappa\sqrt{x^2-1}},\ \kappa \in \mathbb{R}^*$$

Remarqu'on que la solution triviale $y_0 \equiv 0$ est obtenue en faisant tendre κ dans y_κ vers $+\infty$.

Exercice2 Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$(E_{2.1}) :\ y' + y = \cos x$$

$$(E_{2.2}) :\ y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(E_{2.3}) :\ ch\,(x)\,y' + sh\,(x)\,y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(E_{2.4}) : \ 6y' - 2y = xy^4$$

Solution: Intégrons les équations différentielles suivantes:
⋇ Concernant l'équation $(E_{2.1})$ qui a pour équation sans second membre

$$(H_{2.1}) : y' + y = 0$$

on a:

$$\begin{aligned} (H_{2.1}) \quad &: \quad \frac{dy}{dx} + y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx \end{aligned} \tag{0.11}$$

Intégron les membres de (0.11), on obtien la solution générale de $(H_{2.1})$:

$$y_0(x) = \kappa \exp(-x), \ \kappa \in \mathbb{R}_+^*$$

La méthode de la variation de la constante permet de trouver une solution particulière de l'EASM. Remarquant la forme du second membre de $(E_{2.1})$, nous allons chercher une solution particulière de la forme:

$$y_p(x) = M\cos(x) + N\sin(x)$$

Ainsi $y_p'(x) = -M\sin(x) + N\cos(x)$. Par substitution dans $(E_{2.1})$, on obtien

$$\begin{aligned} y_p' + y_p = \cos x \quad &\Leftrightarrow \quad -M\sin(x) + N\cos(x) + M\cos(x) + N\sin(x) = \cos(x) \\ &\Leftrightarrow \quad (N+M)\cos(x) + (-M+N)\sin(x) = \cos(x). \end{aligned} \tag{0.12}$$

On utilise le fait que $\{\cos, \sin\}$ est un système libre, ou bien on donne à x les valeurs 0 puis $\frac{\pi}{2}$ on arrive au système:

$$(S) \begin{cases} M + N & = 1 \\ -M + N & = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $M = N = \frac{1}{2}$, donc une solution particulière de l'EASM est $y_p(x) = \frac{1}{2}\{\cos(x) + \sin(x))$ par suite la solution générale de $(E_{2.1})$ est

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x) = \frac{1}{2}\{\cos(x) + \sin(x)) + \kappa \exp(-x), \ \kappa \in \mathbb{R}_+^*$$

$*$ La seconde équation $(E_{2.2}) :\ y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$ admet pour ESSM

$$(H_{2.2}) :\ y' + \frac{y}{x^2} = 0$$

qui est équivalente à:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$$

qui a pour solution générale

$$y_0(x) = \kappa e^{\frac{1}{x}},\ \kappa \in \mathbb{R}_+^*$$

Faisons varier la constante: $\kappa = \kappa(x)$ donc $y'(x) = \kappa' e^{\frac{1}{x}} - \frac{\kappa}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. Par substitution dans $(E_{2.2})$ on obtient $\dfrac{d\kappa}{dx} = 1$ et $\kappa(x) = x + cte$. Pour la $cte = 0$ on trouve $y_p(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ et la solution de L'EASM

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x) = (x + \kappa)\, xe^{\frac{1}{x}}$$

$*$ Quant à $(E_{2.3}) :\ ch\,(x)\, y' + sh\,(x)\, y = \frac{1}{1+x^2}$, elle n'est rient d'autre que

$$\frac{d}{dx}\left(ch(x)y(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\arctan(x)\right)$$

qui par intération donne

$$ch(x)y(x) = \arctan(x) + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

Conclusion; La solution générale de $(E_{2.3})$ est

$$y(x) = \frac{\arctan(x) + \kappa,}{ch(x)},\ \kappa \in \mathbb{R}$$

$*$ Il est clair que la fonction nulle est une solution de

$$(E_{2.4}) :\ 6y' - 2y = xy^4$$

Écartons la et divisons les membres de $(E_{2.4})$ par y^4 celle-ci se transforme en

$$6\frac{y'}{y^4} - 2\frac{1}{y^3} = x$$

qui est une équation de Bernoulli d'ordre $n = 4$. Posons alors $z(x) = \dfrac{1}{y^3(x)}$ ce qui nous ramène à résoudre

$$\left(E'_{2,4}\right) : -2z'(x) - 2z(x) = x$$

D'équation homogène:

$$\begin{aligned} \left(H'_{2,4}\right) &: \quad -2z'(x) - 2z(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -z \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{z} = -dx \end{aligned} \tag{0.13}$$

Par intégration on obtient:

$$z_0(x) = \kappa e^{-x},\ \kappa \in \mathbb{R}_+^*$$

On peut faire varier la constante pour trouver une solution particulière de $(E'_{2.4})$, mais de la forme de cette équation on cherche alors une solution particulière de la forme $z_p(x) = ax + b$ où a et b sont des réels à déterminer:.$z'_p(x) = a$. Ainsi $-2a - 2(ax + b) = x$. Se qui signifie que $-2ax - 2(a + b) = x$ c'est-à-dire $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ et

$$z_p(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

D'où la soulution générale de $(E_{2.4})$ est

$$z(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} + \kappa e^{-x},\ \kappa \in \mathbb{R}_+^*$$

Conclusion: La dolution générale de l'équation de départ $(E_{2.4})$ est

$$y(x) = \frac{1}{z^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} + \kappa e^{-x}\right)^{\frac{1}{3}}},\ \kappa \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice3: Résoudre les équations différentielles d'ordre deux suivantes,

$$(E_{3.1}) : y'' + 3y' + 2y = x^2 + e^{-x} + \sin(x)$$
$$(E_{3.2}) : y'' + 4y' + 5y = x\sin(x)\, e^{-2x}$$

Soltion: Intégrous les équations différentielles d'ordre deux suivantes,

⋇ L'équation sans second membre de $(E_{3.1})$ est

$$(H_{3.1}):\ y''+3y'+2y=0,$$

son équation caractéristique est

$$(C_{3.1}):\ r^2+3r+2=0$$

qui a pour discriminant $\Delta=3^2-4\times1\times2=1$. Ainsi les racines de $(C_{3.1})$ sont $r_1=\frac{-3-1}{2}=-2$ et $r_2=\frac{-3+1}{2}=-1$, ce qui nous donne la solution générale de l'ESSM $(H_{3.1})$ est

$$y_0(x)=Ae^{-x}+Be^{-2x},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

Pour déterminer une solution particulière de l'EASM $(E_{3.1})$, on peut utiliser la méthode de la variation des constantes qui demeure toujours valable, mais pour cette équation, il faut remarquer que le second membre $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ où $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=e^{-x}$ et $f_3(x)=\sin(x)$. D'après le principe de superposition (voir cours) si $y_i(x)$ est une solution particulière de l'équation $(E_i)\ :\ y''+3y'+2y=f_i(x)$, $i=1,2,3$, alors $y_p(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)$ est bien une solution particulière de $(E_{3.1})$

⋆ Détermination de $y_1(x)$: Puisque $f_1(x)=x^2=v^2\exp(0\times x)$ et zéro n'est pas racine de l'équation caractéristique $(C_i)\ :\ r^2+3r+2=0$ donc $y_1(x)=ax^2+bx+c$. Calculons a,b etc. Par dérivations on aura:

$$y_1'(x)=2ax+b,\ y_1''(x)=2a$$

Par substitution dans (E_1) on aura

$$\begin{aligned}(E_1)\quad &:\quad 2a+3\left(2ax+b\right)+2\left(ax^2+bx+c\right)=x^2\\ &\Leftrightarrow\quad 2ax^2+\left(6a+2b\right)x+\left(2a+3b+2c\right)=x^2\end{aligned}$$

Comme $\{1,x,x^2\}$ est un système libre (On peut aussi prendre $x=0$, $x=1$ et $x=-1$ dans cette égalité), cette dèrnière égalité implique

$$[2a=1,\ 6a+2b=0,\ 2a+3b+2c=0]\Leftrightarrow\left[a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{-3}{2},\ c=\frac{7}{4}\right]$$

$$y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

$\star$ Détermination de $y_1(x)$: ici $f_2(x) = e^{-x}$ avec -1 une racine de l'équation caractéristique (C_i) : $r^2+3r+2 = 0$, donc $y_2(x) = (ex+d)e^{-x}$, par dérivations on obtient

$$y_2'(x) = (-ex + e - d)\, e^{-x},\ y_2''(x) = (ex + d - 2e)\, e^{-x}$$

En remplaçant dans (E_2) on aboutit à;

$$(ex + d - 2e)\, e^{-x} + 3\,(-ex + e - d)\, e^{-x} + 2\,(ex + d)\, e^{-x} = e^{-x}$$

c'est-à-dire $(e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R})$

$$0x + e = 1$$

Donc $e = 1$ et $d \in \mathbb{R}$. Il suffit de prendre $d = 0$ pour avoir une solution particulière

$$y_2 = xe^{-x}$$

$*$ Cherchons $y_3(x)$: avec $\omega = 1$ non racine de C_3 : $r^2 + 3r + 2 = 0$. Comme $f_3(x) = \sin(x)$, avec $\omega = 1$ non racine de C_3 : $r^2 + 3r + 2 = 0$ donc une solution particulière de (E_3) sera de la forme:

$$y_3(x) = M\cos(x) + N\sin(x)$$

de sorte que

$$y_3'(x) = -M\sin(x) + N\cos(x),\ y_3''(x) = -M\cos(x) - N\sin(x)$$

Par substitution dans (E_3) On déduit que

$$(-M\cos(x) - N\sin(x)) + 3\,(-M\sin(x) + N\cos(x)) + 2\,(M\cos(x) + N\sin(x)) = \sin(x)$$

c'est-à-dire

$$(M + 3N)\cos(x) + (N - 3M)\sin(x) = \sin(x)$$

ceci étant vrai pour tout réel x en particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ On aura donc

$$(s)\begin{cases} M+3N &= 0 \\ N-3M &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M &= \frac{-3}{10} \\ N &= \frac{1}{10} \end{cases}$$

Donc il suffit de prendre $y_3(x) = \frac{-3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$

Conclusion: la solution générale de l'équation $(E_{3,1})$ est

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$$

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + xe^{-x} + \frac{-3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x),\ (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

⋇ Dans le cas de

$$(E_{3.2}):\ y'' + 4y' + 5y = x\sin(x)\,e^{-2x}$$

l'équation homogène est

$$(H_{3.2}):\ y'' + 4y' + 5y = 0$$

qui est d'équation caractéristique

$$\left(C_{3,2} : r^2 + 4r + 5 = 0\right)$$

dont le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 5 = -2^2 < 0$, donc on a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-4-2i}{2} = -2-i$ et $r_2 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$. D'aptès le cours, la solution générale de l'ESSM est

$$y_0(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))\,e^{-2x};\ (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

Pour déterminer une solution particulière de $(E_{3.2})$ on va utiliser la méthode de la variation des constantes: $A = A(x)$ et $B = B(x)$. Sachant que dans ce cas $y_1(x) = \cos(x)e^{-2x}$ et $y_2(x) = \sin(x)e^{-2x}$ les dérivées de $A(x)$ et $B(x)$ sont données par le système

$$(S)\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 &= 0 \\ A'y_1' + B'y_2' &= x\sin(x)\,e^{-2x} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} A'\cos(x)e^{-2x}+B'\sin(x)e^{-2x} & =0\\ A'\left(-\sin(x)-2\cos(x)\right)e^{-2x}+B'\left(\cos(x)-2\sin(x)\right)e^{-2x} & =x\sin\left(x\right)e^{-2x}\end{array}\right.$$

Puisque la fonction $x\mapsto e^{-2x}$ ne s'annule jamais le système (S) est équivalent à

$$(S')\left\{\begin{array}{ll} A'\cos(x)+B'\sin(x) & =0\\ A'\left(-\sin(x)-2\cos(x)\right)+B'\left(\cos(x)-2\sin(x)\right) & =x\sin\left(x\right)\end{array}\right.$$

dont le déterminant est

$$\omega(S')=\left|\begin{array}{cc}\cos(x) & \sin(x)\\ -\sin(x)-2\cos(x) & \cos(x)-2\sin(x)\end{array}\right|,$$

qui vaut $\omega(S')=\cos^2(x)-2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)+2\cos(x)\sin(x)=1$.

De même ona

$$\omega(A')=\left|\begin{array}{cc}0 & \sin(x)\\ x\sin(x) & \cos(x)-2\sin(x)\end{array}\right|=-x\sin^2(x)$$

et

$$\omega(B')=\left|\begin{array}{cc}\cos(x) & 0\\ -\sin(x)-2\cos(x) & x\sin(x)\end{array}\right|=x\cos(x)\sin(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\omega\left(A'\right)}{\omega\left(S'\right)}\\ &= -x\sin^2(x) \end{aligned}\qquad(0.14)$$

et

$$\begin{aligned} B' &= \frac{\omega\left(B'\right)}{\omega\left(S'\right)}\\ &= x\cos(x)\sin(x) \end{aligned}\qquad(0.15)$$

De (0.14) on déduit que $dA=-x\sin^2(x)dx$. Par intégration on aura

$$
\begin{aligned}
A &= \int -x\sin^2(x)dx \\
&= \int -x\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int\left(-x+x\cos(2x)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\sin(2x)\right]-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\sin(2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)\right]+cte \qquad (0.16)
\end{aligned}
$$

La même méthode appliquée à (0.15) qui veut dire $dB = x\cos(x)\sin^2(x)dx$ nous conduit à:

$$
\begin{aligned}
B &= \int x\cos(x)\sin(x)dx \\
&= \int x\left(\frac{1}{2}\sin^2(x)\right)'dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x\sin^2(x)\right]-\frac{1}{2}\int\sin^2(x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x\sin^2(x)\right]-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos(2x)}{2}dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x\sin^2(x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin(2x)\right]+cte \qquad (0.17)
\end{aligned}
$$

Pour les $cte = 0$ on obtient

$$A = -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin(2x)+\frac{1}{8}\cos(2x)$$

et

$$B = \frac{1}{2}x\sin^2(x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin(2x)$$

[0] **Tout(e) étudiant(e) ayant une (ou des) questions sur cette correction ou autre est prié de me rédiger sa problématique via Whatsapp au N° 0694583317. Je lui enverrai (in chaa allah) les réponses par son Whatsapp. Rigueur et patience aident à mener à bout tout travail aussi difficile que soit-il. Tourner la page SVP**

On en déduit une solution particulière y_p de $(E_{3.2})$

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)\right)\cos(x)e^{-x} + \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x\sin^2(x) + \frac{1}{8}\sin(2x)\right)\sin(x)e^{-2x}$$

Rappelons que la solution de L'ESSM est

$$y_0(x) = \left(A\cos(x) + B\sin(x)\right)e^{-2x},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Alors la solution générale de

$$(E_{3.2}) :\ y'' + 4y' + 5y = x\sin\left(x\right)e^{-2x}$$

est

$$i(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

soit
$y(x) = \left(A - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)\right)\cos(x)e^{-x} + \left(B - \frac{1}{4}x\frac{1}{2}x\sin^2(x) + \frac{1}{8}\sin(2x)\right)\sin(x)e^{-2x}$,
$(A, B) \in \mathbb{R}^2$